数理解析研究所講究録 1340 巻 2003 年 153-157

一般のＢＡＮＡＣＨ空間における実数パラメータ非拡大半群の共通不動点への収束定理

新潟大学・大学院自然科学研究科　鈴木 智成 (Tomonari Suzuki)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

1. 序

Banach 空間 E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $x, y \in E, \|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ ならば

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$$

が成立することである. $1 < p < \infty$ のとき, L^p は狭義凸であり, L^1, L^∞ は狭義凸ではない.

T を Banach 空間 E の閉凸集合 C 上の写像とする. 写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成立することである. $\{T(t) : t \geq 0\}$ が C 上の実数パラメータ非拡大半群とは以下を満たすことである.

(1) 各 $t \geq 0$ について, $T(t)$ は C 上の非拡大写像である;
(2) すべての $x \in C$ に対して, $T(0)x = x$ である;
(3) すべての $s \geq 0, t \geq 0$ に対して, $T(s+t) = T(s) \circ T(t)$ である;
(4) すべての $x \in C$ に対して, $t \mapsto T(t)x$ は連続写像である.

1998 年に, Atsushiba と Takahashi は Mann iteration [3] に平均の要素を加えた新しい iteration を考察した. そして, 可換な複数の非拡大写像の共通不動点への収束定理を証明した.

定理 1 (Atsushiba and Takahashi [1]). E を一様凸な Banach 空間で, Fréchet 微分可能なノルムを持つ, もしくは Opial 条件を満たす Banach 空間とする. C を E の閉凸集合とし, S と T を C 上の可換でかつ共通不動点を持つ非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を $\liminf_n \alpha_n > 0$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} S^i T^j x_n + (1 - \alpha_n) x_n \tag{1}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点へ弱収束する.

この定理に関連して Suzuki は以下を証明した.

定理 2 ([4]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし, S と T を C 上の可換な非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき, (1) で定義される点列 $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点へ強収束する.

Atsushiba と Takahashi は [2] において, 実数パラメータ非拡大半群に対する以下の収束定理を証明した.

定理 3 (Atsushiba and Takahashi [2]). E を狭義凸な Banach 空間, C を E のコンパクト凸部分集合とする. $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の実数パラメータ非拡大半群とする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とし, $\{t_n\}$ を $\lim_n t_n = \infty$ を満たす正の実数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x_n \, ds + (1 - \alpha_n)x_n \tag{2}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\{T(t) : t \geq 0\}$ の共通不動点へ強収束する.

本稿では, 定理 3 に関する最近の結果を述べる. また, 本稿で定義されていない概念については, [6] を参照のこと.

2. 収束定理

最近, Suzuki と Takahashi は以下の定理を証明した.

定理 4 ([5]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし, $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の実数パラメータ非拡大半群とする. $\{\alpha_n\}$ を $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とし, $\{t_n\}$ を $\lim_n t_n = \infty$ を満たす正の実数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき, (2) で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\{T(t) : t \geq 0\}$ の共通不動点へ強収束する.

この定理と定理 3 を比較すると, 定理 3 の狭義凸性という空間の条件が外れている一方で, 数列 $\{\alpha_n\}$ の条件は強くなっている.
この定理を証明するにあたり, 次の 2 つの補助定理は重要な役割を果たしている.

補助定理 1 ([4]). $\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ を Banach 空間 E の元よりなる有界な点列とする. $\{\alpha_n\}$ を $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. そして以下を仮定する: $z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1 - \alpha_n) z_n$ である; 任意の自然数 k に対して,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\|w_n - w_{n+k}\| - \|z_n - z_{n+k}\| \right) \leq 0$$

が成立する. このとき, $\liminf_n \|w_n - z_n\| = 0$ が成立する.

補助定理 2. C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とし, $\{T(t): t \geq 0\}$ を C 上の実数パラメータ非拡大半群とする. このとき,

$$\liminf_{t\to\infty}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)z\,ds - z\right\| = 0$$

を満たす $z \in C$ は $\{T(t): t \geq 0\}$ の共通不動点である.

定理 4 の証明の概略. 正の実数 t, および C の元 x に対して,

$$M(t,x) = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds$$

と置く. このとき, すべての正の実数 t に対して, C 上の写像 $M(t,\cdot)$ は非拡大となっている. 実際, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\begin{aligned}\|M(t,x) - M(t,y)\| &= \frac{1}{t}\left\|\int_0^t \big(T(s)x - T(s)y\big)ds\right\| \\ &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \|T(s)x - T(s)y\|ds \\ &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \|x-y\|ds \\ &= \|x-y\|\end{aligned}$$

である. また, このとき,

$$x_{n+1} = \alpha_n M(t_n, x_n) + (1-\alpha_n)x_n$$

がすべての自然数 n で成立している. 一方, すべての自然数 k に対して,

$$\limsup_{n\to\infty}\Big(\|M(t_n,x_n) - M(t_{n+k},x_{n+k})\| - \|x_n - x_{n+k}\|\Big) \leq 0$$

が成立している. 従って, 補助定理 1 より, $\liminf_n \|M(t_n,x_n) - x_n\| = 0$ が言える. C はコンパクトであるから, $\lim_k \|M(t_{n_k},x_{n_k}) - x_{n_k}\| = 0$ を満たし, かつある点 $z_0 \in C$ に収束するような $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在する. この z_0 に関して,

