数理解析研究所講究録 1340 巻 2003 年 109-122

Banach 空間における近接点法の未解決問題

高橋　渉 (Wataru TAKAHASHI)

東京工業大学大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻

1　はじめに

H を実 Hilbert 空間とし，$f, f_1, f_2, \ldots, f_m: H \to \boldsymbol{R}$ を連続な凸関数とする．また

$$C = \{x \in H: \ f_i(x) \leqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)\}$$

とする．このとき

$$f(u) = \min_{x \in C} f(x)$$

を満たす点 $u \in C$ を求める問題を凸最小化問題という．C が空でないとし

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in C) \\ \infty & (x \notin C) \end{cases}$$

とすると，$g: H \to (-\infty, \infty]$ は proper で下半連続な凸関数になる．また，点 u が凸最小化問題の解であることは $g(u) = \min_{x \in H} g(x)$ と同値である．g を H から $(-\infty, \infty]$ に値をとる proper で凸な下半連続関数とするとき，我々は

$$g(z) = \min\{g(x) : x \in H\} \tag{1}$$

となる $z \in H$ を求めよ，という制約なしの凸最小化問題を考えることができる．このような g に対して，H 上の集合値写像 ∂g を，$x \in H$ に対して

$$\partial g(x) = \{x^* \in H : g(y) \geqq g(x) + (x^*, y - x), \ y \in H\}$$

で定義し，これを g の劣微分と呼ぶ．H 上の集合値作用素 $A \subset H \times H$ が，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geqq 0 \tag{2}$$

を満たすとき，単調であるといわれる．また，$A \subset H \times H$ が (2) を満たし，かつ (2) を満たす他の集合値作用素 $B \subset H \times H$ に対して

$$A \subset B \Rightarrow A = B$$

であるならば，A は極大単調であるといわれる．Proper で凸な下半連続関数 $g : H \to (-\infty, \infty]$ の劣微分 ∂g は極大単調になることが知られている．A を極大単調作用素とすると，任意の $\lambda > 0$ に対して，A の resolvent

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$$

が定義されるが，J_λ は H から H への非拡大写像となる．すなわち，$x, y \in H$ に対して

$$\|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leqq \|x - y\|$$

となる．また，∂g に対して $J_\lambda = (I + \lambda \partial g)^{-1}$ とすると

$$\begin{aligned} 0 \in \partial g(x_0) &\Leftrightarrow g(x_0) = \min\{g(x) : x \in H\} \\ &\Leftrightarrow J_\lambda x_0 = x_0 \ ({}^\forall \lambda > 0) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，凸最小化問題は，極大単調作用素 $A \subset H \times H$ に対して

$$0 \in Au$$

を満たす点 $u \in H$ を求める問題に一般化される．$0 \in Au$ の解を求めるよく知られた方法として，Martinet [22] によって導入され，Rockafellar[32] によって発展させられた proximal point algorithm（近接点法）というものがある．

Proximal point algorithm とは，$\{\lambda_n\} \subset (0, \infty)$ とするとき，$x_1 \in H$ を初期点とし

$$x_{n+1} = J_{\lambda_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で帰納的に点列 $\{x_n\}$ を生成し，(1) の解を求める点列的構成法のことである．

一方，我々は，非拡大写像の 2 つの不動点近似法を知っている．1 つは Halpern [19] によって導入された点列的近似法で，Hilbert 空間 H 上で定義された非拡大写像 T に対して

$$x_1 = x \in H,\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

による点列 $\{x_n\}$ で T の不動点を求める方法である．他の 1 つは Mann [21] によって導入された

$$x_1 = x \in H,\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha) T x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

による点列 $\{x_n\}$ で T の不動点を求める近似法である．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ である．

ここでは，Rockafellar[32] の研究以来，非線形最適化問題と関連して盛んに研究されてきている proximal point algorithm とその未解決の問題について論ずることにする．まず，第 3 節では上の不動点近似法と数理計画法でのハイブリッド法のアイデアを用いて Hilbert 空間上で得られた最近の極大単調作用素の零点を求める点列的近似法を，強収束と弱収束の形で紹介する．強収束定理に関してはまったく新しいものであり，弱収束定理に関しては Rockafellar の定理 [32] の拡張定理である．そしてその応用として，凸関数の minimizer を求める点列的近似法を議論している．Hilbert 空間では，集合値作用素が m-増大であることと極大単調であることは同じである．しかしながら，Banach 空間ではまったく違ったものになる．そこで，第 4 節ではまず Banach 空間における m-増大作用素の零点を求める点列的近似法とその問題点を議論している．第 5 節では極大単調作用素の零点を求める近似法を resolvent と距離射影と generalized projection を用いて議論している．極大単調作用素の resolvent は非拡大写像にはならない．だから極大単調作用素の零点を求めるのに第 4 節の手法は使えない．そこに第 4 節とは違った難しさがある．第 5 節では Banach 空間における近接点法と未解決問題を述べている．第 6 節は第 5 節の応用である．

