数理解析研究所講究録 1342 巻 2003 年 93-106

IV 型領域上の正則保型形式と L 関数

村瀬篤 (Atsushi MURASE)　(京都産業大学理学部)
菅野孝史 (Takashi SUGANO)　(金沢大学理学部)

1. 設定と目標

$Q_1 \in M_{m+2}(\boldsymbol{Z})$ を符号 $(1, m+1)$ の even integral な対称行列とし, $Q_2 := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & Q_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ とおく. Q_1, Q_2 の直交群をそれぞれ G_1, G_2 で表す ($\boldsymbol{Q}$ 上の代数群).

G_2 の $\boldsymbol{R}$ 有理点の単位元成分 $G^0_{2,\infty}$ は IV 型対称領域

$$\mathcal{D} := \left\{ Z \in \boldsymbol{C}^{m+2} \mid Q_1[\operatorname{Im} Z] > 0 \right\}^0$$

に推移的に作用し, 作用 $Z \mapsto g\langle Z\rangle$ と $G^0_{2,\infty} \times \mathcal{D}$ 上の正則保型因子 $J_{G_2}(g, Z)$ が

$$gZ^{\sim} = (g\langle Z\rangle)^{\sim} \cdot J_{G_2}(g, Z), \qquad Z^{\sim} := \begin{pmatrix} -Q_1[Z]/2 \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる. $\mathcal{D}$ の一点 Z_0 の $G^0_{2,\infty}$ における固定化部分群を $K^*_{2,\infty}$ とおく ($SO(2) \times SO(m+2)$ に同型). 各素数 p に対し, G_2 の $\boldsymbol{Q}_p$ 有理点の群 $G_{2,p}$ の開コンパクト部分群 $K^*_{2,p}$ を

$$K^*_{2,p} := \left\{ g \in G_{2,p} \mid (g-1)Q_2^{-1} \in M_{m+4}(\boldsymbol{Z}_p) \right\}$$

で定める ($K_{2,p} := G_{2,p} \cap GL_{m+4}(\boldsymbol{Z}_p)$ の指数有限正規部分群).

l を自然数とし, $K^*_{2,A} := \prod_{v \le \infty} K^*_{2,v}$ に関する weight l の正則尖点形式の空間を $S_l(K^*_{2,A})$ で表す. すなわち, G_2 のアデール群 $G_{2,A}$ 上の $\boldsymbol{C}$ 値有界関数 F で,

$$F(\gamma g k) = F(g)\, J_{G_2}(k_\infty, Z_0)^{-l} \qquad (\gamma \in G_{2,\boldsymbol{Q}},\ g \in G_{2,A},\ k = k_\infty k_f \in K^*_{2,A})$$
$$F(g_\infty g_f) J_{G_2}(g_\infty, Z_0)^l \text{ は } g_\infty\langle Z_0\rangle \in \mathcal{D} \text{ の正則関数} \quad (g_\infty \in G^0_{2,\infty},\ g_f \in G_{2,f})$$

を満たすものの全体である ($G_{2,f}$ は $G_{2,A}$ の有限部分).

以下, $L_2 := \boldsymbol{Z}^{m+4}$ が Q_2 に関して maximal integral lattice であると仮定する. これは, ${}^t g^{-1} Q_2\, g^{-1}$ ($g \in M_{m+4}(\boldsymbol{Z}) \cap GL_{m+4}(\boldsymbol{Q})$) が even integral ならば $\det g = \pm 1$ であることを意味する. また, $L_1 := \boldsymbol{Z}^{m+2}$ が Q_1 に関して maximal integral lattice であることと同値.