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty}\|M(t_{n_k},z_0) - z_0\| \\ &\leq \limsup_{k\to\infty}\big(\|M(t_{n_k},z_0) - M(t_{n_k},x_{n_k})\| + \|M(t_{n_k},x_{n_k}) - x_{n_k}\| \\ &\quad + \|x_{n_k} - z_0\|\big) \\ &\leq \limsup_{k\to\infty}\big(2\|x_{n_k} - z_0\| + \|M(t_{n_k},x_{n_k}) - x_{n_k}\|\big) = 0\end{aligned}$$

が言える. すなわち,

$$\liminf_{t\to\infty}\|M(t,z_0) - z_0\| = \lim_{k\to\infty}\|M(t_{n_k},z_0) - z_0\| = 0$$

である. よって補助定理 2 より, z_0 は $\{T(t) : t \geq 0\}$ の共通不動点である. また,

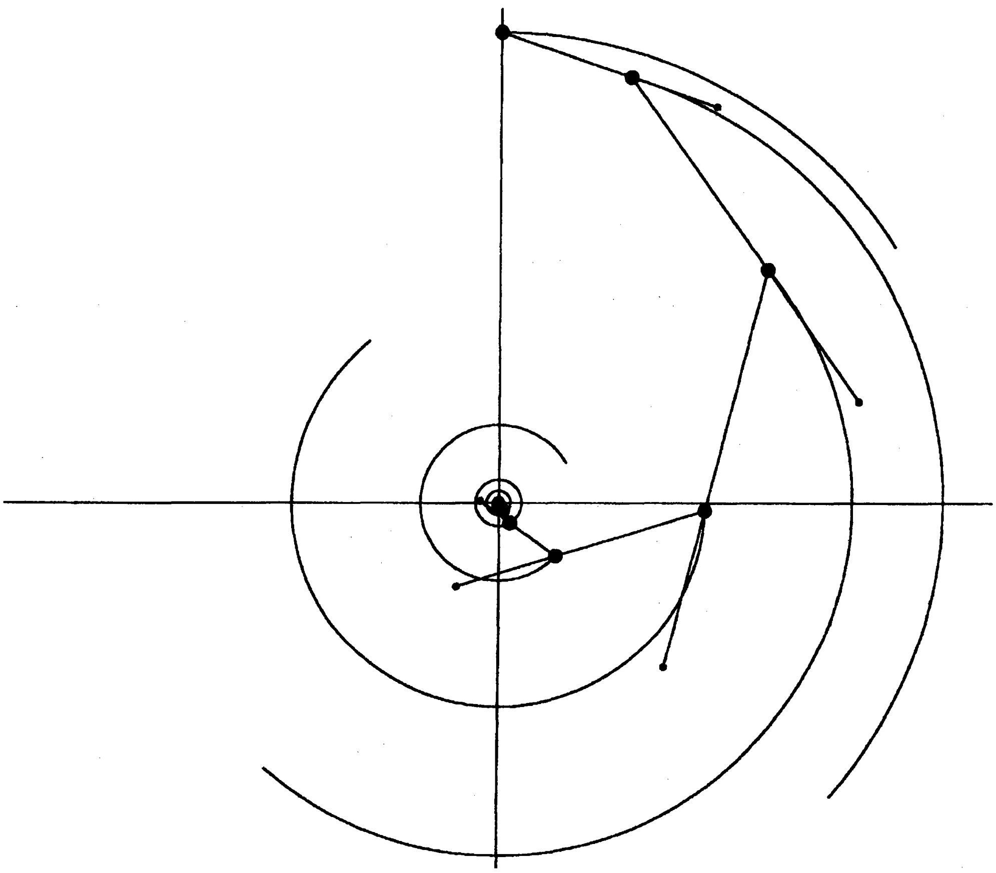
$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z_0\| &\leq \alpha_n \|M(t_n, x_n) - z_0\| + (1-\alpha_n)\|x_n - z_0\| \\ &\leq \alpha_n \|x_n - z_0\| + (1-\alpha_n)\|x_n - z_0\| \\ &= \|x_n - z_0\|\end{aligned}$$

より,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_0\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - z_0\| = 0$$

であることが分かる. これで証明を完了する. □

下の図は定理 4 に基づく収束の例である. $E = \mathbb{R}^2$, C を半径 1 の閉円盤とする. $T(t)$ を原点を中心とした反時計回りに t ラジアン回転させる写像, $x_1 = (0,1)$, $\alpha_n = 3/5$, $t_n = n$ とした場合の $\{x_n\}$ は, 下図のような点列になる.



参考文献

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *"Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces"*, Bull. Austral. Math. Soc., **57** (1998), 117–127.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *"Strong convergence theorems for one-parameter nonexpansive semigroups with compact domains"*, in Fixed Point Theory and Applications, Volume 3 (Y. J. Cho, J. K. Kim and S. M. Kang Eds.), pp. 15–31, Nova Science Publishers, New York, 2002.

[3] W. R. Mann, *"Mean value methods in iteration"*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.

[4] T. Suzuki, *"Strong convergence theorem to common fixed points of two non-expansive mappings in general Banach spaces"*, J. Nonlinear Convex Anal, **3** (2002), 381-391.

[5] T. Suzuki and W. Takahashi, *"Strong convergence theorems of Mann's type for one-parameter nonexpansive semigroups in general Banach spaces"*, submitted.

[6] 高橋渉: "凸解析と不動点近似", 横浜図書 (2000).