2 準備

E を Banach 空間とし，E^* をその共役空間とする．$x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $x^*(x)$ または (x, x^*) で表す．E における点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを $x_n \to x$ で表し，弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す．

E の凸性の modulus δ は，$0 \leqq \varepsilon \leqq 2$ となる ε に対して

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| \leqq 1, \|y\| \leqq 1, \|x-y\| \geqq \varepsilon\right\}$$

で定義される．Banach 空間 E が一様凸であるとは，$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) > 0$ がつねに成り立つときをいう．E の元 x に対して，E から E^* への集合値写像 J が

$$J(x) = \{x^* \in E^* : (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

が定義されるが，この J を E 上の duality 写像という．
$U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ としよう．このとき，$x, y \in U$ に対して，極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{3}$$

を考えよう．E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $x, y \in U$ 対して，(3) がつねに存在するときをいう．E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $y \in U$ に対して，(3) が $x \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは，任意の $x \in U$ に対して，(3) が $y \in U$ に関して一様に収束するときをいう．
E が Gâteaux 微分可能なノルムをもてば，E 上の duality 写像は一価写像になる．
Banach 空間 E が Opial's condition [26] を満たすとは，$x_n \rightharpoonup x$ かつ $x \neq y$ であるならば

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

となるときをいう．
E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ としよう．A が増大作用素 (accretive operator) であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して，つねに $(y_1 - y_2, j) \geqq 0$ となる $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在するときをいう．ただし，J は E の duality 写像である．$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $\lambda > 0$ に対して A の resolvent と呼ばれる J_λ と吉田近似と呼ばれる A_λ がつぎのように定義される．

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}, \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

また，すべての $\lambda > 0$ に対して $\overline{D(A)} \subset R(I + \lambda A)$ が成立するならば，A は値域条件 (range condition) を満たすといわれる．$A^{-1}0 = \{x \in D(A) :\ 0 \in Ax\}$ と A の resolvent J_r の不動点集合 $F(J_r)$ の間には $F(J_r) = A^{-1}0$ という関係がある．増大作用素 $A \subset E \times E$ が，すべての $\lambda > 0$ に対して $E = R(I + \lambda A)$ を満たすならば m-増大といわれる．m-増大作用素 A が値域条件を満たすことは定義から明らかである．また，つぎの定理 [49] は第 4 章の定理の証明で本質的となる．

定理 2.1 ($r \to \infty$ のときの $J_r x$ の収束性) E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$$

を満たすものとする．このとき，$0 \in R(A)$ ならば，任意の $x \in C$ に対して $\lim_{t\to\infty} J_t x$ が存在して，その極限は $A^{-1}0$ に属する．

$A \subset E \times E^*$ とする．A が単調 (monotone) であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geqq 0$$

がつねに成り立つときをいう．単調作用素 $A \subset E \times E^*$ が極大 (maximal) であるとは，A を真に含む単調作用素 $B \subset E \times E^*$ が存在しないときをいう．すなわち，$B \subset E \times E^*$ が単調で，かつ $A \subset B$ であるならば $A = B$ となるときをいう．つぎの定理はよく知られている [43].

定理 2.2 E を回帰的な Banach 空間とし，$J: E \to E^*$ を duality 写像とする．A を単調作用素とする．このとき，A が極大となるための必要十分条件は，すべての $r > 0$ に対して

$$R(J + rA) = E^*$$

となることである．

3 Hilbert 空間における極大単調作用素の近接点法

1976 年に，Rockafellar[32] は，つぎの弱収束定理を証明した．

定理 3.1 ([32]) H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$x_1 = x \in H$ とし

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する．

このとき，Rockafellar は上の定理において，$\{x_n\}$ が強収束するのではないかと考えた．しかしながら Güler[8] によってこのままの条件では強収束しない例があることが示された．最近上村-高橋 [12] は，Hilbert 空間における非拡大写像の Halpern[9] による不動点近似法のアイディアを用いて，つぎの強収束定理を得た．

