数理解析研究所講究録 1340 巻 2003 年 10-17

Gauss 可測なノルムについての再考

お茶の水女子大学大学院人間文化研究科　原井　敬子 (Keiko Harai)
同大学理学部　前田　ミチエ (Michie Maeda)

1　導入

無限次元空間上の測度論は，Prokhorov, Sazonov, Minlos らによって，独立した研究分野として確立された．無限次元空間上では，Gauss シリンダー測度が中心的な役割を果たしている．これは，有限次元空間での定義をそのまま無限次元 Hilbert 空間に拡張して定義できるが，$\sigma-$ 加法性がなくシリンダー測度になっている．1962 年，Gross([5]) が可測ノルムの概念を導入した．これは，Gauss シリンダー測度を測度に拡張するための条件である．Gauss シリンダー測度に関して，今まで多くの結果が得られている．この論文でもう一度 Gauss シリンダー測度を考察してみようと思ったきっかけは，Kuo の Conjecture である．ここではこの Conjecture を中心に，Hilbert 空間 H 上のノルム $\|\cdot\|$ が，Gauss シリンダー測度に対して可測であるという条件と，$\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n\|^2<+\infty$ となる H 上の完全正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在するという条件について調べてみた．

2　準備

この論文では，X を Banach 空間，X^* を位相的双対空間，$(\cdot,\cdot)$ を X^* と X の natural pairing, $\mathscr{B}(X)$ を X の Borel $\sigma-$algebra とする．また，H を実可分 Hilbert 空間, $<\cdot,\cdot>$ を H 上の内積, $FD(H)$ を H の有限次元部分空間全体, $\mathscr{F}$ を H 上の有限次元部分空間への直交射影全体とする．I で恒等写像を表すことにする．
Z が，$\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}\subset X^*$，$B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して，次のように表されるとき，シリンダー集合という．

$$Z=\{x\in X;((\xi_1,x),\ldots,(\xi_n,x))\in B\}.$$

$\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ を固定したときのシリンダー集合全体を $\mathscr{R}_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$ で表し，シリンダー集合全体を $\mathscr{R}$ で表すとき，$\mathscr{R}_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$ は $\sigma-algebra$ となり，$\mathscr{R}$ は $algebra$ となる．
また，Hilbert 空間上のシリンダー集合は次のように表すことができる．

$$Z=\{x\in H;Px\in F\}\quad(P\in\mathscr{F},F\in\mathscr{B}(PH)).$$

次にシリンダー測度を定義する．

定義 2.1 $\mathscr{R}$ 上に定義された関数 μ が次の条件を満たすとき，シリンダー測度であるという.
(i) $\mu : \mathscr{R} \to [0,1]$
(ii) μ の $\mathscr{R}_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$ への制限が確率測度

次に Hilbert 空間上で重要な役割を果たす Gauss シリンダー測度を定義する.

定義 2.2 集合関数 $\gamma : \mathscr{R} \to [0,1]$ が次のように表されるとき，標準的 *Gauss* シリンダー測度であるという.
$Z = \{x \in H; Px \in F\}$ に対して，

$$\gamma(Z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_F e^{-\frac{|x|^2}{2}}\, dx$$

ただし，$n = \dim PH$，dx は PH 上の *Lebesgue* 測度とする.

注意 1 H が無限次元空間のとき，γ は有限加法的測度であるが，$\sigma-$ 加法的ではない．一般に，*Gauss* シリンダー測度は，パラメータ t を使って，$\gamma_t(Z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n \int_F e^{-\frac{|x|^2}{2t}}\, dx$ と表され，γ_1 を標準的 *Gauss* シリンダー測度というが，この論文では単に γ で標準的 *Gauss* シリンダー測度を表すことにする.

次に可測ノルムを定義する.

定義 2.3 $\|\cdot\|$ を H で定義されたノルムとし，μ を H 上のシリンダー測度とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある P_0 が存在して，$P \perp P_0$ となるどんな $P \in \mathscr{F}$ に対しても，

$$\mu(\{x \in H; \|Px\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

が成り立つとき，$\|\cdot\|$ は $\mu-$ 可測であるという.

