

3次元凸多面体の展開図について -Mathematica を利用した計算実験-

並木 誠 (NAMIKI Makoto, 東邦大学理学部)
島 崇弘 (SHIMA Takahiro, 東邦大学理学部)

概要

組み合わせ幾何学の分野において「どのような3次元凸多面体も自分自身が重ならないように展開図を描けるか?」という未解決問題がある。凸多面体の組み合わせ的性質と幾何学的な性質ともに関わってくる、非常に難しい未解決問題である。本稿では、その未解決問題に対する計算機実験によるアプローチを試みる。

1 はじめに

3次元凸多面体というと大多数の人が真っ先に思い浮かべるのは、プラトンの正多面体と呼ばれる図1のような図形であろう。調和と均斉がとれたこれらの美しい多面体は、紀元前3, 4世紀頃の古くより研究されている。正多面体の正確な定義は「全ての面が合同な正多角形からなり、各頂点に集まる辺の数が全て等しい多面体」であり、全部で5種類存在することが知られている。

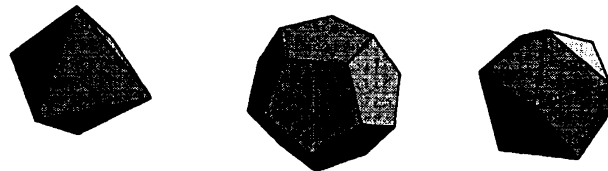


図1: 左から, 正8, 正12, 正20面体

他にも、調和と均斉のとれた多面体としてアルキメデスの準正多面体と呼ばれる3次元多面体のクラス等が研究されているが、それらの特徴などについては文献 [3, 8]などを参照されたい。

多面体は常に調和と均整が保たれているとは限らない。より一般的には、多面体は次のように「有限個の半空間の共通部分」として定義される。

定義 1 (凸多面体) 凸多面体 P とは、有限個の半空間の共通部分である、つまり、

$$P = \{x \in R^d | Ax \leq b\},$$

但し、 A は $n \times d$ 行列、 b は n -次元ベクトルである。

Key words. Convex Polytope, Unfolding

このように定義された凸多面体は、「有限個の点の凸包内の点と有限個のベクトルの非負結合の和」として表すことも可能であり、そのことを示す定理は Minkowski-Weyl の定理として広く知られている [5]. P, Q を R^d の部分集合とする. P と Q の Minkowski 和を $P + Q$ で表すとする. つまり,

$$P + Q = \{p + q | p \in P \text{ and } q \in Q\}$$

とする. 次の定理が成り立つ.

定理 1 (Minkowski-Weyl の定理) R^d の部分集合 P に対し, 次の 2 つは同値である.

(a) P は多面体である. つまり, $n \times d$ 行列 A と n 次元ベクトル b に対して,

$$P = \{x | Ax \leq b\}$$

と表せる.

(b) R^d 内の有限個のベクトルの集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ と $\{r_1, r_2, \dots, r_s\}$ が存在し,

$$P = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} + \text{nonneg}\{r_1, r_2, \dots, r_s\}$$

と表せる. 但し, $\text{nonneg}\{\cdot\}$ はベクトルの集合の非負結合を表す.

任意の多面体は (a) と (b) の両方の表現を持つのである. 表現 (b) における右辺の第二項が空集合となる多面体, つまり $\{r_1, r_2, \dots, r_s\} = \emptyset$ となる多面体を有界な多面体という.

多面体の組み合わせの性質を記述するために, 多面体のフェイスという概念を導入しよう.