定理 3.2 ([12]) H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ かつ

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．このとき $A^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は $Px \in A^{-1}0$ に強収束する．ただし，P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

定理 3.2 を用いると，つぎの定理を得ることができる．

定理 3.3 ([12]) H を Hilbert 空間とし，$f : H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$
$$J_{r_n} x_n = \operatorname{argmin}\left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 : z \in H \right\}$$

で定義する．ただし $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．もし $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は x に一番近い f の minimizer に強収束する．さらに

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leqq \alpha_n (f(x) - f(v)) + \frac{1-\alpha_n}{r_n}\|J_{r_n}x_n - v\|\|J_{r_n}x_n - x_n\|$$

が成り立つ．

つぎの定理は Mann タイプ [21] の proximal point algorithm である．

定理 3.4 ([12]) H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ を

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする．このとき，$x_1 = x \in H$ に対して点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義する．もし $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元に弱収束する．

定理 3.4 を用いると，つぎの定理を得ることができる．

定理 3.5 ([12]) H を Hilbert 空間とし，$f : H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．このとき，$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$
$$J_{r_n} x_n = \operatorname{argmin}\left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 : z \in H \right\}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\alpha_n \in [0,k] \ (0 < k < 1), \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．もし $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は f の minimizer に弱収束する．さらに，

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leqq \alpha_n (f(x_n) - f(v)) + \frac{1-\alpha_n}{r_n}\|J_{r_n}x_n - v\|\|J_{r_n}x_n - x_n\|$$

一方，Solodov-Svaiter[35] は，数理計画で用いられる hybrid 法を用いて，つぎの強収束定理を証明した．

定理 3.6 ([35]) H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．また，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ とし

$$\begin{cases} x_1 = x \in H \\ X_n = \{z \in H : \langle z - J_{r_n}x_n, x_n - J_{r_n}x_n \rangle \leqq 0\} \\ Y_n = \{z \in H : \langle -x_n, x - x_n \rangle \leqq 0\} \\ x_{n+1} = P_{X_n \cap Y_n}(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする．ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}(x)$ に強収束する．ここで，$P_{A^{-1}0}$ は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

4 Banach 空間での m-増大作用素の近接点法

Hilbert 空間では，$A \subset H \times H$ が m-増大作用素であることと極大単調作用素であることは同値であるが，Banach 空間では異なる．そこで，まず $A \subset E \times E$ が m-増大作用素である場合に定理 3.2 と定理 3.4 を Banach 空間に拡張することを試みてみよう．

定理 4.1 ([13]) E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$$

を満たすものとする．$x_1 = x \in C$ とし

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすものとする．このとき $A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する．ここで $Px = u$ とおくと，P は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である．

定理 4.1 を用いると，つぎの m-増大作用素の零点を求める強収束定理が得られる．

定理 4.2 E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を m-増大作用素とする．また，$x_1 = x \in C$ とし

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすものとする．このとき $A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する．ここで $Px = u$ とおくと，P は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である．

定理 4.3 ([13]) E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$$

を満たすものとする．$x_1 = x \in C$ とし

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 z に弱収束する．

定理 4.3 を用いると，つぎの m-増大作用素の零点を求める弱収束定理が得られる．

定理 4.4 E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を m-増大作用素とする．また，$x_1 = x \in C$ とし

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 z に弱収束する．

問題 Banach 空間の m-増大作用素に対して，Solodov-Svaiter タイプの定理（定理 3.6）が証明できるか．

5 Banach空間での極大単調作用素の近接点法

E を滑らかで回帰的かつ狭義凸な Banach 空間とし，E^* をその dual 空間とする．また $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする．このとき，定理 2.2 より任意の $x \in E$ と $r > 0$ に対して

$$J(x_r - x) + rAx_r \ni 0 \tag{4}$$

は少なくとも一つの解 $x_r \in D(A)$ をもつ．また，E が狭義凸なので，(4) の解は一意である．そこで，$x \in E$ と $r > 0$ に対して，A の resolvent J_r と吉田近似 A_r を

$$x_r = J_r x, \quad A_r x = \frac{1}{r} J(x - x_r)$$

で定義する．Solodov-Svaiter[35] の結果に動機づけられて，大沢-高橋 [25] はつぎの定理を証明した．

定理 5.1 ([25]) E を Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．また，E の点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = x \in E, \\ y_n = J_{r_n} x_n, \\ C_n = \{z \in E : (y_n - z, J(x_n - y_n)) \geqq 0\}, \\ D_n = \{z \in E : (x_n - z, J(x_1 - x_n)) \geqq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