$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}(G_{2,p}, K^*_{2,p})$ を Hecke 環, 即ち $G_{2,p}$ 上の両側 $K^*_{2,p}$ 不変な台コンパクトな $\boldsymbol{C}$ 値関数のなす環 (積は convolution) とし, その中心を $\mathcal{H}^+_p$ で表す. 制限テンソル積 $\otimes'_{p<\infty}\mathcal{H}^+_p$ は $S_l(K^*_{2,A})$ に convolution で (Petersson 内積に関して) 正規可換に作用する. $F \in S_l(K^*_{2,A})$ を $\otimes'_{p<\infty}\mathcal{H}^+_p$ の同時固有関数とする:

$$F * \phi = \lambda_F(\phi) F \qquad (\phi \in \otimes'_{p<\infty}\mathcal{H}^+_p).$$

このとき，F の standard L 関数が local standard L 関数の積

$$L(F;s) := \prod_{p<\infty} L_p(\lambda_F;s)$$

として定義される（cf. §2）．さらに，ガンマ因子 $L_\infty(F;s)$ を

$$\left\{\begin{array}{ll} |\det Q_2|^{s/2} & m\ :\ \text{even} \\ |2^{-1}\det Q_2|^{s/2} & m\ :\ \text{odd} \end{array}\right\} \cdot \Gamma_{\boldsymbol{C}}(s+l-(m+2)/2) \prod_{j=0}^{[m/2]} \Gamma_{\boldsymbol{C}}(s-j+m/2)$$

と定め，

$$\xi(F;s) := L_\infty(F;s)\, L(F;s)$$

とおく（$\Gamma_{\boldsymbol{C}}(s) := (2\pi)^{1-s}\,\Gamma(s)$ である）．

このノートの目的は，$\xi(F;s)$ の解析接続・関数等式を調べる 3 つの方法を紹介することにある．

第 1 の方法は，$SO(1,m+2)$ 上の Eisenstein 級数を用いた積分表示によるもので，Andrianov の $Sp(2,\boldsymbol{R}) \sim SO(2,3)$ の場合の結果 [A] を起源とする（cf. [S1]）．また，$SO(2,1)$ 即ち elliptic modular の場合は，Fourier 係数の Mellin 変換という古典的なものに一致する．§4 Theorem 1 で L 関数の構成を与える．

第 2 の方法は，$SO(2,m+2)$ 上の Eisenstein 級数と theta lift を用いた積分表示によるもので，$Sp(2,\boldsymbol{R})$ の場合に Kohnen-Skoruppa [KS] が行った（cf. [MS3]）．記述に必要な言葉を用意した後，§6 Theorem 2 で結果を述べる．

第 3 の方法は，$SO(3,m+2)$ 上の Eisenstein 級数と新谷関数を用いた積分表示による．これは多くの古典群の場合に適用可能であり，定値直交群の場合の結果（Proposition 1, 2）もこの手法によっている（cf. [MS1], [MS2]）．直交群の正則保型形式に対しては，無限素点での計算が完了していないため不十分な形であるが，§7 Theorem 3 に述べた．

2. local standard L 関数

$S=(s_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{Q}_p)$ を n 次 even integral な対称行列（i.e. $s_{ij} \in \boldsymbol{Z}_p$, $s_{ii} \in 2\boldsymbol{Z}_p$）とする．$S$ に関し $L=\boldsymbol{Z}_p^n$ が maximal $\boldsymbol{Z}_p$ integral lattice となるとき，S を maximal と略称する．これは，${}^t g^{-1} S g^{-1}$ ($g \in M_n(\boldsymbol{Z}_p) \cap GL_n(\boldsymbol{Q}_p)$) が even integral となるのは $g \in GL_n(\boldsymbol{Z}_p)$ に限るというのと同じ条件である．

maximal な S を固定し，

$$\begin{aligned} H &= O(S) = \{h \in GL_n(\boldsymbol{Q}_p) \mid {}^t g S g = S\ \}, \\ U &= H \cap GL_n(\boldsymbol{Z}_p), \qquad U^* := \{h \in H \mid (h-1)S^{-1} \in M_n(\boldsymbol{Z}_p)\} \end{aligned}$$

とおく．U は H の極大開コンパクト部分群，U^* は U の指数有限正規部分群となる．U/U^* は，単位群，位数 2 の群，あるいは位数 $2(p+1)$ の二面体群のいずれかになる（局所体上の maximal lattice の分類による）．

