数理解析研究所講究録 1342 巻 2003 年 53-60

IV型、Complex ball の算術商をモジュライ空間に持つ代数多様体の例について

名古屋大学・多元数理科学研究科　金銅　誠之 (Shigeyuki Kondo)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

§0. はじめに

IV型有界対称領域や Complex ball の算術的部分群による商空間（あるいはその開集合）をモジュライ空間に持つ代数多様体の例を紹介することが目的である。将来、保型形式論と代数幾何が交叉する良い例につながればと考える。

§1. K3 曲面の周期

2次元コンパクト複素多様体 X が $K3$ 曲面であるとは次の2条件を満たすときをいう：

(i) X は単連結;
(ii) X の標準束 K_X は自明、すなわち至る所消えない X 上の正則2形式が存在する

このとき $H^2(X,\mathbf{Z})\simeq\mathbf{Z}^{22}$ でカップ積は $H^2(X,\mathbf{Z})$ 上に lattice の構造を入れる、すなわち非退化な $\mathbf{Z}$ に値を取る双線形形式

$$(,):H^2(X,\mathbf{Z})\times H^2(X,\mathbf{Z})\to\mathbf{Z}$$

を与える。この lattice は unimodular, even, 符号が $(3,19)$ で、従って lattice として

$$(H^2(X,\mathbf{Z}),(,))\simeq L=U\oplus U\oplus U\oplus E_8\oplus E_8$$

である。ここで U は hyperbolic lattice, すなわち行列

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

で定義される階数2の符号が $(1,1)$ の lattice, E_8 は even, unimodular, rank 8 の負定値の lattice である。以下、A_n, D_m, E_k も同様に不定値の A_n, D_m, E_k 型

の Cartan 行列に対応する lattice とする。また lattice K と整数 m に対し、$K(m)$ で、交点形式を K のそれを m 倍して得られる lattice を表す。

定義により至る所消えない X 上の正則 2 形式 ω_X が定数倍を除き 一意的に存在する。2-cycles 上の積分

$$\omega_X : H_2(X, \mathbf{Z}) \to \mathbf{C}, \quad \gamma \to \int_\gamma \omega_X$$

により $\omega_X \in H^2(X, \mathbf{C})$ と考えられ、Riemann condition

$$(\omega_X, \omega_X) = 0, \quad (\omega_X, \bar{\omega}_X) > 0$$

を満たす。今

$$\Omega = \{\omega \in \mathbf{P}(L \otimes \mathbf{C}) : (\omega, \omega) = 0, \quad (\omega, \bar{\omega}) > 0\}$$

と置くとき、Ω は $K3$ 曲面 X と marking $\alpha_X : H^2(X, \mathbf{Z}) \to L$ の組全体と 1 対 1 に対応するる。Ω は代数的とは限 らない marked $K3$ 曲面の周期領域と呼ばれる。

§2. IV 型、Complex ball の算術商をモジュライ空間に持つ代数多様体の例

例 1． 4 次曲面のモジュライ（[PS] I. Piatetski-Shapiro, I.R. Shafarevich):

$X \subset \mathbf{P}^3$ を非特異 4 次曲面とすると X は $K3$ 曲面であり、超平面の X への制限 h を次数 4 の偏極と呼ぶ。$(h, \omega_X) = 0$ であるので、$L_4 = h^\perp \simeq U \oplus U \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus (-4)$ と置けば、ω_X は Ω の 中の部分領域

$$\mathcal{D}_4 = \{\omega \in \mathbf{P}(L_4 \otimes \mathbf{C}) : (\omega, \omega) = 0, \quad (\omega, \bar{\omega}) > 0\}$$

に含まれる。$\mathcal{D}_4$ は19次元IV型有界対称領域の 2 つのコピーの disjoint union となる。4 次曲面は１９次元存在することは 4 変数 4 次斉次式の空間の次元を計算することから分かる。marking α_X の取り方を忘れるために

$$\Gamma_4 = \{\gamma \in O(L) : \gamma(h) = h\}$$

とおき、商空間 $\mathcal{D}_4/\Gamma_4$ を考えると、これが（有理 2 重点を許した） 4 次曲面のモジュライと同型となる。

一般に次数 $2k$ の偏極 $K3$ 曲面のモジュライも同様に構成される。L_4 を $L_{2k} = U \oplus U \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus (-2k)$ で置き換えれば良い。ここで $(-2k)$ は rank 1 の交点数 $-2k$ で与えられる lattice とする。

例 2. 種数3の曲線のモジュライ ([K1]):

