数理解析研究所講究録 1342 巻 2003 年 24-34

$SO_o(2,q)$ のクラス 1 主系列表現に対する球関数について

東大数理　石井 卓 (Taku Ishii / ishii@ms.u-tokyo.ac.jp)

§1. Introduction

本稿では [6], [7] において得られた，IV型対称領域上の波動形式の Fourier 展開に現れる一般化された球関数の明示公式について述べる.

G を実簡約リー群, K を G の極大コンパクト部分群, Γ を G の数論的部分群とする. さらに $\mathfrak{g}$ を G のリー環, $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ を $\mathfrak{g}$ の複素化の普遍包絡環とし, $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ をその中心とする. このとき G 上の C^∞ 関数 f が Γ に関する保型形式であるとは, 次の 3 条件を満たすこと: (1) f は左 Γ 不変かつ右 K 有限, (2) f は右 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ 有限, すなわち $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の余次元有限の右イデアルの作用で消える, (3) カスプで多項式増大. 条件 (1) で特に f を右 K 不変とするとき, 条件 (2) は例えば f が G/K の G 不変微分作用素の同時固有関数になる, あるいは f が右移動で G のクラス 1 主系列表現を生成する, と言い換えられこのような保型形式を波動形式という.

次に一般化された球関数について簡単に述べる. π を G の既約認容表現とする. G の部分群 R とその平滑な既約表現 η を取り, 絡作用素の空間 $\mathrm{Hom}(\pi, C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\eta))$ に対して次のような問題を考える: (1) $\mathrm{Hom}(\pi, C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\eta))$ は有限次元か？さらにある増大条件を課したときに 1 次元以下となるか？(2) $\mathrm{Hom}(\pi, C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\eta))$ の元 Φ に対して, $\mathrm{Im}(\Phi)$(あるいは, $v\in\pi$ を固定して $\Phi(v)$) という G 上の関数 (＝一般化された球関数) の明示公式を求めよ.

これらの問題は保型形式のアルキメデス素点における理論と深くかかわってくる. 最もよく研究されてきたのは, R が G の極大べき単部分群で η がそのユニタリ指標の場合である. f を π に属する Γ に関する保型形式とする. このとき,

$$a_\eta^f(g) = \int_{(R\cap\Gamma)\backslash R} f(rg)\eta(r)^{-1}dr$$

(Fourier 係数) とおくと,

$$f(rg) = \sum_{\eta,\,\eta|_\Gamma\equiv 1} a_\eta^f(g)\eta(r) + (\text{指標以外の表現に対する展開項})$$

という Fourier 展開を得る. f の満たすべき微分方程式から, $a_\eta^f(g)$ はある微分方程式を満たし, 適当な増大条件のもとその解空間が 1 次元になることがある. すなわち $a_\eta^f(g) = a_\eta^f W_\eta(g)$ と書ける (定数 a_η^f が Fourier 係数). この $W_\eta(g)$ あるいは, $a_\eta^f(g)$ の満たす微分方程式の解が一般化された球関数であり, $G = SL(2,\mathbf{R})$ の場合に古典的な Whittaker 関数が現れることから, Whittaker 関数と言われる.

例えば $G = SL(2,\mathbf{R})$ として, Maass wave form の Fourier 展開を考えよう.

$$R = \left\{ n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \eta(n(x)) = e^{2\pi\sqrt{-1}cx} \quad (c\in\mathbf{R})$$

とし, $g = n(x)\begin{pmatrix}\sqrt{y} & \\ & 1/\sqrt{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ によって G に座標を入れる. f を Maass wave form つまり,

$$-y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)f(g) = \frac{1-\nu^2}{4}f(g) \quad (\nu \in \mathbf{C})$$

となる $\Gamma = SL(2,\mathbf{Z})$ に関する保型形式とすると, Fourier 係数 $a_\eta^f(g)$ ある 2 階の微分方程式を満たし, それを解くことで

$$f(g) = ax^{(\nu+1)/2} + bx^{(-\nu+1)/2} + \sum_{c\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} a_c^f\sqrt{y}K_{\nu/2}(2\pi|c|y)\eta(n(x))$$

という Fourier 展開を得る (K_ν は変形された Bessel 関数). なお, f が重さ k の Maass form である場合には, 上の展開において球関数 $\sqrt{y}K_{\nu/2}(2\pi|c|y)$ は $W_{k/2,\nu/2}(4\pi|c|y)$ となり Whittaker 関数が現れることを注意しておく. 本稿の目的は上の Fourier 展開の IV 型領域への拡張を考えることである.

§2. $SO_o(2,q)$ の構造, クラス 1 主系列表現

(2.1) $SO_o(2,q)$ の構造

$$G = SO_o(2,q) = \left\{ g \in SL(2+q,\mathbf{R}) \,\middle|\, {}^tg1_{2,q}g = 1_{2,q} = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}\right\}^\circ,$$

($^\circ$ は単位元の連結成分を取ることを意味する) の構造について復習する. G の極大コンパクト部分群は

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, k_1 \in SO(2),\, k_2 \in SO(q)\right\}.$$

G の Lie 環は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,q) = \{X \in M(2+q,\mathbf{R}) \mid {}^tX1_{2,q} + 1_{2,q}X = 0\}$$

で, その Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とかくと,

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, X_1 = -{}^tX_1 \in M(2,\mathbf{R}),\, X_2 = -{}^tX_2 \in M(q,\mathbf{R})\right\},$$
$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ {}^tX & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, X \in M(2,q,\mathbf{R})\right\}.$$