で定義する．このとき，$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ ならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の点 $P_{A^{-1}0}(x_1)$ に強収束する．

一方，上村-高橋 [14] は，Hilbert 空間における Solodov-Svaiter[35] の結果をつぎのような形で Banach 空間に拡張した．その前に Hilbert 空間における距離射影の一般化である generalized projection について説明する．

E を滑らかで，狭義凸な回帰的 Banach 空間とする．また，$\phi : E \times E \to (-\infty, \infty)$ を

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2 \quad (\forall x, y \in E)$$

によって定義する．ここで J は E の duality mapping である．C を E の空でない閉凸集合とし，$x \in E$ とする．このとき，一意の $x_0 \in C$ が存在して

$$\phi(x_0, x) = \inf\{\phi(z, x) : \ z \in C\}$$

となる．このとき，E から C 上への写像 Q_C を $Q_C x = x_0$ によって定義する．こんな Q_C を generalized projection と呼ぶ．Hilbert 空間では，この Q_C と距離射影 P_C は一致する．

E を滑らかな Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．また，$x \in E, x_0 \in C$ とする．このとき，つぎの (1) と (2) は同値である．

(1) $\phi(x_0, x) = \min_{y \in C} \phi(y, x)$;

(2) $\langle x_0 - y, Jx - Jx_0 \rangle \geqq$ for all $y \in C$.

定理 5.2 ([14]) E および E^* を一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．また，E の点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{cases} x_1 = x \in E, \\ 0 = v_n + \frac{1}{r_n}(Jy_n - Jx_n), \ v_n \in Ay_n, \\ C_n = \{z \in E : (y_n - z, v_n) \geqq 0\}, \\ D_n = \{z \in E : (x_n - z, Jx_0 - Jx_n) \geqq 0\}, \\ x_{n+1} = Q_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

このとき，$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ ならば，$\{x_n\}$ は $Q_{A^{-1}0}(x_1)$ に強収束する．

最近，高阪と高橋 [15] は Banach 空間上の極大単調作用素に対してつぎの Halpern 型の強収束定理を得た．

定理 5.3 ([15]) E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする．また，$r > 0$ に対して $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned} x_1 &= x \in E, \\ x_{n+1} &= J^{-1}(\alpha_n J(x) + (1-\alpha_n)J(Q_{r_n}x_n)) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

ここで $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすものとする．このとき $A^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は $Q_{A^{-1}0}x$ に強収束する．ここで $Q_{A^{-1}0}$ は E から $A^{-1}0$ 上への generalized projection である．

Banach 空間上の極大単調作用素に対して Mann 型の弱収束定理を得るために，つぎの強収束定理が必要となる．

定理 5.4 ([11]) E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．$r > 0$ に対して，$Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ 上への generalized projection とする．また，E の点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{aligned} x_1 &= x \in E, \\ x_{n+1} &= J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1-\alpha_n)J(Q_{r_n}x_n)) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$，$\{r_n\} \subset (0,\infty)$ である．このとき，$\{Q_{A^{-1}0}(x_n)\}$ は $A^{-1}0$ の点 v に強収束する．さらにこの元 $v \in A^{-1}0$ は

$$\lim_{n\to\infty} \phi(v, x_n) = \min_{y \in A^{-1}0} \lim_{n\to\infty} \phi(y, x_n)$$

を満たす．

定理 5.5 ([11]) E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，その duality mapping J を weakly sequentially continuous とする．$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．$r > 0$ に対して $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ を E から $A^{-1}0$ 上への generalized projecton とする．また，$\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned} x_1 &= x \in E, \\ x_{n+1} &= J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + 1 - \alpha_n)J(Q_{r_n}x_n)) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

ここで $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たす．このとき $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に弱収束する．ここで $v = \lim_{n\to\infty} Q_{A^{-1}0}(x_n)$ であ

定理 5.5 の直接的な結果として，つぎの定理を得る．

定理 5.6 ([11]) E で滑らかで，一様凸な Banach 空間とし，その duality mapping J を weakly sequentially continuous とする．$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となるような極大単調作用素とし，$r > 0$ に対して $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とする．$Q_{A^{-1}0}$ を generalized projection とする．点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．$x_1 = x \in E$,

$$x_{n+1} = Q_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

ここで，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たす．このとき $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に弱収束する．ここで $v = \lim_{n\to\infty} Q_{A^{-1}0}(x_n)$ である．

