数理解析研究所講究録 1340 巻 2003 年 45-55

ファジィ測度のエントロピーと意思決定問題への応用

平山　高士 (Takashi Hirayama)
山口大学大学院理工学研究科
(Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University)
柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi)
山口大学工学部
(Department of Applied Science, Yamaguchi University)

1　序論

本研究では「加法性条件を弱める。一般的には、加法性条件を単調整条件に置き換えたもの」をファジィ測度としている。これはファジィ集合とは無関係である。

意思決定とはいくつかの代替案の中から最良の代替案を選択することである。この意思決定を複雑にする要因は大きく分けて２つ挙げられる。１つは、代替案を選択した結果が将来に属するための不確実性によるあいまいさであり、もう１つは意思決定者の主観的評価によるあいまいさである。本研究では後者のあいまいさを扱っている。

幾つかの具体的な評価基準を同時に考慮して、それらを総合化する主観的評価に基づく意思決定手法として、ＡＨＰ（Analytic Hierarcky Process）がある。ＡＨＰは評価基準のウエイトや各評価基準に対する代替案の評価値が意思決定者の一対比較から求められ、それらを加法的に合成し、代替案の総合評価が求められる。

しかし、意思決定者の評価の主観的尺度は加法性を満たさないことが多いため、その主観的尺度を非加法的に扱う必要が生じてくる。そこで本研究では、そのような尺度をファジィ測度であらわし、ＡＨＰにＳｈａｐｌｅｙ値に当てはめた総合評価を試みる。そしてファジィ測度のエントロピーの意味付けを行い、ＡＨＰに用いた例題を与えてみる。

2　数式定義

2.1　ファジィ測度

(X, F) を可測空間とする。
μ が F 上のファジィ測度であるとは、

$\mu : F \to [0, \infty]$ で、

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) = 0 \\ A, B \in F \\ A \subset B \to \mu(A) \leq \mu(B) \end{aligned} \tag{1}$$

を満たすことをいう。特に3番目の式は単調性を表す。

2.2 λ-ファジィ測度

ファジィ測度は融通性に富む反面、測度の決定の際の困難が大きい。そこで融通性をいくらか犠牲にし、その代わりに決定時の困難さを減らせるファジィ測度としてλ-ファジィ測度が考え出された。
$A \cap B = \phi$ のとき、

$$\mu_\lambda(A \cup B) = \mu_\lambda(A) + \mu_\lambda(B) + \lambda\mu_\lambda(A)\mu_\lambda(B) \tag{2}$$

ただし、$-1 < \lambda < \infty$。

$$\mu^i = \mu_\lambda(\{x_i\})(i = 1, 2. \cdots, n)$$

から、全ての H_i についての $\mu_\lambda(H_i)$ を求められる。

$$\mu_\lambda(H_i) = \mu^i + \mu_\lambda(H_{i-1}) + \lambda\mu^i\mu_\lambda(H_{i-1})$$

但し、$H_i = \{x_1, x_2, \cdots, x_i\}(i = 1, 2, \cdots, n)$ である。

2.3 Shapley 値

Shapley 値を q_i を次の様に定義する。

$$q_i = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \sum_{j=1}^{{}_{n-1}C_k} \lambda_{kj}\{\mu(K_{kj} \cup \{x_i\}) - \mu(K_{kj})\} \tag{3}$$

但し、全体集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$、$K_{kj} \subset X - \{x_i\}$、
$\#K_{kj} = k$ であり、$\{\omega_k\}, \{\lambda_{kj}\}$ はそれぞれ次の条件を満たすとする。

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 1, \quad \omega \geq 0, k = 0, 1, \cdots, n-1$$

$$\sum_{j=1}^{{}_{n-1}C_k} \lambda_{kj} = 1, \quad \lambda_{kj} \geq 0, j = 0, 1, \cdots, {}_{n-1}C_k$$