P を R^d 中の凸多面体とする. d 次元実ベクトル c と実数 β に対し, もし, 任意の $x \in P$ に対し $c^T x \leq \beta$ が成り立つならば, 不等式 $c^T x \leq \beta$ を **妥当不等式** という. P の部分集合 F が, ある妥当不等式 $c^T x \leq \beta$ に対して,

$$F = P \cap \{x | c^T x = \beta\}$$

を満たすとき, F を多面体 P のフェイスであるという. F を多面体 P のフェイスとしたとき, F に含まれるアフィン独立なベクトルの最大数から 1 を引いたものをフェイス F の次元といい, k -フェイスと表現する. 0-フェイス, 1-フェイス, 2-フェイスをそれぞれ, **頂点**, **枝**, **面**という. 頂点, 枝, 面の例を図 2 に示した. また, 多面体 P 自身もフェイスであり, その次元を多面体の次元といい $\dim(P)$ と表す. 以降, 本稿で扱う凸多面体は, 特に断りのない限り有界な 3 次元凸多面体であるとする.

さて, このように定義された凸多面体の展開図を考えよう. 3 次元凸多面体の展開図とは, 平易な言葉で次のように説明できるであろう.

例えば, 中が空洞な紙の凸多面体の模型があったとする. 多面体の枝の部分をいくつか切り開いて, 面を残った枝にそって開く. すべての面が一つの平面に開かれたとき, 一つつながりの平面図形を展開図という.

ただやみくもに枝を切り開けばよいのではなく, 切る枝を選ぶには以下の 3 つに注意しなければならない.

(1) すべての頂点において, 少なくとも一つは切る枝が接している (さもないと, その頂点のまわりで展開できない).

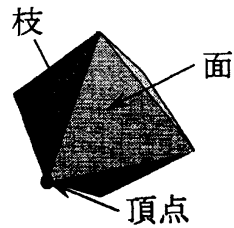


図 2: 各フェイスの名称

- (2) 切る枝が巡回路を形成していない (さもないと, 巡回路に沿って図形が離れてしまう).
- (3) 切る枝が連結している (さもないと, 多面体全体で展開できない).

上の条件を満たす枝の集合は, 多面体の骨格 (スケルトングラフ) の全張木 (spanning tree) である. つまり, 展開図の同型性を無視すれば, 展開図と多面体のスケルトングラフの全張木は 1 対 1 に対応する. 図 3 に, 正 8 面体の全張木 2 つとそれに対応する展開図を示した.

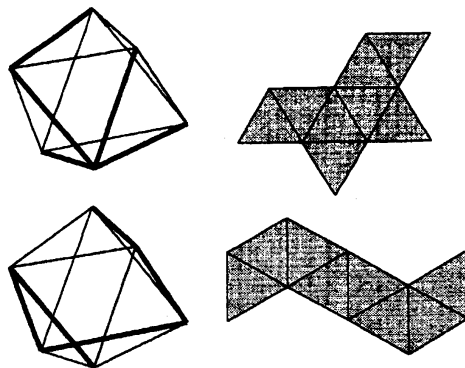


図 3: 正 8 面体の全張木 2 つとそれぞれに対応する展開図

3 次元凸多面体のスケルトングラフが平面的であることと, 平面的なグラフの双対グラフを考え併せれば, 展開図は面の隣接関係を表すグラフの全張木と考えることもできる (図 4).

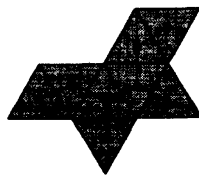


図 4: 正 8 面体の展開図, 面の隣接関係の木

3 次元凸多面体に関する以下の 2 つの問題を考えてみよう.

(1) どんな 3次元凸多面体も、どんな展開の仕方をしてしても展開図は重ならないか？

(2) 一つの展開図から組み立てられる 3次元凸多面体は一意か？

問題の重要性はさておき、上の二つはいずれも No である [7]. 図 5 は (1) の面の数が最小の反例である. 図 6 は (2) の反例である. a と b を重ねる場合, a と c を重ねる場合の二通りの多面体が構成される.