C を種数3の non-hyperelliptic curve とする。C の標準モデルは平面4次曲線であり、はじめから C は $\mathbf{P}^2$ の中の4次曲線としておく: $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{P}^2 : f(x,y,z) = 0\}$ (ここで f は斉次4次式である)。今、

$$X = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{P}^3 : t^4 = f(x,y,z)\}$$

と置くと、X は非特異4次曲面で $K3$ 曲面である。X には射影変換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_4 \end{pmatrix}$$

が自己同型として作用している。ここで ζ_4 は1の原始4乗根である。ω_X を X の正則2形式とすると、$\sigma^*(\omega_X) = \pm\zeta_4\omega_X$ であることが確かめられる。X は $\mathbf{P}^2$ の C で分岐する4次のガロア被覆である。また $\mathbf{P}^2$ の C で分岐する2次の被覆 $X/<\sigma^2>$ は次数2の del Pezzo 曲面と呼ばれることを注意しておく。C に対して組 (X,σ) を対応させることは canonical であり、従って non-hyperelliptic curve のモジュライは組 (X,σ) のモジュライと同型であり、また次数2の del Pezzo 曲面とも同型である。

X は位数4の自己同型 σ を持つ特別な $K3$ 曲面であるが、X は代数的サイクルをたくさん含むことが次のように示せる。平面4次曲線 C は28本の複接線を持つことが古典的に知られている。各複接線は X 上では2本の非特異有理曲線に分解し、X は56本の非特異有理曲線を含む。これらの非特異有理曲線が生成する $H^2(X,\mathbf{Z})$ の sublattice は符号 $(1,7)$ の lattice S で explicit に書ける。S の $H^2(X,\mathbf{Z})$ での直行補空間を T と置くと、T は符号 $(2,12)$ の lattice で

$$T \simeq U(2) \oplus U(2) \oplus D_8 \oplus A_1 \oplus A_1$$

である。ω_X は $T \otimes \mathbf{C}$ に含まれるので X の周期領域は12次元IV型有界対称領域

$$\mathcal{D} = \{\omega \in \mathbf{P}(T \otimes \mathbf{C}) : (\omega,\omega) = 0, \quad (\omega,\bar{\omega}) > 0\}$$

である。しかしながら X は自己同型 σ を持っており、ω_X は σ の固有ベクトルであった。よって ω_X は $\mathcal{D}$ の一般の点ではない。(X,σ) の 周期領域は次のように定義し直す必要がある。まづ σ の $T\otimes\mathbf{C}$ への作用に関する固有分解は

$$T\otimes\mathbf{C}=T_+\oplus T_-,\quad T_\pm=\{\omega\in T\otimes\mathbf{C}:\sigma^*(\omega)=\pm\zeta_4\omega\}$$

で与えられることが分かる。今、

$$\mathcal{B}=\{\omega\in\mathbf{P}(T_+):(\omega,\bar{\omega})>0\}$$

と置く。$\omega\in T_+$ は $(\omega,\omega)=(\sigma^*(\omega),\sigma^*(\omega))=(\zeta_4\omega,\zeta_4\omega)=-(\omega,\omega)$ より、$(\omega,\omega)=0$ は自動的に出る。さらに $(\omega,\bar{\omega})$ はhermitian form であり、$\mathcal{B}$ は 6次元 complex ball に他ならないことが分かる。$\Gamma=\{\gamma\in O(T):\gamma\sigma^*=\sigma^*\gamma\}$ と置くと $\mathcal{B}/\Gamma$ の open set が種数3の non-hyperelliptic curve のモジュライとなる。平面4次曲線は6次元のモジュライをなすことは3変数斉次4次式の空間を計算することで容易に示せる。例えば C が node を持つ場合は、対応するX は $K3$ 曲面であるが、より特別で $\mathcal{B}/\Gamma$ の超曲面の点に対応する。

以下、その他の例をリストアップする。最後の例11を除き、全て $K3$ 曲面と特別な自己同型の組の周期を用いて構成される。対応する有界対称領域のタイプと次元、それを定義する lattice T と自己同型の位数を述べる。

例3． 種数4の non-hyperelliptic curve のモジュライ ([K2]):

種数4の non-hyperelliptic curve C は $\mathbf{P}^3$ の2次曲面 Q と3次曲面の完全交叉で、Q の C で分岐する3次ガロア被覆は $K3$ 曲面となる。その周期領域は lattice

$$T=U\oplus U(3)\oplus E_8\oplus E_8$$

とその上の位数3の isometry から定まる9次元 complex ball である。

例4． 種数6の curve のモジュライ ([K2]):