$\mathfrak{p}$ の極大可換部分代数 $\mathfrak{a} = \mathbf{R}A_1 + \mathbf{R}A_2$ $(A_1 = E_{1,q+2} + E_{q+2,1}, A_2 = E_{2,q+1} + E_{q+1,2})$ を固定し, $\mathfrak{a}$ 上の linear form e_1, e_2 を $e_i(a_1A_1 + a_2A_2) = a_i$ で定め, $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H,X] = \alpha(H)X,\ \forall H \in \mathfrak{a}\}$ とおくと, 制限ルート系は

$$\Delta = \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_1 \pm e_2\}.$$

Δ の正系として $\Delta^+ = \{e_1, e_2, e_1 \pm e_2\}$ を固定する．各ルート空間は

$$\mathfrak{g}_{e_1} = \oplus_{i=1}^{q-2} \mathbf{R} X_i,\quad \mathfrak{g}_{e_2} = \oplus_{i=1}^{q-2} \mathbf{R} Y_i,\quad \mathfrak{g}_{e_1-e_2} = \mathbf{R} Z_1,\quad \mathfrak{g}_{e_1+e_2} = \mathbf{R} Z_2,$$

$$\begin{aligned}
X_i &= E_{1,i+2} + E_{i+2,1} - E_{i+2,q+2} + E_{q+2,i+2},\\
Y_i &= E_{2,i+2} + E_{i+2,2} - E_{i+2,q+1} + E_{q+1,i+2},\\
Z_1 &= (-E_{1,2} - E_{1,q+1} + E_{2,1} - E_{2,q+2} - E_{q+1,1} + E_{q+1,q+2} - E_{q+2,2} - E_{q+2,q+1})/2,\\
Z_2 &= (-E_{1,2} + E_{1,q+1} + E_{2,1} - E_{2,q+2} + E_{q+1,1} - E_{q+1,q+2} - E_{q+2,2} + E_{q+2,q+1})/2
\end{aligned}$$

($E_{i,j}$ は行列単位). $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in\Delta^+} = \mathfrak{g}_{e_1} \oplus \mathfrak{g}_{e_2} \oplus \mathfrak{g}_{e_1+e_2} \oplus \mathfrak{g}_{e_1-e_2}$ とおくと, Iwasawa 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}$ を得る．また

$$\begin{aligned}
A &= \exp(\mathfrak{a}) = \{\exp(\log a_1\, A_1 + \log a_2\, A_2) \mid a_1, a_2 > 0\}\\
&= \left\{ a(a_1,a_2) = \left(\begin{array}{cc|c|cc}
c(a_1) & & & & s(a_1)\\
 & c(a_2) & & s(a_2) & \\ \hline
 & & 1_{q-2} & & \\ \hline
 & s(a_2) & & c(a_2) & \\
s(a_1) & & & & c(a_1)
\end{array}\right) \middle|\ a_1, a_2 > 0 \right\},
\end{aligned}$$

(ただし $c(a) = (a + a^{-1})/2$, $s(a) = (a - a^{-1})/2$), $N = \exp(\mathfrak{n})$ とおくと, $G = NAK$ という Iwasawa 分解を得る．また Δ の Weyl 群 W は $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \cong \mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

(2.2) クラス１主系列表現 $P_0 = MAN$ を G の極小放物部分群の Langlands 分解とする．$(M = Z_K(A) \cong SO(q-2))$ $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}, \mathbf{C})$, $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}(\dim \mathfrak{g}_\alpha)\alpha = \frac{q}{2}e_1 + (\frac{q}{2}-1)e_2$ に対して, $e^{\nu+\rho}$ という A の指標を $e^{\nu+\rho}(a(a_1,a_2)) = \exp((\nu_1 + \frac{q}{2})\log a_1 + (\nu_2 + \frac{q}{2} - 1)\log a_2)$ によって定める．誘導表現

$$\pi_\nu = L^2\text{-}\mathrm{Ind}_{P_0}^G(1_M \otimes e^{\nu+\rho} \otimes 1_N)$$

をクラス１主系列表現という．

§3. Whittaker 関数, Siegel-Whittaker 関数

ここでは (R, η) をどのように取るかについて説明する．Fourier 展開は G の放物部分群ごとにあり, 以下では (i) 極小放物部分群 P_0, (ii) Siegel 放物部分群 P_s という極大放物部分群に沿った展開を考える．

(3.1) P_0 に沿った展開, Whittaker 関数 §1 でも述べたように R を極大べき単部分群 N, η をそのユニタリ指標とする．η は $\sqrt{-1}(\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}])^*$ の元とみなせるので, $\eta|_{\mathfrak{g}_{e_2}}, \eta|_{\mathfrak{g}_{e_1-e_2}}$ で決まる $([\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = \mathfrak{g}_{e_1} \oplus \mathfrak{g}_{e_1+e_2})$. $\eta(Z_1) = 2\sqrt{-1}\eta_1$, $\eta(Y_i) = 2\sqrt{-1}\eta_{2,i}$ とおき, $\eta_2 = (\sum_{i=1}^{q-2}\eta_{2,i}^2)^{1/2}$ とする．以後, η は非退化, すなわち $\eta_1\eta_2 \neq 0$ と仮定する．