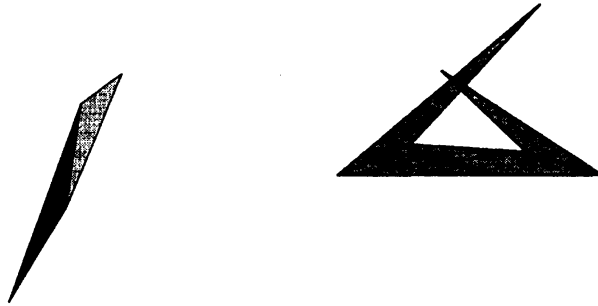


図 5: 展開図が重なる最小の多面体と展開図

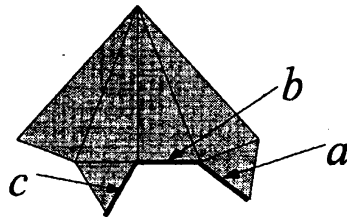


図 6: 二つの多面体から展開図が構成できる例

特に (1) の反例である図 5 の多面体は、筆者の一人が開発した、Mathematica パッケージ UnfoldPolytope [9] を使って経験的に得られた重なりを持つ展開図の特徴を取り出し、面の数が最小の 4 面体に作り変えたものである。筆者の一人並木は、この発見に歓喜していたが、ほどなく文献 [4] によりすでに発見済みであることが確認された。

いずれにせよ、3次元凸多面体の展開図に関しては、次の二つの問題が未解決問題として大きく立ちだかっている。

(3) どんな 3次元凸多面体も、重ならない展開図を持つか？

(4) もし (1) が Yes であったとしたら、そのような展開図を作る (全張木を作る) アルゴリズムは存在するか？

本研究では、Mathematica と呼ばれる数式処理ソフトウェア (Wolfram Research Inc.) を用いた計算実験を行い、これらの未解決問題に実験的にアプローチする。

2 テスト多面体

本稿の実験では,

1. いくつかの種類の多面体を乱数を用いて生成し,
2. いくつかの簡単な方法で実際に展開して,
3. 展開図が重ならないかどうか確かめる.

という簡単な手順を踏む. 実験に利用するソフトウェア及びそれに付随するパッケージソフトウェアを以下に記す.

- Mathematica 2.0 or higher (数式処理ソフトウェア, ベースになる実験の環境である).
- UnfoldPolytope 1.0 [9] (Mathemaitca パッケージ, 展開図の作成, 重なり判断に用いる).
- VertexEnumeration 0.41 [6] (Mathemaitca パッケージ, 多面体の頂点の計算)
- Combinatorica [10] (Mathematica add on パッケージ, 木の生成)

まず, 実験に用いる多面体の種類について説明しよう. そのために多面体の双対性と極性を導入しておく.

P と Q を凸多面体とし, V_P, E_P, F_P を P の頂点, 枝, 面の集合とし, $V_Q, E_Q,$ を Q の頂点, 枝, 面の集合とする. このとき, 以下の4つが成り立つならば凸多面体 P と Q は互いに双対の関係にあると言う.

- (1) V_P から F_Q に1対1, 上への写像 ϕ が存在し,
- (2) E_P から E_Q に1対1, 上への写像 ψ が存在し,
- (3) F_P から V_Q に1対1, 上への写像 θ が存在し,
- (4) V_P の点 u, v が E_P の枝 e で隣接している $\Leftrightarrow F_Q$ の面 $\phi(u)$ と $\phi(v)$ が F_Q の枝 $\psi(e)$ を共有する
- (5) F_P の面 f, g が E_P の枝 e を共有する $\Leftrightarrow V_Q$ の面 $\theta(f)$ と $\theta(g)$ が F_Q の枝 $\psi(e)$ で隣接している.

例えば, 正4面体は正4面体自身と, 正6面体は正8面体と, 正12面体は正20面体と双対の関係がある. 双対の関係は, 組み合わせてきな性質のみ(点, 枝, 面の包含関係)に着目したものであるが, 次に導入する極性は, 幾何学的な性質にも着目した概念である.