種数6の non-hyperelliptic curve の標準モデル $C\subset\mathbf{P}^5$ を含む次数5の del Pezzo 曲面 S が一意的に存在する。S の C で分岐する2重被覆は $K3$ 曲面でその周期領域は lattice

$$T=U\oplus U\oplus E_8\oplus A_1\oplus A_1\oplus A_1\oplus A_1\oplus A_1$$

から定まる15次元IV型領域である。

注）　種数５の曲線が有界対称領域の算術商（の開集合）として表せるかどうか、別な言い方をすると、種数５の曲線から自然に $K3$ 曲面が構成できるかどうか、少なくとも筆者は知らない。

例５．次数１の del Pezzo 曲面のモジュライ（[K2]）:

次数１の del Pezzo 曲面の反標準モデルは $\mathbf{P}^3$ の quadric cone の 種数４の曲線 C で分岐する２重被覆である。２重被覆の代わりに３重ガロア被覆を考えるとそれは $K3$ 曲面となる。その周期領域は lattice

$$T = A_2(-2) \oplus E_8 \oplus E_8$$

とその上の位数３の isometry から定まる８次元 complex ball である。

例6. 次数２の del Pezzo 曲面のモジュライ:

種数３の non-hyperelliptic curve のモジュライに同じ（例２）.

例７．次数３の del Pezzo 曲面のモジュライ（[DGK]）:

次数３の del Pezzo 曲面の反標準モデルは $\mathbf{P}^3$ の３次曲面 S である。S は27本の直線を含むことはよく知られている。今、直線 l を１つ固定する。l を含む超平面と S は l と２次曲線で交わる。従って l を含む超平面全体は S に２次曲線束を定めその discriminant は $\mathbf{P}^2$ の５次曲線

$$F_5(t_0, t_1) + t_2^3 F_2(t_0, t_1) = 0$$

であることが計算から従う。ここで (t_0, t_1, t_2) は $\mathbf{P}^2$ の斉次座標、$F_k(t_0, t_1)$ は k 次斉次式である。今、定義式

$$t_2(F_5(t_0, t_1) + t_2^3 F_2(t_0, t_1)) = 0$$

で定まる６次曲線を C とする。C には射影変換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \end{pmatrix}$$

が自己同型として作用している。ここで ζ_3 は１の原始３乗根である。$\mathbf{P}^2$ の C で分岐する２重被覆は $K3$ 曲面で、上の射影変換から引き起こされる位数３の自己同型を持つ。この $K3$ 曲面は直線 l の選び方には依らず３次曲面 S にのみで定まることが示せる。その周期領域は lattice

$$T = A_2(-1) \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$$

とその上の位数3の isometry から定まる4次元 complex ball である。この事実は、Allcock, Carlson, Toledo[ACT] がアーベル多様体の周期を使って最初に示した。

Node と呼ばれる特異点を持つ3次曲面に対応する $K3$ 曲面の周期は4次元 complex ball のある超平面をなす。また3次曲面上の3本の直線が1点で交わるとき、この点を Eckardt point と呼ぶ。Eckardt point を持つ3次曲面に対応する $K3$ 曲面の周期は別の超平面をなす。

例 8. 次数4の del Pezzo 曲面 ([K2]):

次数4の del Pezzo 曲面 S は $\mathbf{P}^4$ の2つの2次超曲面 Q_1, Q_2 の完全交叉として書ける。S を通る2次超曲面は $t_0Q_1 + t_1Q_2 = 0, \quad (t_0, t_1) \in \mathbf{P}^1$ と書ける。この中で特異点を持つものはdiscriminant $det(t_0Q_1 + t_1Q_2) = 0$ で定まる。今、この discriminant で定まる5点を $(\alpha_i, 1) \in \mathbf{P}^1$ とする。平面6次曲線

$$C : y^6 = \prod_{i=1}^{5}(x - \alpha_i z)y$$

には射影変換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が自己同型として作用している。ここで ζ_5 は1の原始5乗根である。$\mathbf{P}^2$ の C で分岐する2重被覆は $K3$ 曲面で、上の射影変換から引き起こされる位数5 の自己同型を持つ。今、K を

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

で定まる lattice とすると、上の $K3$ 曲面（一般の）の超越格子は

$$T = U \oplus K \oplus A_5 \oplus A_5$$

で、σ から定まる位数5の isometry を持つ。これから周期領域は2次元の complex ball となる。

例9. $\mathbf{P}^2$ の6点のモジュライ ([MSY]):