(3.2) P_s に沿った展開, Siegel-Whittaker 関数 Siegel 放物部分群 P_s の Levi 分解を $P_s = L_s \ltimes N_s$ とする．ここで,

$$L_s = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c}
a & & b\\ \hline
 & g_0 & \\ \hline
c & & d
\end{array}\right) \middle|\ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SO_o(1,1),\ g_0 \in SO_o(1,q-1) \right\},$$

$$
\begin{aligned}
N_s &= \exp(\mathfrak{g}_{e_1} \oplus \mathfrak{g}_{e_1+e_2} \oplus \mathfrak{g}_{e_1-e_2}) \\
&= \left\{ n_s(x) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1+x_0 & \tilde{x} & -x_0 \\ \hline {}^t x & 1_q & -{}^t x \\ \hline x_0 & \tilde{x} & 1-x_0 \end{array} \right) \;\middle|\; x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbf{R}^q \right\} \\
&\quad (x_0 = \tfrac{1}{2}(-x_1^2 + \textstyle\sum_{i=2}^q x_i^2),\ \tilde{x} = (-x_1, x_2, \ldots, x_q)).
\end{aligned}
$$

N_s のユニタリ指標 ξ を

$$
\xi(n_s(x)) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\textstyle\sum_{i=1}^q \xi_i x_i\right) \quad ((\xi_1, \ldots, \xi_q) \in \mathbf{R}^q)),
$$

によって定義し，しばしば ξ と $(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ を同一視する．($(R,\eta) = (N_s, \xi)$ と思って)，Γ に関する保型形式 f の P_s に沿った展開を考えると

$$
f(n_s g) = \sum_{\xi \in (N_s \cap \Gamma \backslash N_s)^\wedge} A_\xi^f(g)\,\xi(n_s) \quad (n_s, g) \in N_s \times G
$$

を得る．$G = P_s K = N_s L_s K$ という分解から，Fourier 係数 A_ξ^f は $L_s/(L_s \cap K)$ という 3 次元空間上の関数とみなせる．f が正則保型形式であるときには，Cauchy-Riemann の微分方程式から A_ξ^f は指数関数で書くことができる ($q=3$ の場合，古典的な Siegel 保型形式の Fourier 展開を得る) が，波動形式の場合，f の満たす微分方程式をこの 3 次元の空間に制限してもその解空間は無限次元になってしまう．即ち $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}(\pi_\nu, C^\infty \mathrm{Ind}_{N_s}^G(\xi)) = \infty$ となる．そこで A_ξ^f を，L_s の中で ξ を固定する部分群の単位元の連結成分 $SO(\xi)$ でさらに展開することを考える．

$$
\begin{aligned}
SO(\xi) &= \mathrm{Stab}_{L_s}(\xi)^\circ \\
&= \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & g_0 & \\ \hline & & 1 \end{array} \right) \;\middle|\; (\xi_1, \ldots, \xi_q) g_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_q),\ g_0 \in SO_o(1, q-1) \right\} \\
&\cong \begin{cases} SO(q-1) & \xi \text{ が定置，つまり } \xi_1^2 - \sum_{i=2}^q \xi_i^2 > 0 \text{ のとき，} \\ SO_o(1, q-2) & \xi \text{ が不定置，つまり } \xi_1^2 - \sum_{i=2}^q \xi_i^2 < 0 \text{ のとき．} \end{cases}
\end{aligned}
$$

以下 ξ が定置の場合のみを扱う．$SO(\xi) \cong SO(q-1)$ の有限次元既約表現 (χ, V_χ) を固定し，

$$
A_{\xi,\chi}^f(g) = \int_{SO(\xi)} A_{\xi,\chi}^f(sg) \cdot \chi(s) ds
$$

とおくと，A_ξ^f のフーリエ展開

$$
A_\xi^f(sg) = \sum_{\chi \in SO(\xi)^\wedge} \langle A_{\xi,\chi}^f(g), \chi^*(s) \rangle = \sum_{\chi \in SO(\xi)^\wedge} \sum_{i=1}^{\dim \chi} \langle A_{\xi,\chi,i}^f(g), \chi_i^*(s) \rangle,
$$

を得る．ここで χ^* は χ の反傾表現，$\langle\ ,\ \rangle$ は $V_\chi \times V_{\chi^*}$ の標準内積である．するとこのフーリエ係数 $A_{\xi,\chi,i}^f(g)$ は V_χ に値をとる 2 次元の空間 $SO(\xi) \backslash L_s/(L_s \cap K)$ 上の関数と見

なせ，先の偏微分方程式系をこの空間に制限すると解空間は有限次元 (8 次元) となることがわかる (cf. §5). よって,

$$R = SO(\xi) \ltimes N_s, \quad \eta = \chi \cdot \xi,$$

と取ればよい.

Remark 今の場合, 誘導表現 $\mathrm{Ind}_R^G(\eta)$ は, 山下博氏によって研究されている一般化された Gelfand-Graev 表現 ([15] など) と言われるものの特別な場合である. またこのタイプの球関数は $G = Sp(2, \mathbf{R})$ $(q = 3)$ の場合, 離散系列表現などの場合に宮崎琢也氏 ([8]), 主系列表現の場合には丹羽伸二氏 ([10]), 筆者 ([5]) によって, $G = SU(2,2)$ $(q = 4)$ の場合, 権寧魯氏 ([2]) によってその明示公式が与えられている. 以下扱うのは, 丹羽氏の結果の IV 型への拡張である. なお, ξ が不定値の場合には $SO(\xi)$ がコンパクトでないことに起因する困難が生じ, $q = 3$ の場合でも未解決である.