P を凸多面体とする. P の極多面体を P^* で表し次のように定義する.

$$P^* = \{y \in R^d | x^T y \leq 1, \forall x \in P\}$$

多面体 P とその極多面体 P^* は, もし P が原点をその内点に含むならば, 互いに双対の関係にあることが知られている [2]. その性質を利用して, 有限個の半空間の共通部分として表されている多面体から有限個の点の凸包として表されている多面体を計算する端点列挙のアルゴリズムが開発されている.

さて, 準備が整ったので実験に用いる多面体の種類を説明しよう. 本稿では, 次に示すような乱数により発生させた3種類の多面体とその極多面体, 計6種類を取り扱う.

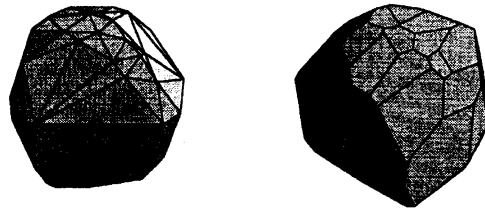


図 7: 単位球面上の 50 個の点の凸包とその極多面体

- 単位球面上の 50 個の点の凸包とその極多面体 (図 7). 単位球面上であるので, 発生させた点はすべて頂点となる. どの 4 頂点も同一平面上に乗らない. どの面も単体 (この場合三角形) になっている. 極多面体は, 原点から等距離にある張平面で切り取った多面体となり, どの 4 平面も同一の頂点で交わることはない (退化していない).
- 単位立方体中の 100 点の凸包とその極多面体 (図 8). 単位立方体内に発生させるので, 発生

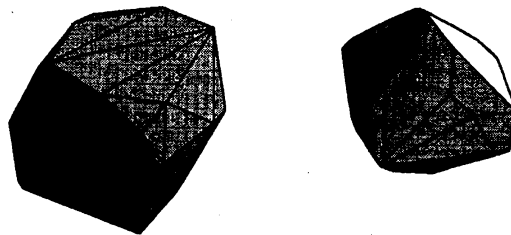


図 8: 単位立方体中の 100 個の点の凸包とその極多面体

させた全ての点が頂点になるとは限らない. 乱数を用いているので, どの 4 点も同一平面上に乗らない. したがって, 全ての面は単体 (この場合三角形) を形成している. 極多面体においては, どの 4 つの面も一つの頂点で交わることはない (退化していない).

- Zonotope とその極多面体 (図 9). ここで, Zonotope とはどのような多面体かを説明しよう. d 次元中の n 個からなる集合を $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} (v_i \in R^d, i = 1, 2, \dots, n)$ とする. V を母点とする Zonotope $Z(V)$ とは, 次の式で定義される凸多面体である.

$$V(Z) = \text{conv}\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots, \alpha_n v_n \mid \alpha_i = \pm 1, \forall i\}.$$

つまり, ベクトルの集合とそれらを反転したベクトルの集合の和を, 集合内のベクトルの方向に平行移動して得られたベクトル全体の凸包である. 図にあるように, 各面は平行四辺形を形成している. 多面体の頂点になるかどうか判断を要する点は, 点の集合の凸包を計算するため n の指数関数的に増えていき, 頂点かどうかの計算に多くの時間が必要となるため, 実験では $n = 7$ とした.

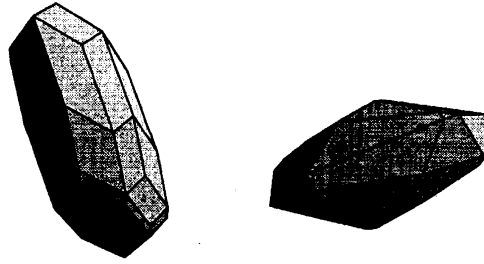


図 9: Zonotope とその極多面体

表 1: テスト多面体の情報

| テスト多面体 | 頂点の数 | 枝の数 | 面の数 |
|-----------------------|--------|--------|--------|
| 球面上の 50 点の凸包 | 50 | 144 | 96 |
| 球面上の 50 点の凸包の極多面体 | 96 | 144 | 50 |
| 単位立方体中の 100 点の凸包 | 31(平均) | 87(平均) | 58(平均) |
| 単位立方体中の 100 点の凸包の極多面体 | 60(平均) | 90(平均) | 32(平均) |
| Zonotope | 44 | 84 | 42 |
| Zonotope の極多面体 | 42 | 84 | 44 |