上の定義は次のように言いかえることができる.
任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $G \in FD(H)$ が存在して，$F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても，

$$\mu(\{N_\varepsilon \cap F + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

が成り立つとき，$\|\cdot\|$ は $\mu-$ 可測であるという.
ただし，$N_\varepsilon = \{x \in H; \|x\| \leq \varepsilon\}$，$F^\perp$ は F の直交補空間とする.

定義 2.4 *(Abstract Wiener space)* γ を H 上の *Gauss* シリンダー測度，$\|\cdot\|$ を H 上で定義された可測なノルム，B を $\|\cdot\|$ に関する H の完備化とし，i を H から B への埋め込み写像とする．このとき，(i, H, B) を *abstract Wiener space* という.

定理 2.5 H 上で定義されたノルム $\|\cdot\|$ が $\gamma-$ 可測であることと，$i(\gamma)$ が B 上で測度に拡張できることは同値である．(*D.F.L.* ([3]))

3 Gauss可測なノルムの例とKuoのConjecture

A を Hilbert-Schmidt 作用素とし，$x \in H$ に対して，$\|x\| = |Ax|$ と定義すると，$\|\cdot\|$ は γ-可測となることはよく知られている． さらに，H 上のすべての完全正規直交基底 $\{e_n\}$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2$ =(一定)$< +\infty$ となることも分かっている．

次に classical Wiener space 上で考える．
区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数 x で $x(0) = 0$ となるもの全体を $C[0,1]$ と表す．また，C' を次の条件を満たす実数値関数 f 全体とする．

$$f \text{ は絶対連続，} f(0) = 0,\ f' \in L^2[0,1]$$

さらに，C' 上の内積 $< \cdot, \cdot >$ を次のように定義する．

$$< f, g > = \int_0^1 f'(t) g'(t) dt$$

また，$\|x\| = \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)|$ とする．このとき，$(i, C', C[0,1])$ は abstract Wiener space となる．つまり，$\|\cdot\|$ は C' 上の Gauss 可測なノルムである．このとき，C' 上の完全正規直交基底を

$$e_n(t) = \sqrt{2}\{1 - \frac{1}{(n-\frac{1}{2})\pi} cos(n - \frac{1}{2})\pi t\}$$

とすると、$\|e_n\| \ge \sqrt{2}$ となり，$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 = +\infty$ となる．

また，$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell^2$ に対して，

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\| = \sup n^{-k} |x_n|$$

と定義する．$k \ge \frac{1}{2}$ のとき $\|\cdot\|$ は γ-可測となる．さらに，
$k > \frac{1}{2}$ のとき $\sum \|e_n\|^2 < \infty$ となる完全正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在する
$k = \frac{1}{2}$ のとき $\sum \|e_n\|^2 = \infty$ となる完全正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在する
ことが分かっている．([5])．

これらの例を見てみると，$\|\cdot\|$ が $\gamma-$ 可測であることと，ある $\{e_n\}$ に対して $\sum \|e_n\|^2 < +\infty$ となることが関係しているように思われる．

1975年Kuoが次のConjectureを提示した．

Conjecture

$\|\cdot\|$がH上の$\gamma-$可測なノルムであるとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n\|^2<+\infty$となる完全正規直交基底$\{e_n\}$が存在するか？

4 KuoのConjectureの解決

KuoのConjecture

$\|\cdot\|$がH上の$\gamma-$可測なノルムであるとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n\|^2<+\infty$となる完全正規直交基底$\{e_n\}$が存在するか？