2.4 ファジィ測度のエントロピー

２つのファジィ測度を μ,ν とし、その Shapley 値を p_i, q_i とする。
ファジィ測度 μ のエントロピー ($S(\mu)$ または $S(X)$ で表す)
ν の μ に対する相対エントロピー ($S(\mu\|\nu)$ と表す)
は次の様に定義する。

$$S(\mu) = -\sum_{i=1}^{n} q_i \log q_i \tag{4}$$

$$S(\mu\|\nu) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i} \tag{5}$$

3 AHP の概要

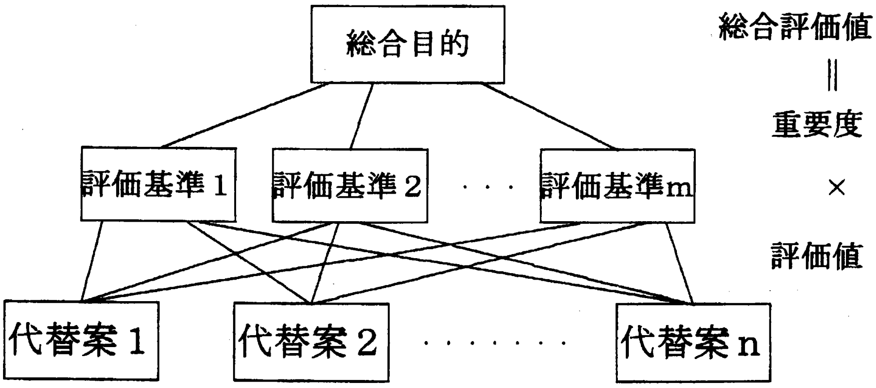

図１：ＡＨＰの階層例

1 問題を階層構造にする。最上層は総合目的、間は評価基準、最下層は代替案となる。

2 各階層において１つ上の階層との一対比較を行い各階層の要素間の重み付け (一対比較を行い評価値、重要度を求める) を行う。

3 重み (評価値、重要度) を用いて総合評価を行う。

数値	言葉
1	同じくらい重要
3	少し重要
5	かなり重要
7	非常に重要
9	圧倒的に重要

表１：一対比較における言葉と数値の対応

4　総合評価

代替案 S_n の評価基準 $x_i \in X$ に関する評価値を $f(x_i)$ とする。
評価値、重要度は一対比較行列の固有ベクトルを正規化することにより求めらる。

4.1　AHP の総合評価

ω_{x_i} を x_i の重要度とすると、ＡＨＰの総合評価値 $v(S_n)$ は次式となる。

$$v(S_n) = \sum_{x_i \in X} \omega_{x_i} f(x_i) \tag{6}$$

4.2　ファジィ測度を応用した AHP の総合評価

q_i を x_i の Shapley 値とすると、Shapley 値を用いたＡＨＰの総合評価値 S_n は次式となる。

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) \tag{7}$$

ファジィ測度を応用したものでは、ちょうど従来のＡＨＰの重要度が Shapley 値に置き換わっているだけである。

5　AHP の応用例

問題例：Ａさんの車購入
車の購入のため４台の車 (代替案 S_1, S_2, S_3, S_4) の中から選択する。評価基準は $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ である。

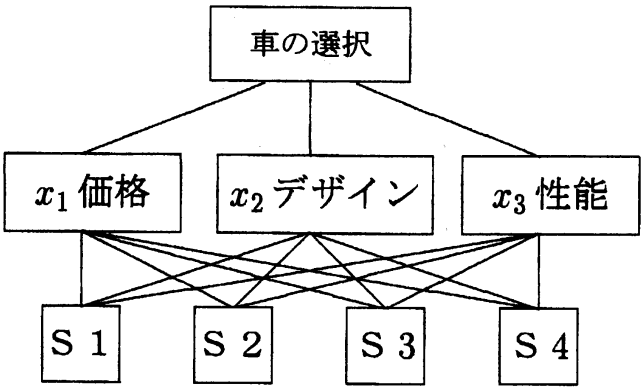

図２：車の購入のための選択の階層図

代替案の評価基準に対する一対比較を行い、得られた一対比較行列より固有ベクトルを求め、それを代替案の評価値とする。

価格	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	1	1/2	1/3	1/2
S_2	2	1	1/2	1
S_3	3	2	1	2
S_4	2	1	1/2	1

デザイン	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	1	2	4	5
S_2	1/2	1	3	4
S_3	1/4	1/3	1	2
S_4	1/5	1/4	1/2	1

性能	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	1	1/4	1/3	1/3
S_2	4	1	2	2
S_3	3	1/2	1	1
S_4	3	1/2	1	1

	価格	デザイン	性能
S_1	0.122	0.492	0.089
S_2	0.227	0.306	0.434
S_3	0.424	0.125	0.239
S_4	0.227	0.078	0.239