表 1 に、発生させた多面体の頂点、枝、面の数をまとめた。単位立方体中の 100 点の凸包とその極多面体では、多面体ごとにそれらの数が異なるので、平均を記した。

3 展開の仕方

3次元凸多面体の展開図を一つ作ることは、同型性を無視すれば多面体のスケルトングラフの全張木を一つ作ることに等しい。この節では、多面体のスケルトングラフにおける単純な木の作り方をいくつか紹介する。いずれもグラフ理論等でおなじみの木であったり、またそれらを少しだけ改良して得られる木であったりする。以下にスケルトンにおける木の様子とそれらの木で展開した場合の展開図を、同一の多面体に対して図示することによって特徴を示す。

- (1) **幅優先探索木** (図 10). スケルトングラフで幅優先探索を行った場合に得られる全張木である。この全張木は、多面体の頂点の座標などの量的な性質はほぼ関係なく、組み合わせ的な性質にのみ依存する。また、幅優先探索を始める頂点の選択に自由度がある。この実験では、始点はランダムに選んだ。量的な性質は反映されていない展開図である。しいて言えば、上下左右バランスよく広がっている展開図である。
- (2) **最小木** (図 11). 枝の長さの総和が最小となる木である。自由度はない。切る部分の長さの総和を最短にした展開図である。図中で、黒い太線が疎であることがわかる。
- (3) **最大木** (図 12). 枝の長さの総和が最大となる木である。最小木と同様、自由度はない。切る

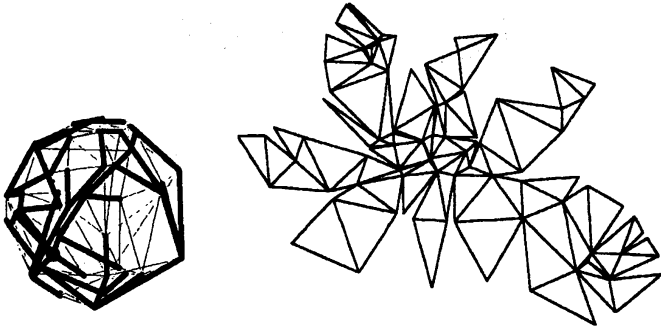


図 10: 幅優先探索木による展開

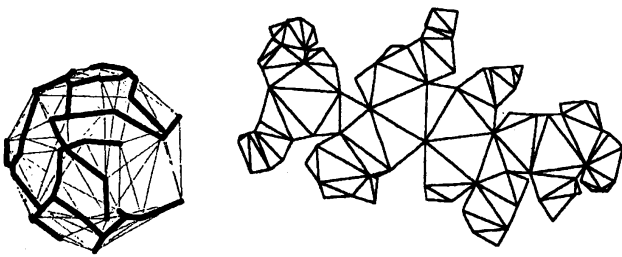


図 11: 最小木による展開

部分の長さを最長にした展開図である。図中で、黒い太線が密になっていることがわかる。

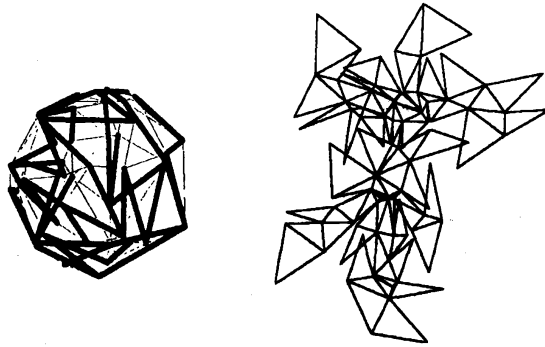


図 12: 最大木による展開

- (4) **最短路木** (図 13). ある一つの頂点, ルートからすべての点への最短路を表す木である。ルート
の選び方に自由度がある。この実験では、ランダムに選んだ。展開図の切り口は直線に近い。