(3.3) 球関数の定義 v_0 をクラス 1 主系列表現 π_ν の K-fixed vector とする. (R, η) を (3.1), (3.2) のようにとったとき,

$$\{\Phi(v_0) \mid \Phi \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_{\nu,K}, C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\eta))\}$$

をそれぞれ $\mathrm{Wh}(\pi_\nu, \eta)$, $\mathrm{SW}(\pi_\nu, \eta)$ と書き, その元を (クラス 1 主系列表現 π_ν に対する)Whittaker 関数, Siegel-Whittaker 関数と呼ぶ. ここで $\pi_{\nu,K}$ は π_ν の K-finite vector 全体.

$c_\nu : Z(\mathfrak{g}_\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ を π_ν の無限小指標, C_2(カシミール元), C_4 を $Z(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ の 2 次, 4 次の生成元とし, さらに

$$C_\eta^\infty(R\backslash G/K) = \{f : G \to V_R,\ C^\infty \mid f(rgk) = \eta(r)f(g) \ \ \forall(r, g, k) \in R \times G \times K\}$$

(V_R は R の表現空間) とおくと上の一般化された球関数の空間は

$$\{f \in C_\eta^\infty(R\backslash G/K) \mid C_2 f = c_\nu(C_2)f,\ C_4 f = c_\nu(C_4)f\}$$

と等しくなる. また, 今の場合 $G = RAK$ という分解が成り立つことから f は A への制限 $f|_A$(f の動径成分という) で決まる. $C_2 f = c_\nu(C_2)f$, $C_4 f = c_\nu(C_4)f$ という微分方程式系を調べこの 2 変数関数の明示公式を求めることが課題となる.

§4. Whittaker 関数

クラス 1 主系列表現に対する Whittaker 関数についての一般論から次がわかる.

Proposition 4.1 $\nu_1, \nu_2, \nu_1 \pm \nu_2 \notin \mathbf{Z}$ とすると, $\dim_\mathbf{C} \mathrm{Wh}(\pi_\nu, \eta) = |W| = 8$. さらにその中で緩増加 (cf. [14]) となるものは 1 次元あって, その元は Jacquet 積分 (cf. [4], [3])

$$J_\nu^\eta(g) = \int_N a(s_0^{-1}ng)^{\nu+\rho}\eta(n)^{-1}dn$$

(の定数倍) で書かれる. ここで, $g = n(g)a(g)k(g)$ は $g \in G$ の Iwasawa 分解, $s_0 = 1_{2,q}$, dn は N のある正規化された Haar 測度.

(4.1) 偏微分方程式系 C_2, C_4 の明示公式 ([6, Proposition 3.1]) を用いて, Whittaker 関数の満たすべき偏微分方程式系を書き下すと,

Theorem 4.2 $f \in \mathrm{Wh}(\pi_\nu, \eta)$ を Whittaker 関数とする. A の座標として $y = (y_1, y_2) = (a_1/a_2, a_2)$ を導入し, $f|_A(y) = y_1^{q/2} y_2^{q-1} \phi(y)$ とおくと $\phi(y)$ は以下を満たす.

$$(1) \qquad [2\partial_1^2+\partial_2^2-2\partial_1\partial_2-8\eta_1^2y_1^2-4\eta_2^2y_2^2-(\nu_1^2+\nu_2^2)]\phi(y)=0,$$

$$(2) \qquad \begin{aligned}&[(\partial_2^2-2\partial_1\partial_2-\nu_1^2+\nu_2^2)(\partial_2^2-2\partial_1\partial_2+\nu_1^2-\nu_2^2)-16\eta_1^2y_1^2\partial_2^2\\ &-8\eta_2^2y_2^2(\partial_2^2-2\partial_1\partial_2-2\partial_1+2\partial_2+2)+16\eta_2^4y_2^4]\phi(y)=0.\end{aligned}$$

ここで, $\partial_i=y_i\frac{\partial_i}{\partial y_i}$.

(4.2) 級数解 Theorem 4.2 の微分方程式系の $y_1=y_2=0$ の周りでの級数解を求めると,

Theorem 4.3 $\nu_1,\nu_2,\nu_1\pm\nu_2\notin\mathbf{Z}$ とする.

$$\phi_{(\nu_1,\nu_2)}(y)=\sum_{m,n\geq 0}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m, & -n-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}, & n+\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+1\\ & \frac{\nu_1-\nu_2}{2}+1, & \frac{\nu_1+\nu_2}{2}+1\end{matrix}\,\middle|\,1\right)\frac{(|\eta_1|y_1)^{2m+\nu_1}(\eta_2y_2)^{2n+\nu_1+\nu_2}}{m!\,n!\,(\nu_1+1)_m(\nu_2+1)_n}$$

とおく. このとき, $\{\phi_{w(\nu_1,\nu_2)}(y)\mid w\in W\}$ は Theorem 4.2 の微分方程式系の解空間の基底をなす. ここで $(a)_k=\Gamma(a+k)/\Gamma(a)$,

$${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1, & \ldots, & a_p\\ b_1, & \ldots, & b_q\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{z^n}{n!}$$

は一般超幾何級数.

