数理解析研究所講究録 1341 巻 2003 年 112-119

Radial limits of univalent functions

東京電機大工　鶴見和之 (Kazuyuki Tsurumi)
Faculty of Technology, Tokyo Denki University
日本大薬　関根忠行 (Tadayuki Sekine)
College of Pharmacy, Nihon University

§1 序論

$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,
H : $\mathbb{U}$ で正則な函数の集合,
S : 単葉な函数 $f \in H$ で, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ となるものの全体とする. また, $f \in H$ に対して
$E_\infty(f) := \{e^{i\theta} \mid \lim_{r\to 1-0} |f(r^{i\theta})| = \infty\} \subset \partial\mathbb{U}$ とおく.

我々の興味は単葉函数 $f \in S$ の境界挙動である. 特に, $f \in S$ に対して, 次の様な問題が考えられる:

1. $E_\infty(f)$ の capacity $\mathrm{cap}_\alpha E_\infty(f) = 0$?
2. 集合 $E_\infty(f)$ は円周上で nowhere dense であるか?
3. その他 $E_\infty(f)$ はどんな集合か?
4. 単位円周上の $f \in S$ の特異点の様子はどのようなものであるか?
5. $f \in S$ の導関数 f' について $E_\infty(f')$ どのようなことが言えるか?

本講では, これらのことに関して現在までに知られていることについて, まとめとし, 報告いたします.

本講で使う基本定理は次の 3 定理である.

定理 A. (Growth Theorem, [4], p33)
任意の $f \in S$ に対して, 次の式が成り立つ

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqq |f(z)| \leqq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z| = r < 1).$$

定理 B. (Distortion Theorem, [4], p.32)
任意の $f \in S$ に対して，次の式が成り立つ.

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqq |f'(z)| \leqq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

定理 C. (Prawitz's Theorem; [4], p.61, Th.2.22)
$f \in S$ とする. p $(0 < p < \infty)$ に対して，次の式が成り立つ.

$$M_p^p(r,f) \leqq p \int_0^r \frac{1}{t} M_\infty^p(t,f)dt \quad (0 < r < 1)$$

ここで，$f \in H$ に対して，

$$M_p(r,f) := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (0 < p < \infty),$$

$$M_\infty(r,f) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

§2 Radial limits of univalent functions

定理 1. (定理 C の系)
$S \subset H^p (p < 1/2)$ (Hardy 空間).

従って，この定理から，$E_\infty(f)$ の測度は 0 である.

補題. ([4], p.157)
$f \in S$ に対して，次の式が成り立つ.

$$\lim_{r \to 1-0} (1-r)^2 M_\infty(r,f) = \alpha \leqq 1.$$

(この α を f の Hayman index という).

証明 f の Growth theorem によって，次の式が得られる ([4], p.35).

$$\frac{1-r}{1+r} \leqq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leqq \frac{1+r}{1-r} \quad (|z| = r < 1).$$

(等式は Koebe 関数の回転のときである). f が Koebe 関数の回転でなければ,

$$\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f(re^{i\theta})\right| \leqq \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| \leqq \frac{1+r}{(1-r)r}$$

が成り立ち，r_1 から r_2 $(0<r_1<r_2<1)$ まで積分すると，

$$\log\left|\frac{f(r_2e^{i\theta})}{f(r_1e^{i\theta})}\right| \leqq \int_{r_1}^{r_2}\frac{1+r}{(1-r)r}dr = \log\frac{r_2(1-r_1)}{r_1(1-r_2)^2}.$$

言い換えると，$0<r_1<r_2<1$ に対して

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2}\left|f(r_2e^{i\theta})\right| < \frac{(1-r_1)^2}{r_1}\left|f(r_1e^{i\theta})\right| \ for\ \forall\theta. \tag{2.1}$$

θ を，$\left|f(r_2e^{i\theta})\right| = M_\infty(r_2,f)$ なるように選ぶ．そうすると，

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2}|M_\infty(r_2,f)| < \frac{(1-r_1)^2}{r_1}\left|f(r_1e^{i\theta})\right| \leqq \frac{(1-r_1)^2}{r_1}M_\infty(r_1,f).$$