問題 定理 5.5，定理 5.6 で，duality mapping J に weakly sequentially continuous を仮定しているが，これをはずすことはできないか．

6 応用

E を Banach 空間とし，$f: E \to (-\infty, \infty]$ を proper で凸な下半連続関数とする．f の劣微分 ∂f をつぎのように定義する．

$$\partial f(z) = \{v^* \in E^* : f(y) \geqq f(z) + \langle y - z, v^* \rangle, \ \forall y \in E\} \quad (\forall z \in E).$$

定理 5.1 を用いると，つぎの定理を得ることができる．

定理 6.1 ([25]) E を Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様な Banach 空間とし，$f: E \to (-\infty, \infty]$ を $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ となる proper で凸な下半連続関数とする．また，E の点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{cases} x_1 = x \in E, \\ y_n = \operatorname{argmin}\left\{f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 : \ z \in E\right\}, \\ C_n = \{z \in E : (y_n - z, J(x_n - y_n)) \geqq 0\}, \\ D_n = \{z \in E : (x_n - z, J(x_1 - x_n)) \geqq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

このとき，$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ ならば，$\{x_n\}$ は x_1 に一番近い $(\partial f)^{-1}0$ の点に強収束する．

定理 5.2 を用いると，つぎの定理を得ることができる．

定理 6.2 ([14]) E および E^* を一様凸な Banach 空間とし，$f: E \to (-\infty, \infty]$ を $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ となる proper で凸な下半連続関数とする．また，E の点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{cases} x_1 = x \in E, \\ y_n = \operatorname{argmin}\left\{f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z\|^2 - \frac{1}{r_n}(z, Jx_n) : \ z \in E\right\}, \\ C_n = \{z \in E : (y_n - z, Jx_n - Jy_n) \geqq 0\}, \\ D_n = \{z \in E : (x_n - z, Jx_0 - Jx_n) \geqq 0\}, \\ x_{n+1} = Q_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

このとき，$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ ならば，$\{x_n\}$ は $Q_{(\partial f)^{-1}0}(x_1)$ の点に強収束する．

定理 6.1 と定理 6.2 において

$$y_n = \operatorname{argmin}\left\{f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 :\ z \in E\right\},$$
$$y_n = \operatorname{argmin}\left\{f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z\|^2 - \frac{1}{r_n}(z, Jx_n) :\ z \in E\right\}$$

は，劣微分に関する計算公式 [43] を用いると

$$0 \in \partial f(y_n) + \frac{1}{r_n}J(y_n - x_n),$$
$$0 \in \partial f(y_n) + \frac{1}{r_n}J(y_n) - \frac{1}{r_n}Jx_n$$

となる．E が Hilbert 空間の場合においては duality 写像 J が $Jx = x$ であるので上の 2 つの式は同じことになる．

定理 5.3 を用いると，つぎの強収束定理を得ることができる．

定理 6.3 ([15]) E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$f : E \to (-\infty, \infty]$ を $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ となるような proper で凸な下半連続関数とする．このとき，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$x_1 = x \in E,$$
$$y_n = \arg\min_{y\in E}\{f(y) + \frac{1}{2r_n}\|y\|^2 - \frac{1}{r_n}\langle y, Jx_n\rangle\},$$
$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx + (1-\alpha_n)Jy_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たす．このとき $\{x_n\}$ は $Q_{(\partial f)^{-1}0}x$ に強収束する．

定理 5.5 を用いると，つぎの弱収束定理を得ることができる．

定理 6.4 ([11]) E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，その duality mapping J を weakly sequentially continuous とする．$f : E \to (-\infty, \infty]$ を $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ となるような proper で凸な下半連続関数とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$x_1 = x \in E,$$
$$y_n = \arg\min_{y\in E}\{f(y) + \frac{1}{2r_n}\|y\|^2 - \frac{1}{r_n}\langle y, Jx_n\rangle\},$$
$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx + (1-\alpha_n)Jy_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1 \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

満たす．このとき，$\{x_n\}$ は $v \in (\partial f)^{-1}0$ に弱収束する．さらに $v = \lim Q_{(\partial f)^{-1}0}(x_n)$ であ．ここで $Q_{(\partial f)^{-1}0}$ は generalized projection である．

REFERENCES

1. Y. I. Alber, Metric and generalized projections in Banach space: Properties and applications, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York,1996, pp. 15–20.