このConjectureに興味をもち調べてみたところ，2つの論文により肯定的に解決されていたので紹介する．

定義 4.1 Eを実可分*Banach*空間，(ξ_n)をそれぞれの*distribution*が*standard Gaussian*測度となる独立な*random variables*の列，μをE上の対称な*Gaussian*測度とする．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n\xi_n \text{ が収束する } (a.s.)$$

$$\mu \text{ が } \sum_{n=1}^{\infty}x_n\xi_n \text{ の } \textit{distribution}$$

となるE上の列$\{x_n\}$が存在する．そのような列$\{x_n\}$をμに対する*representing sequence*と呼ぶ．

定義 4.2 Hを*Hilbert*空間，$\{e_n\}$をH上完全正規直交基底，$\{x_n\}$をμに対する*representing sequence*とするとき，$T:e_n\to x_n\ (n=1,2,\ldots)$は連続な線型作用素$T:H\to E$に一意に拡張できる．この$T$を*representing operator*と呼ぶ．

T : μに対するrepresenting operatorとするとき，
$\{f_n\}$をH上完全正規直交基底とすると，$\{Tf_n\}$はμに対するrepresenting sequenceなる．
逆に，$\{y_n\}$をμに対するrepresenting sequenceすると，対応するH上完全正規直交基底$\{f_n\}$が存在する．

次の定理はKuoのConjectureを解決した論文の1つである．

定理 4.3 *(Kwapien and Szymanski)* E を実可分 *Banach* 空間，μ を E 上対称な *Gaussian* 測度とすると，$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2 < +\infty$ となる μ に対する *representing sequence* $\{x_n\}$ が 存在する．

この定理により，$\|\cdot\|$ が $\gamma-$ 可測であるとき，$i(\gamma)$ は測度に拡張でき，ある $i(\gamma)$ に対する representing sequence $\{x_n\}$ が存在して，$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2 < +\infty$ となる．さらに，それに対応する完全正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在し，$\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n\|^2 < +\infty$ となる．

定義 4.4 X を実 *Banach* 空間，μ を X 上 *Radon* 確率測度で $\int_X |< x, x^* >|^2 d\mu(x) < \infty$ を満たすものとする．このとき，μ の *covariance operator* $R_\mu : X^* \to X$ を

$$R_\mu x^* = \int_X < x, x^* > x d\mu(x) \qquad (x^* \in X^*)$$

と定義する．

定義 4.5 Y, Z を実 *Banach* 空間とする．線型作用素 $R: Y \to Z$ が次の形で表されるとき，*nuclear* であるという．

$$Ry = \sum_{k=1}^{\infty} < y, y_k{}^* > z_k \ (y \in Y)$$

ただし，$(y_k{}^*) \subset Y^*$, $(z_k) \subset Z$, $\sum_{k=1}^{\infty}\|y_k{}^*\|\|z_k\| < \infty$ とする．

注意 2 可分な *Hilbert* 空間上では，*symmetric positive nuclear linear operator* と *covariance operator* は一致する．

定理 4.6 *(V.I.Tarieladze)* X を実 *Banach* 空間，μ を X 上 *Radon* 確率測度で，$\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ を満たすものとすると，μ の *covariance operator* $R_\mu : X^* \to X$ は

$$R_\mu x^* = \sum_{k=1}^{\infty} < x_k, x^* > x_k$$

と表される．

ただし，$x^* \in X^*$ ，$(x_k) \subset X, \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2 < \infty$ とする．

この定理において，問題点が２つある。

Problem1
上の定理で，$\{x_n\} \subset X$ が 位相的に独立な列として選べるか？

この問題１が解決されれば，Kuo の Conjecture を直接証明できるが，逆に定理 4.3 により，$\{x_n\}$ が位相的に独立な列としてとれることがいえる．

Problem2
X が実 Banach 空間のとき，すべての symmetric positive nuclear linear operator $R: X^* \to X$ は $Rx^* = \sum_{k=1}^{\infty} < x_k, x^* > x_k$,where $(x_k) \subset X, \sum \|x_k\|^2 < \infty$ と表されるか？

この問題２については，未解決のままか不明であるが，Kuo の Conjecture に直接関係していない．

5 type2,cotype2 の Banach 空間への拡張

ここでは，まず type2, cotype2 の Banach 空間の定義を述べる．
(ξ_n) をそれぞれの distribution が standard Gaussian 測度となる独立な random variables の列とする．