表 2:代替案の評価基準に対する一対比較と代替案の評価基準に対する評価値

次に総合評価に対する評価基準の一対比較を行う。まず評価基準 X の任意の部分集合を取り出し一対比較行列を行う。

$$
A = \begin{array}{r} \\ \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \{x_1,x_2\} \\ \{x_1,x_2,x_3\} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \{x_1\} & \{x_2\} & \{x_3\} & \{x_1,x_2\} & \{x_1,x_2,x_3\} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 3 & 2 & 1/3 & 1/5 \\
1/3 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/7 \\
1/2 & 2 & 1 & 1/4 & 1/6 \\
3 & 5 & 4 & 1 & 1/3 \\
5 & 7 & 6 & 3 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\omega = (0.115, 0.048, 0.073, 0.253, 0.510)^t
$$

5.1 ファジィ測度と Shapley 値の決定

求まった一対比較行列より評価基準の相乗効果を考慮した値であるファジィ測度 (ここではλ-ファジィ測度を用いている) を求める。

	$\mu_\lambda(-)$
$\{x_1\}$	0.225
$\{x_2\}$	0.094
$\{x_3\}$	0.143
$\{x_1, x_2\}$	0.660
$\{x_1, x_3\}$	0.890
$\{x_2, x_3\}$	0.455
$\{x_1, x_2, x_3\}$	1.000

表 3 : ファジィ測度 (λ-ファジィ測度)

求まったλ-ファジィ測度より Shapley 値を求めると、

$$q_1 = 0.476,\ q_2 = 0.193,\ q_3 = 0.332$$

求まった Shapley 値より総合評価を行う。従来の方法と比べると代替案 S_2 と S_3 の間で順位変動が起きていることが次の表からわかる。参考までにＡＨＰにショケ積分を用いた方法もあり、下記に結果のみを示す。

S:Shapley 値　評:評価値　重:重要度

	価格	デザイン	性能	総合評価	優先順位
評＼S	0.476	0.193	0.332	-	-
S_1	0.122	0.492	0.089	0.183	**4**
S_2	0.227	0.306	0.434	0.311	**1**
S_3	0.424	0.125	0.239	0.305	**2**
S_4	0.227	0.078	0.239	0.202	**3**

表 4：ファジィ測度を利用した AHP による総合評価

	価格	デザイン	性能	総合評価	優先順位
評＼重	0.539	0.164	0.297	-	-
S_1	0.122	0.492	0.089	0.173	**4**
S_2	0.227	0.306	0.434	0.301	**2**
S_3	0.424	0.125	0.239	0.320	**1**
S_4	0.227	0.078	0.239	0.206	**3**

表 5：従来の AHP による総合評価

	価格	デザイン	性能	総合評価	優先順位
評＼重	0.539	0.164	0.297	-	-
S_1	0.122	0.492	0.089	0.153	**4**
S_2	0.227	0.306	0.434	0.297	**1**
S_3	0.424	0.125	0.239	0.218	**2**
S_4	0.227	0.078	0.239	0.178	**3**