H 上の両側 U^* 不変な台コンパクトな $\boldsymbol{C}$ 値関数全体 $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}(H, U^*)$ は，convolution により $\boldsymbol{C}$-algebra をなす（Hecke 環）．$\mathcal{H}_p$ 及びその中心 $\mathcal{H}_p^+$ の構造は，Satake 同型により記述される：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_p &\cong \boldsymbol{C}[U/U^*][X_1^{\pm1}, \ldots, X_\nu^{\pm1}]^{W_\nu} , \\ \mathcal{H}_p^+ &\cong Z(\boldsymbol{C}[U/U^*])[X_1^{\pm1}, \ldots, X_\nu^{\pm1}]^{W_\nu} .\end{aligned}$$

ここで，ν は S の Witt 指数，W_ν は，$X_1, \ldots, X_\nu$ の置換と $X_i \mapsto X_i^{-1}$ で生成される位数 $2^\nu \nu!$ の群である（Weyl 群）．$\boldsymbol{C}$-algebra 準同型 $\lambda : \mathcal{H}_p^+ \longrightarrow \boldsymbol{C}$ に対し，local standard L 関数 $L_p(\lambda; s)$ が上記同型を用いて定義される（cf. [MS2]）．$S \in GL_n(\boldsymbol{Z}_p)$ のとき，$L_p(\lambda, s)^{-1}$ は p^{-s} の $2[n/2]$ 次多項式である．

3. 定値直交群

$S \in M_n(\boldsymbol{Z})$ を正定値，even integral な対称行列とし，全ての有限素点で maximal と仮定する（即ち，${}^tg^{-1}Sg^{-1}$ が even integral となる $g \in M_n(\boldsymbol{Z}) \cap GL_n(\boldsymbol{Q})$ は $\det g = \pm 1$ に限る）．

H を S の直交群（$\boldsymbol{Q}$ 上の代数群）とし，H のアデール群を H_A で表す．各素数 p について $H_p := H(\boldsymbol{Q}_p)$ の開コンパクト部分群 U_p^* を §2 と同様に定義し，U_∞^* を H_∞ の単位元成分，$U_A^* = \prod_{v<\infty} U_v^*$ とおく．

U_A^* に関する保型形式の空間を $S(U_A^*)$ で表す．即ち，

$$S(U_A^*) := \{\varphi : H_A \longrightarrow \boldsymbol{C} \mid \varphi(\gamma h u) = \varphi(h) \quad \gamma \in H_{\boldsymbol{Q}},\ h \in H_A,\ u \in U_A^*\} .$$

この空間には，Hecke 環 $\mathcal{H}_p := \mathcal{H}(H_p, U_p^*)$ が covolution で作用している．特に，その中心 $\mathcal{H}_p^+$ の作用は（Petersson 内積に関して）正規可換であり，$S(U_A^*)$ は制限テンソル積 $\otimes'_p \mathcal{H}_p^+$ の同時固有関数（Hecke eigenform）からなる基底を持つ．

今 $\varphi \in S(U_A^*)$ が符号 σ_φ $(= \pm 1)$ の Hecke eigenform，即ち，

$$\varphi * \phi = \lambda_\varphi(\phi)\, \varphi \quad (\phi \in \otimes'_{p<\infty} \mathcal{H}_p^+), \qquad \varphi(hh_\infty) = \sigma_\varphi \varphi(h) \quad (h_\infty \in H_\infty - U_\infty^*)$$

であるとする．φ の (completed) global L 関数 $\xi(\varphi; s)$ を

$$\begin{aligned}\xi(\varphi; s) &:= L_\infty(\varphi; s) \prod_{p<\infty} L_p(\lambda_\varphi; s) \\ L_\infty(\varphi; s) &= \left\{\begin{array}{ll} (\det S)^{s/2} & n : \text{even} \\ (2^{-1}\det S)^{s/2} & n : \text{odd} \end{array}\right\} \prod_{j=1}^{[n/2]} \Gamma_{\boldsymbol{C}}(s - j + n/2)\end{aligned}$$