(4.3) Jacquet 積分 Jacquet 積分の動径成分を具体的に書き下すと,

$$\begin{aligned}J_\nu^\eta(a)&=(a_1a_2)^{\nu_1+3/2}\\ &\cdot\int_{\mathbf{R}^4}\Delta_1^{-\nu_1+\nu_2-1}\Delta_2^{-\nu_2-1/2}\exp\left(-2\sqrt{-1}(\eta_1n_3+\eta_2n_0)\right)dn_0dn_1dn_2dn_3.\end{aligned}$$

ここで, $a=a(a_1,a_2)$,

$$\begin{aligned}\Delta_1&=\{a_1^4a_2^2+n_3^2a_1^2a_2^4+2n_2^2a_1^2a_2^2+n_1^2a_1^2+(n_1n_3-n_2^2)^2a_2^2\}^{1/2},\\ \Delta_2&=a_1^2a_2^2+n_0^2a_1^2+(n_0n_3+n_2)^2a_2^2+(n_0n_2+n_1)^2.\end{aligned}$$

この積分を Proskurin による $Sp(2,\mathbf{C})$-Whittaker 関数の計算 ([12, pp.162-166]) と同様にして変形すると次のような積分表示を得る.

Theorem 4.4 Whittaker 関数の動径成分は, 定数倍を除いて,

$$\begin{aligned}W_{(\nu_1,\nu_2)}^\eta(a)&=\left(|\eta_1|\frac{a_1}{a_2}\right)^{(-\nu_1-\nu_2+q)/2}(\eta_2a_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2+q-1}\\ &\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty K_{(\nu_1-\nu_2)/2}\left(2|\eta_1|\frac{a_1}{a_2}\sqrt{(1+1/x)(1+1/y)}\right)K_{(\nu_1+\nu_2)/2}\left(2\eta_2a_2\sqrt{1+x+y}\right)\\ &\qquad\cdot\left(\frac{x^2y^2}{1+x+y}\right)^{(\nu_1+\nu_2)/4}\left(\frac{x(1+x)}{y(1+y)}\right)^{(\nu_1-\nu_2)/4}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}.\end{aligned}$$

さらに $\nu_1,\nu_2,\nu_1\pm\nu_2\notin\mathbf{Z}$ のとき,

$$W_{(\nu_1,\nu_2)}^\eta(a)=\sum_{w\in W}w\left(\Gamma(-\nu_1)\Gamma(-\nu_2)\Gamma\left(-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\right)\right)M_{w(\nu_1,\nu_2)}^\eta(a).$$

ここで, $M^{\eta}_{w(\nu_1,\nu_2)}(a) = \frac{1}{4}(|\eta_1|a_1/a_2)^{q/2}(\eta_2 a_2)^{q-1}\phi_{w(\nu_1,\nu_2)}(a)$.

Remark $q=3$ の場合には, [11] において別の方法で Whittaker 関数の積分表示が得られている. (Theorem 4.4 の式と [11] の公式が同じものであることは簡単な変数変換でわかる.) 後半の Jacquet 積分を級数解の線形結合で表す式は, [3] により一般的な状況で得られているが, ここでは Jacquet 積分の Mellin-Barnes 型積分表示を求め, その積分路を動かし留数計算をすることで直接示した.

§5. Siegel-Whittaker 関数の明示公式

(5.1) $SO(\xi)$ の表現 Siegel-Whittaker 関数は $SO(\xi) \cong SO(q-1)$ の表現空間に値をとるので, まず $SO(\xi)$ の最高ウエイト $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{[(q-1)/2]})$ の有限次元既約表現 $(\chi_\lambda, V_{\chi_\lambda})$ の Gelfand-Zetlin 基底を用いた実現について思い出す ([13]). $m_i = (m_{1,i}, m_{2,i}, \ldots m_{[i/2],i})$ $(2 \le i \le q-1)$ というベクトルを

$$
\begin{aligned}
&m_{q-1} = \lambda,\\
&m_{1,2k+1} \ge m_{1,2k} \ge m_{2,2k+1} \ge m_{2,2k} \ge \cdots \ge m_{k,2k+1} \ge m_{k,2k} \ge -m_{k,2k+1},\\
&m_{1,2k} \ge m_{1,2k-1} \ge m_{2,2k} \ge m_{2,2k-1} \ge \cdots \ge m_{k-1,2k} \ge m_{k-1,2k-1} \ge |m_{k,2k}|
\end{aligned}
$$

を満たすようにとり, それを並べたもの

$$
M = (m_{q-1}, m_{q-2}, \ldots, m_2) = \begin{pmatrix} m_{1,q-1}\ m_{2,q-1}\ \cdots\ m_{k,q-1} \\ m_{2,q-2}\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ m_{1,5}\ m_{2,5} \\ m_{1,4}\ m_{2,4} \\ m_{1,3} \\ m_{1,2} \end{pmatrix}
$$

を Gelfand-Zetlin パターンといい, その全体 $GZ(\lambda)$ は, 最高ウエイト λ の $SO(q-1)$ の有限次元既約表現の基底 $\{v(M) | M \in GZ(\lambda)\}$ をパラメトライズする. $\mathfrak{so}(q-1)$ の元 $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$ $(1 \le i, j \le q-1)$ の作用は,

$$
\begin{aligned}
F_{2p+1,2p} v(M) &= \sum_{k=1}^{p} A^k_{2p}(M) v(M^+_{2p,k}) - \sum_{k=1}^{p} A^k_{2p}(M^-_{2p,k}) v(M^-_{2p,k}),\\
F_{2p+2,2p} v(M) &= \sum_{k=1}^{p} B^k_{2p+1}(M) v(M^+_{2p+1,k}) - \sum_{k=1}^{p} B^k_{2p+1}(M^-_{2p+1,k}) v(M^-_{2p+1,k})\\
&\qquad + \sqrt{-1} C_{2p}(M) v(M)
\end{aligned}
$$