定義 5.1 *Banach* 空間 B が type 2 $\Longleftrightarrow$ $\sum \|x_n\|^2 < \infty$ のとき $\sum x_n \xi_n$ が収束 $(a.s.)$ する

定義 5.2 *Banach* 空間 B が cotype 2 $\Longleftrightarrow$ $\sum x_n \xi_n$ が収束 $(a.s.)$ するとき $\sum \|x_n\|^2 < \infty$

次はよく知られている事実である．
すべての Banach spce は type 1 であり，L^p $(1 \leq p \leq 2)$ は type p であり，L^r $(2 \leq r \leq +\infty)$ は type 2 である．また，L^1 は type 1 であり，L^∞ は type 1 である．

すべての Banach spce は cotype $+\infty$ である．また，L^1 は cotype 2 で，L^∞ は cotype $+\infty$ である．

定理 5.3 H を実可分 *Hilbert* 空間，$\|\cdot\|$ を H 上で定義された $\gamma-$ 可測なノルム，B を $\|\cdot\|$ に関する H の完備化，i を H から B への埋め込み写像とする．B が cotype 2 のと

き，H 上のすべての完全正規直交基底 $\{e_n\}$ に対して，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < +\infty$$

となる．

証明 H 上のある完全正規直交基底 $\{f_n\}$ に対して，$\sum i(f_n)\xi_n$ の distibution が $i(\gamma)$ となるので，$\sum i(f_n)\xi_n$ が収束 $(a.s)$ する． representing sequence の性質から，H 上のすべての完全正規直交基底 $\{e_n\}$ に対して $\sum i(e_n)\xi_n$ が収束 $(a.s)$ する．B は cotype2 であるので，$\sum \|e_n\|^2 < +\infty$ となる．

定理 5.4 H を実可分 *Hilbert* 空間，$\|\cdot\|$ を H 上で定義されたノルム，B を $\|\cdot\|$ に関する H の完備化，i を H から B への埋め込み写像とする．B が type 2 であるとき，次が成り立つ．

$$\|\cdot\| \text{ が } \gamma- \text{可測} \iff \sum \|e_n\|^2 < +\infty \text{ となる } \{e_n\} \text{ が存在する}$$

証明 $(\Longrightarrow)$ は明らかであるので，$(\Longleftarrow)$ を示す．$\|\cdot\|$ が type 2 のとき，$\sum \|i(e_n)\|^2 < +\infty$ より $\sum i(e_n)\xi_n$ が収束 $(a.s)$ する．$\sum i(e_n)\xi_n$ の *distribution* が $i(\gamma)$ になるので，$\|\cdot\|$ は $\gamma-$ 可測になる．

注意 3 (i, H, B) : *abstract Wiener space* とすると，

①B が *Hilbert* 空間であるとき

H 上の完全正規直交基底 $\{e_n\}$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 = constant < +\infty$ となる．

②B が *Hilbert* 空間でないとき

ある B に対しては，$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 = +\infty$ となる H 上の正規直交基底 $\{e_n\}$ が存在する．

参考文献

[1] A. Badrikian, and S. Chevet, *Mesures cylindriques, espaces de Wiener et fonctions aléatoires Gaussiennes* , Lecture Notes in Math. 379, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[2] P. Baxendale, *Gaussian Measures on Function Spaces* , Amer. J. Math. **98**(1976), 891-952.

[3] R.M. Dudley, J. Feldman, and L. LeCam, *On semi-norms and probabilities, and abstract Wiener Spaces*, Ann.of Math.**93**(1971),390-408.

[4] L. Gross, *Measurable functions on Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. 105(1962), 372-390.

[5] K. Harai and M. Maeda, シリンダー測度の回転と可測ノルム, 京都大学数理解析研究所講究録 1253(2002), 14-25.

[6] H.H. Kuo, *Gaussian Measures in Banach Spaces,* Lecture.Notes in Math.463, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975.