で定義する．

Proposition 1 $\varphi \in S(U_A^*)$ を符号 σ_φ の Hecke eigenform とする．

(1) $\xi(\varphi; s)$ は有理型関数として全 s 平面に解析接続され，関数等式

$$\xi(\varphi; s) = \sigma_\varphi^n\, \xi(\varphi; 1 - s)$$

(2)　$n=1$ のとき，$\xi(\varphi;s)$ は entire で，$\xi(\varphi;1/2)\neq 0$ となるのは，φ が定数関数の場合に限る．

(3)　$n\geq 2$ のとき，$\xi(\varphi;s)$ は $s=n/2-k$ $(0\leq k\leq n-1,\ k\in\boldsymbol{Z})$ で高々 1 位の極を持つ以外は正則であり，$s=n/2$ で極を持つ必要十分条件は，φ が定数関数であることである．

(4)　$\sigma_\varphi=-1$ ならば，$\xi(\varphi;s)$ は entire である．

符号 $(1,n+1)$ の対称行列 $\begin{pmatrix} & & 1\\ & -S & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ の直交群を H_1 とする．$H_{1,\infty}$ の単位元成分 $H_{1,\infty}^0$ は，

$$\mathcal{X}:=\{X=(r,x)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n \mid x>0\}$$

に推移的に作用し，作用 $X\mapsto h\langle X\rangle$ と $H_{1,\infty}^0\times\mathcal{X}$ 上の保型因子 $J_{H_1}(h,X)$ が

$$hX^{\sim}=(h\langle X\rangle)^{\sim}\cdot J_{H_1}(h,X),\qquad (r,x)^{\sim}:=\begin{pmatrix} r+S[x]/2\\ x\\ 1\end{pmatrix}$$

で与えられる．$X_0=(r_0,0)\in\mathcal{X}$ の固定化部分群を $U_{1,\infty}^*$，$H_{1,p}$ の開コンパクト部分群 $U_{1,p}^*$ を §2 と同様に定め，$U_{1,A}^*=\prod_{v\leq\infty}U_{1,v}^*$ とおく．

P_1 を G_1 の上三角極大放物部分群で，Levi part が $GL_1\times H$ となるものとする：

$$P_1:=\left\{\begin{pmatrix} t & * & *\\ & h & *\\ & & t^{-1}\end{pmatrix}\,\middle|\, t\in GL_1,\ h\in H\right\}.$$

岩澤分解 $H_{1,A}=P_{1,A}U_{1,A}^*$ により，$h\in H_{1,A}$ は

$$h=\begin{pmatrix} t(h) & * & *\\ & \beta(h) & *\\ & & t(h)^{-1}\end{pmatrix}u(h),\quad t(h)\in\boldsymbol{Q}_A^\times,\ \beta(h)\in H_A,\ u(h)\in U_{1,A}^*$$

の形に書かれる．$\varphi\in S(U_A^*)$, $s\in\boldsymbol{C}$ に対し，$H_{1,A}$ 上の Eisenstein 級数を

$$E_{H_1}(h,\varphi;s):=\sum_{\gamma\in P_{1,Q}\backslash H_{1,Q}}\varphi(\beta(\gamma h))\,|t(\gamma h)|_A^{s+n/2}$$

で定義する（右辺の級数は，$\mathrm{Re}\,(s)>n/2$ で広義一様絶対収束）．$\varphi\in S(U_A^*)$ が Hecke eigenform のとき，

$$E_{H_1}^*(h,\varphi;s):=r_0^{s/2}\,\xi(\varphi;s+1)\left\{\begin{matrix} 1 & n:\mathrm{even}\\ \xi(2s+1) & n:\mathrm{odd}\end{matrix}\right\}E_{H_1}(h,\varphi;s)$$

とおく．ここで，$\xi(s)=\Gamma_{\boldsymbol{R}}(s)\,\zeta(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ である．

Proposition 2 $\varphi \in S(U_A^*)$ を符号 σ_φ の Hecke eigenform とする.

(1) $E_{H_1}^*(h,\varphi;s)$ は s の有理型関数として全 s 平面に解析接続され，関数等式

$$E_{H_1}^*(h,\varphi;s) = \sigma_\varphi^{n+1}\ E_{H_1}^*(h,\varphi;-s)$$

を満たす.