表 6：ショケ積分を利用した AHP による総合評価

6　ファジィ測度のエントロピーの応用例

ファジィ測度のエントロピーの応用として

・エントロピーにより、意思決定者の「決定のしやすさ」

・相対エントロピーにより、異なる意思決定者の「考え方の差」

を表せるのでは？

6.1 問題例：多人数による車購入

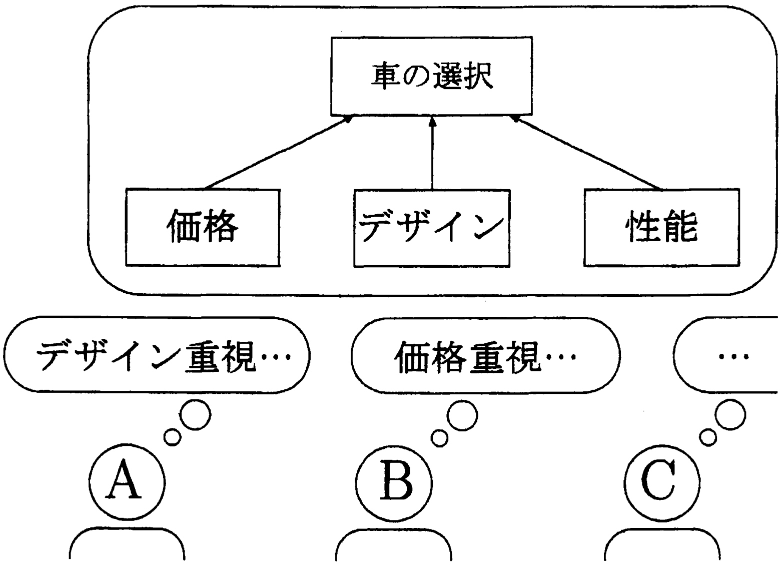

図 3:1 つの意思決定に対して複数の意思決定者がいる場合

6.1.1 比較対象の決定　その 1

A、B、C、D、E、F さんの 6 人が車選択をするとして、それぞれの評価基準の一対比較行列を以下のようにする。

$$
A = \begin{array}{l} \\ \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \{x_1, x_2\} \\ \{x_1, x_2, x_3\} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \{x_1\} & \{x_2\} & \{x_3\} & \{x_1, x_2\} & \{x_1, x_2, x_3\} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1/3 & 1/5 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/7 \\ 1/2 & 2 & 1 & 1/4 & 1/6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 1/3 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
B = \begin{array}{l} \\ \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \{x_1, x_3\} \\ \{x_1, x_2, x_3\} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \{x_1\} & \{x_2\} & \{x_3\} & \{x_1, x_3\} & \{x_1, x_2, x_3\} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/5 & 1/7 \\ 2 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/6 \\ 3 & 2 & 1 & 1/3 & 1/5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 1/3 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
C = \begin{array}{l} \\ \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \{x_1, x_2\} \\ \{x_1, x_2, x_3\} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \{x_1\} & \{x_2\} & \{x_3\} & \{x_1, x_2\} & \{x_1, x_2, x_3\} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 1/2 & 1/7 & 1/9 \\ 1/3 & 2 & 1 & 1/5 & 1/7 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 1/3 \\ 4 & 9 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$D = \begin{array}{c} \\ \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \{x_1,x_2\} \\ \{x_1,x_2,x_3\} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \{x_1\} & \{x_2\} & \{x_3\} & \{x_1,x_2\} & \{x_1,x_2,x_3\} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/9 & 1 & 1/9 \\ 1 & 1 & 1/9 & 1 & 1/9 \\ 9 & 9 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1/9 & 1 & 1/9 \\ 9 & 9 & 1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$E = \begin{array}{c} \\ \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \{x_1,x_3\} \\ \{x_1,x_2,x_3\} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \{x_1\} & \{x_2\} & \{x_3\} & \{x_1,x_3\} & \{x_1,x_2,x_3\} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$F = \begin{array}{c} \\ \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \{x_1,x_2\} \\ \{x_1,x_2,x_3\} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \{x_1\} & \{x_2\} & \{x_3\} & \{x_1,x_2\} & \{x_1,x_2,x_3\} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Aはデザイン > 性能 > 価格 の順で重要視。
- BはAと重みの場所が異なるだけ。
- CはAに比べて、価格、デザイン、性能の重みの比率が増している場合。
- Dは性能さえ良ければ価格、デザインはどうでもいいと考えている。
- Eは価格、デザイン、性能は同格とみなしている。
- FはDと同じ(実際はAHPにおいて0は取りえない)。

6.1.2 評価基準のファジィ測度、Shplay 値、ファジィ測度のエントロピー

価格 $= \{x_1\}$、デザイン $= \{x_2\}$、性能 $= \{x_3\}$

価格 $= \{q_1\}$、デザイン $= \{q_2\}$、性能 $= \{q_3\}$　　q : *Shapley* 値

	A	B	C
$\{x_1\}$	0.225	0.094	0.294
$\{x_2\}$	0.094	0.143	0.073
$\{x_3\}$	0.143	0.225	0.119
$\{x_1, x_2\}$	0.660	0.455	0.503
$\{x_1, x_3\}$	0.890	0.660	0.634
$\{x_2, x_3\}$	0.455	0.890	0.247
$\{x_1, x_2, x_3\}$	1.000	1.000	1.000
q_1	**0.476**	**0.193**	**0.507**
q_2	**0.193**	**0.332**	**0.203**
q_3	**0.332**	**0.476**	**0.291**
$S(\mu)$	**1.49596**	**1.49596**	**1.48207**
	D	E	F
$\{x_1\}$	0.113	1/3	0
$\{x_2\}$	0.113	1/3	0
$\{x_3\}$	1.000	1/3	1.000
$\{x_1, x_2\}$	0.113	2/3	0
$\{x_1, x_3\}$	1.000	2/3	1.000
$\{x_2, x_3\}$	1.000	2/3	1.000
$\{x_1, x_2, x_3\}$	1.000	1.000	1.000
q_1	**0.038**	**1/3**	**0**
q_2	**0.038**	**1/3**	**0**
q_3	**0.925**	**1/3**	**1**
$S(\mu)$	**0.4626**	**1.58496**	**0**