で与えられ, 一般の $F_{i,j}$ の作用についてはこれらの交換子を計算すればわかる. ここで, $M^{\pm}_{i,j}$ は M の $m_{i,j}$ を $m_{i,j} \pm 1$ にし, 他の $m_{k,l}$ はそのままにすることを意味し,

$$
A^k_{2p}(M) = \frac{1}{2}\left| \frac{\prod_{r=1}^{p-1}((l_{r,2p-1} - \frac{1}{2})^2 - (l_{k,2p} + \frac{1}{2})^2) \prod_{r=1}^{p}((l_{r,2p+1} - \frac{1}{2})^2 - (l_{k,2p} + \frac{1}{2})^2)}{\prod_{r=1, r\neq k}^{p} (l^2_{r,2p} - l^2_{k,2p})(l^2_{r,2p} - (l_{k,2p}+1)^2)} \right|^{1/2},
$$

$$B^k_{2p+1}(M) = \left| \frac{\prod_{r=1}^{p}(l^2_{r,2p} - l^2_{k,2p+1}) \prod_{r=1}^{p+1}(l^2_{r,2p+2} - l^2_{j,2p+1})}{l^2_{k,2p+1}(4l^2_{k,2p+1} - 1) \prod_{r=1, r\neq k}^{p}(l^2_{r,2p+1} - l^2_{k,2p+1})(l^2_{k,2p+1} - (l_{r,2p+1} - 1)^2)} \right|^{1/2},$$

$$C_{2p}(M) = \frac{\prod_{r=1}^{p} l_{r,2p} \prod_{r=1}^{p+1} l_{r,2p+2}}{\prod_{r=1}^{p} l_{r,2p+1}(l_{r,2p+1} - 1)},$$

ただし, $l_{k,2p} = m_{k,2p} + p - k$, $l_{k,2p+1} = m_{k,2p+1} + p - k + 1$.

(5.2) 偏微分方程式系 Whittaker 関数のときと同様に C_2, C_4 の明示公式を用いて次を得る.

Theorem 5.1 $\xi = \xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$ とし, $(\chi_\lambda, V_{\chi_\lambda})$ を $SO(\xi_0) \cong SO(q-1)$ の最高ウエイト $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{[(q-1)/2]})$ の有限次元既約表現とする. $f|_A(a) = \sum_{M \in GZ(\lambda)} f_M|_A(a) v(M)$ $(a = a(a_1, a_2))$ を Siegel-Whittaker 関数 $f \in \mathrm{SW}(\pi_\nu, \chi_\lambda \cdot \xi_0)$ の動径成分とする. さらに A の変数として, $y = (y_1, y_2) = (\pi a_1 a_2^{-1}, \pi a_1 a_2)$ を導入すると, $f|_A(y)$ は以下の偏微分方程式系を満たす.

$$(1) \quad \left[D_1^{(q)} + \frac{2y_1y_2}{(y_1 - y_2)^2} S_q \right] f_M|_A(y) = \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2 - \frac{q^2}{2} + q - 1) f_M|_A(y),$$

$$(2) \quad \left[D_2^{(q)} + \frac{4y_1y_2}{(y_1 - y_2)^2} D_3^{(q)} S_q \right] f_M|_A(y)$$
$$= \left(\nu_1 + \frac{q-2}{2}\right)\left(\nu_2 + \frac{q-2}{2}\right)\left(-\nu_1 + \frac{q-2}{2}\right)\left(-\nu_2 + \frac{q-2}{2}\right) f_M|_A(y),$$

$$(3) \quad \Big[-4y_1y_2(E_y - q + 2)(E_y - q + 3) + \prod_{i=1,2} \left(E_y + \nu_i - \frac{q}{2}\right)\left(E_y - \nu_i - \frac{q}{2}\right)$$
$$+ (y_1 - y_2)^4 + (y_1 - y_2)^2 \left(-2E_y^2 + 2(q-2)E_y + \nu_1^2 + \nu_2^2 - \frac{3}{2}q^2 + 6q - 7\right)$$
$$+ 4y_1y_2(y_1 - y_2)\left\{ -y_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + y_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + (q-3)\left(-\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \right\} \Big] f_M|_A(y) = 0.$$