2. S. Atsushiba, A. T. Lau and W. Takahashi, Nonlinear strong ergodic theorems for commutative nonexpansive semigroups on strictly convex Banach spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **1** (2000), 213-231.

3. J. B. Baillon and G. Haddad, Quelques propriétésdes operateurs angle-bornés et n-cycliquement monotones, Israel J. Math. **26** (1977), 137–150.

4. H. Brézis and P. L. Lions, Produits infinis de resolvants, Israel J. Math. **29** (1978), 329–345.

5. F. E. Browder, Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 660–665.

6. F. E. Browder and W. V. Petryshym, Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 197–228

7. J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected Topics*,

8. O. Güler, On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization, SIAM J. Control and Optim. **29** (1991), 403–419.

9. B. Halpern, Fixed points of nonexpanding maps, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

10. H. Iiduka and W. Takahashi, Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings, to appear.

11. S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space, to appear.

12. S. Kamimura and W. Takahashi, Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

13. S. Kamimura and W. Takahashi, Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

14. S. Kamimura and W. Takahashi, Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach apace, SIAM. J. Optim. to appear.

15. F. Kohsaka and W. Takahashi, Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space, to appear.

16. A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces, J. Func. Anal. **161** (1999), 62-75.

17. A. T. Lau and W. Takahashi, Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroups of nonexpansive mappings, *Pacific J. Math.*, **126** (1987), 277-294.

18. A. T. Lau and W. Takahashi, Invariant submeans and semigroups of nonexpansive mappings on Banach spaces with normal structure, J. Func. Anal. **142** (1996), 79-88.

19. P. L. Lions, Une methode iterative de resolution d'une inequation variationnelle, Israel J. Math. **31** (1978), 204–208.

20. F. Liu and M. Z. Nashed, Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates, Set-Valued Anal. **6** (1998), 313-344.

21. W. R. Mann, Mean value methods in iteration, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506 510.

22. B. Martinet, Regularisation d'inequations variationnelles par approximations successives, Rev. Franc. Inform. Rech. Oper. **4** (1970), 154 159.

23. J. J. Moreau, Proximité et dualité dans un espace Hilbertien, Bull. Soc. Math., France **93** (1965), 273-299.

24. K. Nakajo and W. Takahashi, Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups, J. Math. Anal. Appl. to appear

25. S. Ohsawa and W. Takahashi, strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators, Archiv der Mathematik, to appear.

26. Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591 597.

27. G. B. Passty, Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 383–390.

28. S. Reich, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274-276.

29. S. Reich, Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287 292.

30. R. T. Rockafellar, Characterization of the subdifferentials of convex functions, Pacific J. Math. **17** (1966), 497-510.

31. R. T. Rockafellar, On the maximality of sums of nonlinear monotone operators, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75-88.

32. R. T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, SIAM J. Control and Optim. **14** (1976), 877-898.

33. N. Shimizu and W. Takahashi, Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71-83.

34. N. Shioji and W. Takahashi, Strong convergence theorems of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3641 3645.

35. M. V. Solodov and B. F. Svaiter, A hybrid projection – proximal point algorithm, J. Convex Anal. **6** (1999), 59 70.

36. M. V. Solodov and B. F. Svaiter, Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

37. W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253-256.

38. W. Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 543-553.

39. W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 55-58.

40. W. Takahashi, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, *Can. J. Math.*, **44** (1992), 880-887.

41. W. Takahashi, Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1283-1293.

42. W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

43. W. Takahashi, Convex Analysis and Approximation of Fixed Points, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

44. W. Takahashi and G. E. Kim, Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces, Math. Japon. **48** (1998), 1–9.

45. W. Takahashi and K. Shimoji, Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems, *Mathematical and Computer Modelling*, **32** (2000), 1463-1471.

46. W. Takahashi and T. Tamura, Limit theorems of operators by convex combinations of nonexpansive retractions in Banach spaces, *J. Approximation Theory*, **91** (1997), 386-397.

47. W. Takahashi and T. Tamura, Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings, *J. Convex Analysis*, **5** (1998), 45-56.

48. W. Takahashi and M. Toyoda, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings, J. Optim. Theory Appl. to appear.

49. W. Takahashi and Y. Ueda, On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators, J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 546–553.

50. R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, Arch. Math. **58** (1992), 486 491.

51. H. K. Xu, Inequalities in Banach spaces with applications, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.