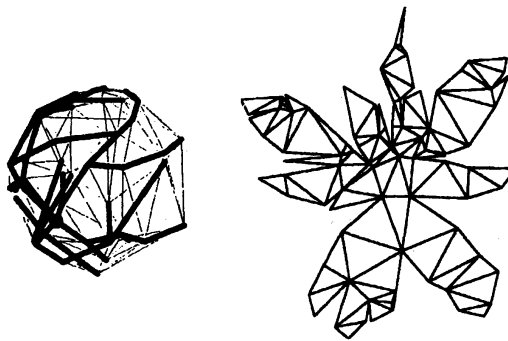


図 13: 最短路木による展開

- (5) **最急木** (図 14). 最急木 (Steepest Spanning Tree) 枝のベクトルを v , c を 0 でない任意の 3
次元ベクトルとする。枝の長さの代わりに $\frac{|\langle c, v \rangle|}{\|c\| \|v\|}$ を枝の重みとして最大木を求める。ベク
トル c との角度が小さいものから順に全張木の候補となる。
- (6) **最緩木** (図 15). 最緩木 (Loosest Spanning Tree) 枝のベクトルを v とし, c を 0 でない任
意の 3 次元ベクトルとする。枝の長さの代わりに $\frac{|\langle c, v \rangle|}{\|c\| \|v\|}$ を枝の重みとして最小木を求める。
ベクトル c との角度が 90 度に近いものから順に全張木の候補となる。

4 実験結果, まとめと今後の課題

第 2 で導入したテスト多面体に対してそれぞれ 100 個ランダムに生成し, それらを展開し, 展
開図が重なっていないかどうか調べた結果を表 2,3 に示す。それぞれ展開図自身が重なっていない
ものの割合を記入した。

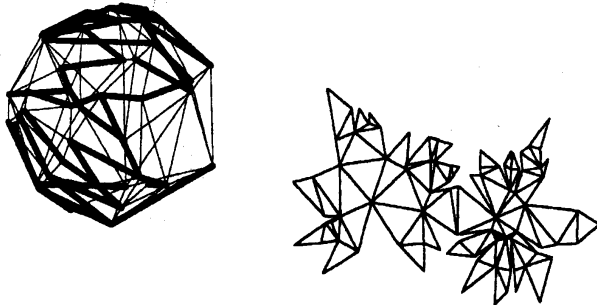


図 14: 最急木による展開

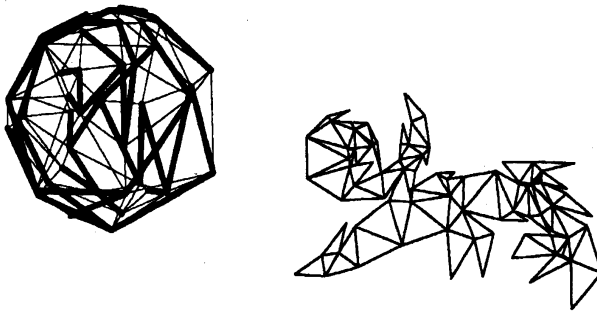


図 15: 最緩木による展開

表 2: 実験結果 (1): 重ならなかった展開図の割合

| テスト多面体 | 幅優先探索木 | 最小木 | 最大木 |
|-----------------------|--------|-----|-----|
| 球面上の 50 点の凸包 | 80% | 95% | 0% |
| 球面上の 50 点の凸包の極多面体 | 5% | 83% | 1% |
| 単位立方体中の 100 点の凸包 | 82% | 91% | 1% |
| 単位立方体中の 100 点の凸包の極多面体 | 20% | 75% | 1% |
| Zonotope | 50% | 21% | 14% |
| Zonotope の極多面体 | 72% | 93% | 2% |