ここで

$$S_q = -\sum_{i=1}^{[(q-1)/2]} \{m^2_{i,q-1} + (q - 2i - 1)m_{i,q-1}\} + \sum_{i=1}^{[(q-2)/2]} \{m^2_{i,q-2} + (q - 2i - 2)m_{i,q-2}\},$$

$$D_1^{(q)} = y_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + y_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + (q-2)\frac{y_1y_2}{y_1 - y_2}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2}\right) - (y_1^2 + y_2^2),$$

$$D_2^{(q)} = y_1^4 \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} + y_2^4 \frac{\partial^4}{\partial y_2^4} - 2y_1^2y_2^2 \frac{\partial^4}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} + \left(4 + \frac{2(q-2)y_2}{y_1 - y_2}\right) y_1^3 \frac{\partial^3}{\partial y_1^3}$$
$$+ \left(4 - \frac{2(q-2)y_1}{y_1 - y_2}\right) y_2^3 \frac{\partial^3}{\partial y_2^3} + \frac{2(q-2)y_1}{y_1 - y_2} y_1^2 y_2 \frac{\partial^3}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \frac{2(q-2)y_2}{y_1 - y_2} y_1 y_2^2 \frac{\partial^3}{\partial y_1 \partial y_2^2}$$
$$+ \left\{ -2(y_1^2 - y_2^2) - q(q-3) - 2(q-2)(q-3)\frac{y_2}{y_1 - y_2} \right\} y_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}$$
$$+ \left\{ 2(y_1^2 - y_2^2) - q(q-3) + 2(q-2)(q-3)\frac{y_1}{y_1 - y_2} \right\} y_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big\{-4y_1^2-2(q-2)y_2^2-2(q-2)y_1y_2\Big\}y_1\frac{\partial}{\partial y_1}\\
&+\Big\{-2(q-2)y_1^2-4y_2^2-2(q-2)y_1y_2\Big\}y_2\frac{\partial}{\partial y_2}\\
&+(y_1^2-y_2^2)^2+q(q-3)(y_1^2+y_2^2)+2(q-2)(q-3)y_1y_2,
\end{aligned}
$$

$$
D_3^{(q)}=y_1^2\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+y_2^2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+2y_1y_2\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}-(q-1)\Big(y_1\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial}{\partial y_2}\Big)-(y_1-y_2)^2+q-1,
$$

$$
E_y=y_1\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial}{\partial y_2}\quad \text{(Euler 作用素)}.
$$

Remark

(1) この $\xi=\xi_0$ という仮定は一般性を失わない.

(2) 上の (3) の方程式は (1), (2) から S_q を消去することによって得られる.

(3) $f\in \mathrm{SW}(\pi_\nu,\chi_\lambda\cdot\xi_0)$, $m\in Z_K(A)\cap R\cong SO(q-2)$ とすると,

$$
f(a)=f(mam^{-1})=(\chi_\lambda\cdot\xi_0)(m)f(a)
$$

となるからことから

(i) $\lambda\neq(\lambda_1,0,\ldots,0)$ ならば, $f=0$,

(ii) $\lambda=(\lambda_1,0,\ldots,0)$ ならば,

$$
f=f_{M_0}v(M_0),\qquad M_0=\begin{pmatrix}\lambda_1\ 0\ldots 0\\ 0\ldots 0\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix}.
$$

従って Theorem 5.1 の微分方程式系において $S_q=-\lambda_1(\lambda_1+q-3)$, $M=M_0$ としてよい.

(5.3) 解の構成 Theorem 5.1 の微分方程式系の特異因子は $y_1=0, y_2=0, y_1-y_2=0$ である. [5] と同様に原点で blow up して, 特性根を計算すると解空間が 8 次元 ($|W|=8$) であることがわかる. $y_1-y_2=0$ の周りでは,

$$
f_{M_0}|_A(y)=\sum_{m,n\geq 0}c_{m,n}y_1^{\tau_1+m}(y_1/y_2-1)^{\tau_2+n}
$$

とおくと,

$$
(\tau_1,\tau_2)=(\pm\nu_i+q/2,\ \lambda_1),\ (\pm\nu_i+q/2,\ -\lambda_1-q+3)
$$

となる ($i=1,2$). [10],[5] と同じく, $\tau_2=\lambda_1$ に対する 4 次元の解を考え

$$
f_{M_0}|_A(y)=\sum_{n\geq 0}\varphi_n(y_1)(y_1/y_2-1)^{\lambda_1+n}.
$$

とおくと, Theorem 5.1 (3) の式から $\varphi_0(y_1)$ は以下のような Meijer の微分方程式を満たすことがわかる.

$$\Big[-4y_1^2(\theta-\lambda_1-q+3)(\theta-\lambda_1-q+2)+\prod_{i=1,2}\Big(\theta-\frac{q}{2}+\nu_i\Big)\Big(\theta-\frac{q}{2}-\nu_i\Big)\Big]\varphi_0(y_1)=0.$$

ここで $\theta=y_1\frac{\partial}{\partial y_1}$. この微分方程式の解 (Meijer の G 関数) の漸近挙動は Meijer によって調べられており, $y_1\to\infty$ となるときに急減少となるものは 1 次元であることがわかり, それは

$$\varphi_0(y_1)=G^{4,0}_{2,4}\left(y_1^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{\lambda_1+q-1}{2}, & \frac{\lambda_1+q}{2}\\ \frac{q}{4}+\frac{\nu_1}{2},\ \frac{q}{4}+\frac{\nu_2}{2}, & \frac{q}{4}-\frac{\nu_1}{2},\ \frac{q}{4}-\frac{\nu_2}{2}\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}\frac{\Gamma(\frac{q}{4}+\frac{\nu_1}{2}-s)\Gamma(\frac{q}{4}+\frac{\nu_2}{2}-s)\Gamma(\frac{q}{4}-\frac{\nu_1}{2}-s)\Gamma(\frac{q}{4}-\frac{\nu_2}{2}-s)}{\Gamma(\frac{\lambda_1+q-1}{2}-s)\Gamma(\frac{\lambda_1+q}{2}-s)}y_1^{2s}ds.$$

(Meijer の G 関数については例えば [1] などを参照.) この $\varphi_0(y)$ から出発して, Theorem 5.1 (1) から決まる $\varphi_n(y)$ の間の微分差分方程式を解き $\varphi_n(y)$ を順に決定して次を得る.