(2) $E_{H_1}^*(h,\varphi;s)$ は $s = n/2-k$ $(0 \le k \le n,\ k \in \boldsymbol{Z})$ のみで，高々 1 位の極をもつ以外は正則である. φ が定数関数でなければ $s=n/2$ で正則で，φ が定数関数のときは，$s=n/2$ での留数は（0 でない）定数となる.

(3) $\sigma_\varphi = -1$ ならば，$E_{H_1}^*(h,\varphi;s)$ は entire である.

Remark Proposition 1 と Proposition 2 は，新谷関数を介して交互に証明されていく (cf. [MS2])．概略を述べておこう. Proposition 1 for m で得られた $\xi(\varphi:s)$ の極の情報・関数等式から，$E_{H_1}^*(h,\varphi:s)$ の constant term のそれらが分かり，(Eisenstein 級数の一般論を用いて) Proposition 2 for m が得られる. 次に，$m+1$ 次定値直交群 H' 上の保型形式 φ' について調べる. 一つのベクトルの H' における固定化部分群として H を定め，H' を H_1 の部分群とみなす. H 上の保型形式 φ をとり，φ' と $E_{H_1}^*(h,\varphi:s-1/2)$ との H' 上の内積を考える（極の情報・関数等式は Proposition 2 for m で既知）. 一方 unfold すると，これは新谷関数

$$W_{\varphi',\varphi}(h') := \int_{H_{\boldsymbol{Q}}\backslash H_A} \varphi'(hh')\,\varphi(h)\,dh$$

を用いた $H_A\backslash H'_A$ 上の積分で表される. Hecke eigenforms φ,φ' に対してその積分を実行することによって $\xi(\varphi';s)$ の表示が得られ，Proposition 1 for $m+1$ が示される.

4. Andrianov の方法

符号 $(1,m+1)$ の maximal 対称行列 Q_1 が与えられているという §1 の状況に戻る. $L_1 := \boldsymbol{Z}^{m+2}$, $L_1^* = Q_1^{-1}L_1$ とし，L_1^* の primitive element η で $i\eta \in \mathcal{D}$ なるものを一つとる. このとき，η の直交補空間 $\eta^\perp$ の Q_1 への制限は負定値であり，それを R で表す（$m+1$ 次の対称行列）. R に関し，$L_1 \cap \eta^\perp$ が maximal $\boldsymbol{Z}$-integral lattice であると仮定する. この状況を η が reduced であると呼ぶことにする.

$R_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & R & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ とし，R, R_1 の直交群をそれぞれ H, H_1 で表す. H は G_1 における η の固定化部分群，H_1 は G_2 における $\tilde{\eta} := {}^t(0,{}^t\eta,0)$ の固定化部分群に他ならない. §3 で見たように，$H_{1,\infty}^0$ は $\mathcal{X} = \boldsymbol{R}_+^\times \times \boldsymbol{R}^{m+1}$ に推移的に作用している. $\mathcal{X}$ の原点として $X_0 = (r_0, 0)$, $r_0 = Q_1[\eta]/2$ をとり，$H_{1,A}$ のコンパクト部分群 $U_{1,A}^*$ を定める. $g_\eta \in G_{2,\infty}^0$ を $g_\eta\langle Z_0\rangle = i\eta$ となるように選んでおく.

$F \in S_l(K_{2,A}^*)$ 及び $\varphi \in S(U_A^*)$ に対し，大域的 Whittaker-Shintani 関数を

$$W_{F,\varphi}(g) \ := \ \int_{H_{\boldsymbol{Q}}\backslash H_A} F_\eta(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & h & \\ & & 1 \end{pmatrix} g)\,\varphi(h)\,dh \quad (g \in G_{2,A})\ ,$$

$$F_\eta(g) := \int_{V_{1,\boldsymbol{Q}}\backslash V_{1,A}} F(n(x)g)\,\psi(-Q_1(\eta,x))\,dx\,,$$

$$n(x) = \begin{pmatrix} 1 & -{}^t x Q_1 & -Q_1[x]/2 \\ & 1_{m+2} & x \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad (x \in V_1)$$