表 3: 実験結果 (2): 重ならなかった展開図の割合

| テスト多面体 | 最短路木 | 最急木 | 最緩木 |
|-----------------------|------|-----|-----|
| 球面上の 50 点の凸包 | 99% | 16% | 1% |
| 球面上の 50 点の凸包の極多面体 | 38% | 9% | 8% |
| 単位立方体中の 100 点の凸包 | 95% | 26% | 11% |
| 単位立方体中の 100 点の凸包の極多面体 | 63% | 31% | 21% |
| Zonotope | 30% | 40% | 24% |
| Zonotope の極多面体 | 95% | 85% | 65% |

残念ながら、どの開き方でも 100%にはならなかった。つまり、このような単純な展開の仕方では、重ならないように展開できるとは限らないということである。しかしながら総じて言えることは、Zonotope 以外の多面体では、切る枝の長さの総和が少なければ少ないほど重なる率は低くなっている。このことは、文献 [1] にあるように、多面体の枝ではなく、面上の最短路で展開 (star unfold) すれば重なることはない、という事実裏付けられるものかもしれない。

また、最急木と最緩木を比較すると若干ではあるが、最急木の方が重ならない率が高い。ある方向に沿って木を作るというのも今後の実験で考えねばならない展開の仕方の候補である。

Zonotope は他の多面体と比較すると展開図が重なり易いと言えるのかも知れない。どの方法で展開しても重ならない割合が高々 50% である。図 16 は、自分自身が重なる Zonotope の展開図である。黒い太線で描かれている面同士が重なっている。面同士のなす角が非常に小さい、すなわち複数の面がほぼ一平面を構成してしまっているため、それらの面が交わる点では重ならないように展開しにくいようである。もし、「どのような展開の仕方をしてしても重なってしまう」多面体が存在するのならば (未解決問題の反例である)、Zonotope に近い構造をしているのかも知れない。

当然これだけの実験では十分とは言えず、まだまだ展開の仕方やテスト多面体の種類を増やして実験する必要がある。理論的にも、4次元への拡張や無限個の点の凸包への拡張なども考えられるが、今後の課題としたいところである。

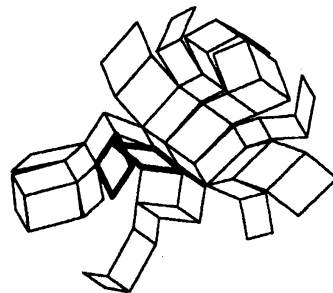


図 16: Zonotope の展開図:重なる例

参考文献

- [1] B. Aronov & J. O'Rourke, Nonoverlap of the Star Unfolding, Symposium on Computational Geometry 1991: 105-114

- [2] H. Edelsbrunner, Algorithms in Combinatorial Geometry, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1987.
- [3] H.M.S. Coxeter, Regular Polytopes, Dover Publication Inc., New York, 1973.
- [4] H.T.Croft, K.J.Falconer & R.K. Guy, Unsolved Problems in Geometry, Springer Verlag, Reissue edition, January 1995.
- [5] B. Grunbaum, Convex Polytopes, John Wiley & Sons, New York, NY, 1967.
- [6] K. Fukuda & I. Mizukoshi, Vertex Enumeration Package for Convex Polytopes and Arrangements, Version 0.41 Beta, 1994, available on
<http://www.ifor.math.ethz.ch/~fukuda/fukuda.html>.
- [7] K. Fukuda, Strange Unfoldings of Convex Polytopes,
http://www.ifor.math.ethz.ch/~fukuda/unfold_home/unfold_open.html.
- [8] 一松信, 正多面体を解く, 東海大学出版会, 1983.
- [9] M. Namiki, Unfold Polytope: A Mathematica package for drawing unfoldings of 3D convex polytopes, Version 1.0, 1994 available on
http://www.is.sci.toho-u.ac.jp/~namiki/unfold/unfold_open.html.
- [10] S.S. Skiena, Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica, Addison-Wesley Publishing Co., 1990.