Theorem 5.2 $\nu_1,\nu_2,\nu_1\pm\nu_2\notin\mathbf{Z}$ とする. $\xi=\xi_0=(1,0,\ldots,0)$ とし, $(\chi_\lambda,V_{\chi_\lambda})$ を $SO(\xi_0)\cong SO(q-1)$ の最高ウエイト $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{[(q-1)/2]})$ の有限次元既約表現とする.

(1) $\lambda\neq(\lambda_1,0,\ldots,0)$ のとき,

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_{\nu,K},\,C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\chi_\lambda\cdot\xi_0))=\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{SW}(\pi_\nu,\chi_\lambda\cdot\xi_0)=0.$$

(2) $\lambda=(\lambda_1,0,\ldots,0)$ のとき,

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_{\nu,K},\,C^\infty\mathrm{Ind}_R^G(\chi_\lambda\cdot\xi_0)^{\mathrm{rap}})=\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{SW}(\pi_\nu,\chi_\lambda\cdot\xi_0)^{\mathrm{rap}}=1.$$

ここで, rap は動径成分が $a_1a_2, a_2/a_1\to\infty$ となるときに急減少となる関数全体を意味する. さらに, $f|_A(a)=f_{M_0}|_A(a)v_{M_0}$ を $f\in\mathrm{SW}(\pi_\nu,\chi_\lambda\cdot\xi_0)^{\mathrm{rap}}$ の動径成分とすると, $-\lambda_1-q/2<\mathrm{Re}(\nu_i)<\lambda_1+(q-2)/2$ $(i=1,2)$ のとき, 定数倍を除いて

$$\begin{aligned}f|_A(a)=\,&ca_1^{(q+1)/2}(a_2^{-1}-a_2)^{(3-q)/2}\\&\cdot\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 t_1^{\nu_1/2-5/4}t_2^{\nu_2/2-5/4}u_1^{-\nu_1/2-5/4}u_2^{-\nu_2/2-5/4}\\&\cdot(1-t_1)^{(\lambda_1-3-\nu_1)/2+q/4}(1-t_2)^{(\lambda_1-3-\nu_2)/2+q/4}\\&\cdot(1-u_1)^{(\lambda_1-2+\nu_1)/2+q/4}(1-u_2)^{(\lambda_1-2+\nu_2)/2+q/4}\\&\cdot\{(1-t_1u_1)(1-t_2u_2)\}^{-\lambda_1/2-(q-3)/4}\\&\cdot I_{\lambda_1+(q-3)/2}\left(\pi a_1(a_2^{-1}-a_2)\sqrt{\frac{(1-t_1u_1)(1-t_2u_2)}{t_1u_1t_2u_2}}\right)\\&\cdot\exp\left(-\frac{\pi a_1(a_2^{-1}+a_2)}{\sqrt{t_1u_1t_2u_2}}\right)dt_1dt_2du_1du_2.\end{aligned}$$

References

[1] A. Erdélyi et al., Higher transcendental functions, vol.1, McGraw-Hill, 1953

[2] Y. Gon, Generalized Whittaker functions on $SU(2,2)$ with respect to the Siegel parabolic subgroup, Memoirs of the AMS **738** (2002).

[3] M. Hashizume, Whittaker functions on semisimple Lie groups, Hiroshima Math. J. **12** (1982), 259-293.

[4] H. Jacquet, Fonctions de Whittaker associées aux groupes de Chevalley, Bull. Soc. Math. France, **95** (1967), 243-309.

[5] T. Ishii, Siegel-Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$ for principal series representations, J. Math. Sci. Univ. of Tokyo **9** (2002), 303-346.

[6] ———, Siegel-Whittaker functions on $SO_o(2,q)$ for class one principal series representations, preprint (2002).

[7] ———, A note on class one Whittaker functions on $SO_o(2,q)$, preprint (2002).

[8] T. Miyazaki, The Generalized Whittaker Functions for $Sp(2,\mathbf{R})$ and the Gamma Factor of the Andrianov's L-function, J. Math. Sci. Univ. of Tokyo **7** (2000), 241-295.

[9] S. Nakajima, On Invariant Differential Operators on Bounded Symmetric Domains of Type IV, Proc. Japan Acad., **58**, Ser. A (1982), 235-238.

[10] S. Niwa, On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space of degree 2, Nagoya Math. J. **121**, (1991), 171–184.

[11] ———, Commutation relations of differential operators and Whittaker functions on $Sp_2(\mathbf{R})$, Proc. Japan Acad. **71** Ser. A (1995), 189-191.

[12] N. Proskurin, Cubic Metaplectic Forms and Theta Functions, Lect. Notes in Math. **1677** (1998).

[13] N. Vilenkin and A. Klimyk, Representation of Lie groups and special functions, vol. 3, Kluwer Academic Publishers.

[14] N. Wallach, Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups, Lect. Notes in Math. **1024** (1984), 287-369.

[15] H. Yamashita, Finite multiplicity theorems for induced representations of semisimple Lie groups II -Application to generalized Gelfand-Graev representations-, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 383-444.