表 7 : 各人のファジィ測度,Shapley 値, 及びファジィ測度のエントロピー

	$S(\mu\|\|A)$	$S(\mu\|\|B)$	$S(\mu\|\|C)$	$S(\mu\|\|D)$	$S(\mu\|\|E)$
A	-	0.29632	0.00574	1.69763	0.09203
B	**0.25588**	-	0.30463	1.03445	0.09203
C	**0.00561**	0.35579	-	1.90034	0.10593
D	**1.13973**	0.67868	1.30940	-	1.12540
E	**0.09185**	0.09185	0.10059	1.59473	-
F	**1.59074**	1.07097	1.78091	0.11247	1.58641

表 8 : A, B, C, D, E のファジィ測度の相対エントロピー

6.1.3 意思決定におけるエントロピーの結果

Aさんに対する他の人の相対エントロピーの大きさ (評価基準の考え方の相違度) は次の順番となる。

Aさん：**Cさん** $<$ **Eさん** $<$ **Bさん** $<$ **Dさん** $<$ **Fさん**

同様に、

Bさん：**Eさん** $<$ **Aさん** $<$ **Cさん** $<$ **Dさん** $<$ **Fさん**
Cさん：**Aさん** $<$ **Eさん** $<$ **Bさん** $<$ **Dさん** $<$ **Fさん**
Dさん：**Cさん** $<$ **Eさん** $<$ **Bさん** $<$ **Dさん** $<$ **Fさん**
Eさん：**Aさん** $=$ **Bさん** $<$ **Cさん** $<$ **Dさん** $<$ **Fさん**

A、B、C、D、E、Fさんのエントロピーの大きさ (代替案の決定のしやすさ、評価基準のこだわり) は、

Eさん $>$ **Aさん** $=$ **Bさん** $>$ **Cさん** $>$ **Dさん** $>$ **Fさん**

実際にこのエントロピーを意思決定に直接活かせるかは不明だが、個々の人間の考え方を量によって表すことができているのではないだろうか？

参考：Shapley 値の計算例

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \omega_0\lambda_{01}[\mu(K_{01}\cup\{x_1\})-\mu(K_{01})] \\
&\quad -\omega_1[\lambda_{11}[\mu(K_{11}\cup\{x_1\})-\mu(K_{11})]+\lambda_{12}[\mu(K_{12}\cup\{x_1\})-\mu(K_{12})] \\
&\quad -\omega_2\lambda_{21}[\mu(K_{21}\cup\{x_1\})-\mu(K_{21})] \\
&= \omega_0\lambda_{01}[\mu(x_1)-0] \\
&\quad -\omega_1[\lambda_{11}[\mu(\{x_1,x_2\})-\mu(\{x_2\})]+\lambda_{12}[\mu(\{x_1,x_3\})-\mu(\{x_3\})] \\
&\quad -\omega_2\lambda_{21}[\mu(\{x_1,x_2,x_3\})-\mu(\{x_2,x_3\})] \\
&= 1/3\times 1\times\{0.225-0\} \\
&\quad +1/3\times 1/2\times\{(0.660-0.094)+(0.890-0.143)\} \\
&\quad +1/3\times 1\times\{1.000-0.455\} \\
&= 0.476
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_2 &= \omega_0\lambda_{01}[\mu(K_{01}\cup\{x_2\})-\mu(K_{01})] \\
&\quad -\omega_1[\lambda_{11}[\mu(K_{11}\cup\{x_2\})-\mu(K_{11})]+\lambda_{12}[\mu(K_{12}\cup\{x_2\})-\mu(K_{12})] \\
&\quad -\omega_2\lambda_{21}[\mu(K_{21}\cup\{x_2\})-\mu(K_{21})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_3 &= \omega_0\lambda_{01}[\mu(K_{01}\cup\{x_3\})-\mu(K_{01})] \\
&\quad -\omega_1[\lambda_{11}[\mu(K_{11}\cup\{x_3\})-\mu(K_{11})]+\lambda_{12}[\mu(K_{12}\cup\{x_3\})-\mu(K_{12})] \\
&\quad -\omega_2\lambda_{21}[\mu(K_{21}\cup\{x_3\})-\mu(K_{21})]
\end{aligned}
$$

References

[1] Kenjiro Yanagi 「Entoropy of Fuzzy Measure」 (SITA 2001)

[2] R.R. Yager「On the Entropy of Fuzzy Measures」 (IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol.8 2000)

[3] 浅居　喜代治『ファジィ経営科学入門』(オーム社、1992)

[4] 木下　栄蔵『意思決定論入門』(近代科学社)