$\mathbf{P}^2$ の6点に対しその dual の6直線を考える。$\mathbf{P}^2$ の6直線で分岐する2重被覆は $K3$ 曲面となる。その周期領域 は lattice

$$T = U(2) \oplus U(2) \oplus A_1 \oplus A_1$$

で定まる4次元IV型有界対称領域である。

例10. エンリケス曲面のモジュライ([H]):

エンリケス曲面の普遍被覆は $K3$ 曲面で、被覆次数は2である。周期領域は lattice

$$T = U \oplus U(2) \oplus E_8(2)$$

から定まる10次元IV型有界対称領域である。T の (-2)-vector に直行する IV 型領域の点はエンリケス曲面には対応していないことが知られている。また非特異有理曲線を含むエンリケス 曲面の周期は別の超平面をなす。

例11. Cubic 4-folds のモジュライ ([BD]):

$\mathbf{P}^5$ の3次超曲面上の直線全体は4次元 symplectic manifold となる。この symplectic manifold は $K3$ 曲面の対称積の非特異モデルに変形できる。このことから周期領域は lattice

$$T = U \oplus U \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus A_2$$

から定まる20次元IV型有界対称領域となる。

注) 符号 $(2,26)$ の lattice $T = U \oplus U \oplus E_8 \oplus E_8 \oplus E_8$ から定まる26次元IV型有界対称領域は, fake Monster Lie algebra の分母公式と関連した無限積表示を持つ保型形式の存在が知られていることからも([B2])、興味深い。しかしながらこの領域を周期領域に持つ代数多様体があるかどうかは知られていない。

注) ある保型形式の存在について

例7で述べた3次曲面の周期領域上の重さ12の保型形式で node を持つ3次曲面のなす超平面でちょうど零点を持つものの構成を Borcherds が与えた。また Eckardt point を持つ3次曲面のなす超平面でちょうど零点を持つ重さ225の保型形式を Allcock, Freitag [AF] が与えた。一方、例10で述べたエンリ ケス曲面の場合、Borcherds [B1] が (-2)-vector に直行する超平面でちょうど零点を持つ重さ4の保型形式を構成した。その後、筆者 [K3] が非特異有理曲線を含むエンリケス曲面のなす超平面でちょうど零点を持つ重さ 124の保型形式を与えた。詳しいこと、およびその応用は [AF], [B1], [FH], [K3] を参照して下さい。

Reference

[ACT] D. Allcock, A. Carlson, D. Toledo, *The complex hyperbolic geometry of the moduli space of cubic surfaces*, J. Algebraic Geometry **11** (2002), 659–724.

[AF] D. Allcock, E. Freitag, *Cubic surfaces and Borcherds product*, Comm. Math. Helv. **77**(2002), 270–296.

[BD] A. Beauville, R. Donagi, *La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension* 4, C. R. Acad. Sc. Paris, **301**(1985), 703–706.

[B1] R. Borcherds, *The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra*, Topology **35** (1996), 699–710.

[B2] R. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. math., **132** (1998), 491–562.

[DGK] I. Dolgachev, B. van Geemen, S. Kondo, *A complex ball uniformization of the moduli space of cubic surfaces via periods of K3 surfaces*, in preparation.

[FH] E. Freitag, C.F. Hermann, *Some modular varieties of low dimension*, Adv. Math., **152** (2000), 203–287.

[H] E. Horikawa, *On the periods of Enriques surfaces* I, II, Math. Ann., **234** (1978), 78–108, ibid **235** (1978), 217–246.

[K1] S. Kondo, *A complex hyperbolic structure of the moduli space of curves of genus three*, J. reine anngew. Math., **525**(2000), 219–232.

[K2] S. Kondo, *The moduli space of curves of genus 4 and the Deligne-Mostow's complex reflection groups*, Adv. Studies in Pure Math., **36** (2002), 383–400.

[K3] S. Kondo, *The moduli space of Enriques surfaces and the Borcherds products*, J. Algebraic Geometry **11** (2002), 601–627.

[MSY] K. Matsumoto, T. Sasaki, M. Yosida, *The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3-surfaces and the hypergeometric function of type* $(3,6)$, Internat. J. Math., **3**(1992), 1–164.

[PS] I. Piatetski-Shapiro, I.R. Shafarevich, *A Torelli theorem for algebraic surfaces of type* $K3$, Math. USSR Izv., **5**(1971), 547–587.