これは，$r^{-1}(1-r)^2M_\infty(r,f)$ は r の減少関数であるから，極限値 $\alpha \geqq 0$ を持つ．また，Growth theorem によって，

$$\frac{(1-r_1)^2}{r_1}M_\infty(r_1,f) \leqq 1$$

であるから，$\alpha \leqq 1$ が導かれる．f が Koebe 函数ならば，任意の r に対して，上の不等式において，等号が成り立つ．従って，$\alpha=1$. f が koebe 函数でなければ，不等号 $(<)$ が成り立つ．よって，補題が成り立つ．

定理 2. ([4], p.158, Th.5.4)

$f\in S$ が Hayman index $\alpha>0$ ならば，次の様なただ一つの方向 $e^{i\theta}$ がある，即ち，

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^2\left|f(re^{i\theta})\right| = \alpha. \tag{2.2}$$

証明. $r_n \uparrow 1$ $(n=1,2,\cdots)$ とし，$\theta_n (0\leqq\theta_n<2\pi)$ を

$$\left|f(r_ne^{i\theta_n})\right| = M_\infty(r_n,f)$$

とする. そうすると，補題の (2.1) によって，$\forall r<r_n$ に対して

$$\alpha \leqq \frac{(1-r_n)^2}{r_n}\left|f(r_ne^{i\theta_n})\right| \leqq \frac{(1-r)^2}{r}\left|f(re^{i\theta_n})\right|.$$

$\{\theta_n\}$ の集積点を θ_0 とすると

 115

$$\alpha \leqq \frac{(1-r)^2}{r}\left|f(r_n e^{i\theta_0})\right| \leqq \frac{(1-r)^2}{r} M_\infty(r,f).$$

$r \to 1$ とすると，$((1-r)^2/r)M_\infty(r,f) \to \alpha$ だから，(1) 式が導かれる．θ_0 の一意性は Lebedev の不等式 ([4], p.125, Th. 4.3) から導かれる．

[注] (1) 定理 2 は $\mathbb{C}^n$ の単位球の単葉星型写像に対しても成り立つが，θ_0 の一意性は成り立たない．また、一般の単葉写像については，定理 2 は成り立たない．

(2) $\mathrm{cap}_\alpha E_\infty(f) = 0$ $(f \in S, \alpha = 0, 1)$ かどうかはわからない．

§3 単葉関数 f の導関数 f' の境界挙動

次の定理 3 の証明は $f'(z)$ が normal であるという事実による．正則函数 $g(z) \in H$ が normal であるとは

$$\sup_{z\in\mathbb{U}} \frac{1-|z|^2|g'(z)|}{1+|g(z)|^2} < \infty$$

となるときである．

定理 3. ([6], p.116, Th.1)

$f \in S$ とする．$f'(z)$ が analytic limits を持つ様な単位円周上の点の集合は非可算である．

証明. $f'(z)$ は $\mathbb{U}$ 上で，normal であるから，$\partial\mathbb{U}$ 上の dense な集合上で radial limit を持つ．さらに，$f'(z)$ が $\partial\mathbb{U}$ 上の測度 0 の densse な集合において radial limit をもつ場合に制限しない．$\mathbb{U}$ で $f'(z) \neq 0, \infty$ であるから任意の自然数 n に対して開集合 $H_n := \{z \mid |f'(z)| < 1/n\}$ の全集合 G_n は単連結である．さらに，∂G_n と $\partial\mathbb{U}$ との共通部分 M は空ではない．いま，$M = M_a \cup M_i$ とおく，ここで M_a は G_n から accessible である様な M の点全体とし，M_i を G_n から accessible でない点の集合とする．$z = g(t)$ を $\{|t| < 1\}$ から G_n への等角写像とすると，$g(t)$ の radial limit は $|t| = 1$ 上ほとんど到るところ存在する．ゆえに，$|t| < 1$ のほとんどすべての半径は G_n の accessible な境界上に移される．言い換えると，G_n の非 accessible な境界点は $|t| = 1$ 上の測度 0 の集合に対応するから，集合 M_i は G_n に関して調和測度 0 の集合である．ここで，領域 G_n に Fatou の定理 ([11], p.139) を適用して，M_a は linear measure 0 であることがわかる． また，Carleman の原理により，M_a は G_n に関して harmonic measure 0 の集合である．故に， $M = M_a \cup M_i$ は harmonic measure 0 の集合である．また，G_n は H_{n+1} の少なくとも一つの連結成分をふくむ．従って，与えられた連結成分から始まり、連結成分列

$$G_n \subset G_{n+1} \subset \cdots$$

が得られる．そして，それらの終点が $|z| = 1$ 上にある折線 L がとれ，折線 L に沿って $f'(z)$ が 0 に収束するようにできる．そして，路 L の終点 E は一点になる．次に，G_n の任

意の連結成分を再び G_n と書き，$z=g(t)$ を $|t|<1$ から単連結領域 G_n への等角写像とする.M を $|z|=1$ と ∂G_n との共通部分とすると，M は G_n に関して，halmonic measure 0 の集合で，$|f'(z)|$ は，$|z|<1$ 内の ∂G_n のすべての点で，絶対値 $1/n$ であるから，函数 $F(t):=nf'(g(t))$ は $|t|<1$ で正則，有界であり，$|F(t)|<1$ である. また，$|t|=1$ 上ほとんど到るところ絶対値 1 の radial limit を持つ. また，$|t|<1$ で $F(t)\neq 0$ だから, 次の表現を得る.

$$F(t)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\xi}+t}{e^{i\xi}-t}d\mu(\xi)+i\alpha\right\}. \tag{3.1}$$

ここで，$\mu(\xi)$ は $\mu'(\xi)=0$ $a.e$ である単調非増加函数で，α は実定数である. このとき，$\mu(\xi)$ の特異点の集合は完全集合である. なぜならば，$\mu(\xi)$ の特異点の集合が完全でないとすると，$\mu(\xi)$ は少なくとも一つの孤立特異点を持つ. これを $\xi=0$ とする. いま，$|t|<1$ の半径に沿って, 点 $t=1$ まで，t を動かすと,

$$|F(t)|=O\left\{\exp\left(\frac{|t|+1}{|t|-1}\right)\right\}. \tag{3.2}$$

$z=g(t)$ によって，この半径は $f'(z)$ が 0 に収束するものに沿った $|z|=1$ 上の点 P を終点とする G_n 内の路に onto に写される. そして，$f'(z)$ は normal であるから，P の Stalz 角領域において，$f'(z)$ は一様に 0 に収束する. いま，$F(t)=nf'(z)g'(t)$ に Koebe の歪曲定理を適用して，(3.2) によって与えられた速さで $|f'(z)g'(t)|$ は 0 に収束しない. 故に，$\mu(\xi)$ は孤立特異点を持たない.「連続，非定数，特異函数 (singular function) は非可算集合上で ∞ となる導関数を持つ」(これは良く知られているらしい？). これより非可算集合 A 上で $\mu'(\xi)=-\infty$. 半径 r に沿って，この集合 A の任意の点に結ぶと，$F(t)$ は 0 に近づく.$z=g(t)$ によるこれらの半径の像は，$f'(z)$ が 0 に収束する路に沿って $|z|=1$ 上の点に終わる G_n 内の路である. 故に，$f'(z)$ の analytic limit として, 0 をとる. $|z|=1$ 上の点集合は非可算である. したがって，定理が成り立つ

Q.E.D.

[注] $f\in H$ とする. f が analytic limit $a\in\mathbb{C}$ at $\xi\in\partial\mathbb{U}$ を持つとは，ξ における任意の Stalz 角領域 $\triangle$ に対して

$$f(z)\longrightarrow a \quad as \quad z\longrightarrow\xi,\ z\in\triangle$$

となることである.

さらに，次の定理が成り立つ：

定理 4. ([6], p.118, Th.2)

$f \in S$ とし，$f'(z)$ が $\partial\mathbb{U}$ 上の測度 0 の集合上でのみ radial limit values を持つとする．そうすると，$\partial\mathbb{U}$ の任意の点は，$f'(z)$ が radial limit として 0 を持つ $\partial\mathbb{U}$ 上の点集合上の集積点である．

定義. 点列 $\{z_k\} \subset \mathbb{U}$ が函数 $g \in H$ の α-values $(\alpha \in \mathbb{C})$ であるとは，$g(z_k) = \alpha$ となるときである．

α-values の列 $\{z_k\}$ が Blaschke 条件をみたすとは

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |z_k|) < \infty$$

となるときである．

定理 5. ([6], p.119, Th.3)

$f \in S$ とし，$f'(z)$ が $\partial\mathbb{U}$ 上の測度 0 の集合上でのみ radial limit values を持つとする．$\alpha \in \mathbb{C}$ とし，点列 $\{z_k\}$ が $f'(z)$ の α-values で，Blaschke 条件をみたすとする．このとき，α は $\partial\mathbb{U}$ の任意の弧上で $f'(z)$ の analytic limit values である．

また，問題 (5) に関連して，

定理 6. ([3], p.592)

次の様な函数 $f(z) \in H$ と集合 $E \subset \partial\mathbb{U}$ が存在する．すなわち，E は正の logarithmic capacity を持ち，$e^{i\theta} \in E$ に対して

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^{\frac{1}{2}}\left|f'(re^{i\theta})\right| = \infty.$$

定理 7. ([3], p.364)

$\lambda > 0$ に対して，次の様な $A_\lambda > 0$ がとれる．すなわち，$f \in H$ ならば

$$\int_0^{2\pi}\left|\log|f'(re^{i\theta})|\right|^\lambda d\theta \leqq A_\lambda\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

定理 8. ([3], p.366)

次の条件 (1), (2) を満たす $f \in H$ が存在する．すなわち，

$$\int_0^{2\pi}\left|\log^+|f'(re^{i\theta})|\right|^\lambda d\theta \geqq B_\lambda\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\lambda}{2}}, \tag{3.1}$$

$$\int_0^{2\pi}\left|\log^-|f'(re^{i\theta})|\right|^\lambda d\theta \geqq B_\lambda\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\lambda}{2}}. \tag{3.2}$$

ここで，$0 \leqq r < 1, \lambda > 0, B_\lambda > 0$.

定理 9. ([3], p.368)
$f \in S$, $\gamma > 1/2$ ならば，ほとんどすべての θ に対して

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{\log|f'(re^{i\theta})|}{(\log\frac{1}{1-r})^{\gamma}} = 0.$$

定理 3～9 が $\mathbb{C}^n$ の単位球の正則単葉写像に拡張できるかどうかはわからない．また，特に星型写像にどうかもわからない．

単葉函数の境界挙動について，まとまった本としては Pommerenke[11] であり，種々の事実が述べられているが，まだまだ不明な点もある．また，本講で述べなかった用語，定義については Pommerenke の本を参照していただきたいと思います．また，capacity, linear measure については Hayman[5] の本が有用である．

参考文献

[1] F.Baugemihl and W.Seidel, Some properties of analytic functions, *Math. Zeits.*, **61**(1954), 186-199.

[2] A.Beurling, Ensembles exceptionnels, *Acta Math.*, **72**(1940), 1-13.

[3] J.G.Clunie and T.H.MacGregor, Radial growth of the derivative of univalent functions, *Comm. Math. Helv.*, **59**(1948), 362-375.

[4] P.Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag (1983).

[5] W.K.Hayman and P.B.Kennedy, Subharmonic Functions, I, Academic Press(1976).

[6] A.J.Lohwater, The boundary behavior of derivatives of univalent functions, *Proc. Math. Zeits*, **119**(1971), 115-120.

[7] A.J.Lohwater and G.Piranian, On the derivative of a univalent functions, *Proc. A.M.S.*, **4**(1953), 591-594.

[8] A.J.Lohwater, G.Piranian and W.Rudin, On the derivative of a schlicht function, *Math. Scand.*, **3**(1955), 103-106.

[9] T.H.MacGregor, Radial growth of a univalent function and its derivative off sets of measure zero, *Contemporary Math.*, **38**(1985), 65-96.

[10] R.Nevanlinna, Eindeutige Analytische Funktionen, Springer-Verlag (1936).

 119

[11] Ch.Pommerenke, Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag (1992).

[12] W.Seidel and J.L.Walsh, On the derivatives of functions analytic in the unit circle and their radii of univalence and p-valence, *Trans. A.M.S.*, **52**(1942), 128-216.