で定義する．ここで，$V_{1,\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{Q}^{m+2}$ であり，$\psi(x) = \boldsymbol{e}[x] := e^{2\pi i x}$ $(x \in \boldsymbol{R})$ なる $\boldsymbol{Q}\backslash A$ の指標を ψ で表した．$W_{F,\varphi}$ は，F の Fourier 係数 F_η の φ による重み付き平均に他ならない．

Theorem 1 $F \in S_l(K^*_{2,A})$, $\varphi \in S(U^*_A)$ がともに Hecke eigenform のとき，次が成立する．

$$\begin{aligned} Z^*_{F,\varphi}(s) &:= \int_{H_{1,\boldsymbol{Q}}\backslash H_{1,A}} F(hg_\eta)\,E^*_{H_1}(h,\varphi\,;s-1/2)\,dh \\ &= (Q[\eta]/2)^{(s-1/2)/2}\xi(\varphi\,;s+1/2)\begin{Bmatrix} 1 & m:\text{odd} \\ \xi(2s) & m:\text{even} \end{Bmatrix} \\ &\quad\times \int_{\boldsymbol{Q}_A^\times} W_{F,\varphi}(\begin{pmatrix} t & & \\ & 1_{m+2} & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta)\,|t|_A^{s-(m+2)/2}\,d^\times t \\ &= c\cdot W_{F,\varphi}(g_\eta)\cdot\xi(F;s) \qquad (c \neq 0)\,. \end{aligned}$$

[sketch] Theorem 1 の最初の等式（basic identity）を見ておく．

$$\begin{aligned} Z_{F,\varphi}(s) &:= \int_{H_{1,\boldsymbol{Q}}\backslash H_{1,A}} F(hg_\eta)\,E_{H_1}(h,\varphi\,;s-1/2)\,dh \\ &= \int_{H_{1,\boldsymbol{Q}}\backslash H_{1,A}} F(hg_\eta) \sum_{\gamma\in P_{1,\boldsymbol{Q}}\backslash H_{1,\boldsymbol{Q}}} \varphi(\beta(\gamma h))\,|t(\gamma h)|_A^{s-1/2+(m+1)/2}\,dh \\ &= \int_{P_{1,\boldsymbol{Q}}\backslash P_{1,A}} F(n(x)\begin{pmatrix} t & & \\ & \beta & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta)\,\varphi(\beta)\,|t|_A^{s+m/2}\,|t|_A^{-(m+1)}\,dx\,d^\times t\,d\beta \\ &= \int_{V'_{\boldsymbol{Q}}\backslash V'_A}\int_{\boldsymbol{Q}^\times\backslash\boldsymbol{Q}_A^\times}\int_{H_{\boldsymbol{Q}}\backslash H_A} F(n(x)\begin{pmatrix} t & & \\ & \beta & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta)\,\varphi(\beta)\,|t|_A^{s-(m+2)/2}\,dx\,d^\times t\,d\beta \\ &= \int_{V'_{\boldsymbol{Q}}\backslash V'_A}\int_{\boldsymbol{Q}^\times\backslash\boldsymbol{Q}_A^\times}\int_{H_{\boldsymbol{Q}}\backslash H_A} \sum_{\xi\in V_{1,\boldsymbol{Q}}} F_\xi(\begin{pmatrix} t & & \\ & \beta & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta)\,\psi(Q_1(\xi,x)) \\ &\qquad \varphi(\beta)\,|t|_A^{s-(m+2)/2}\,dx\,d^\times t\,d\beta \end{aligned}$$

ここで，V' で V_1 における η の直交補空間 $\eta^\perp$ を表した．

$$\int_{V'_{\boldsymbol{Q}}\backslash V'_A} \psi(Q_1(\xi,x))\,dx \neq 0 \Longleftrightarrow \xi \in \boldsymbol{Q}\cdot\eta$$

より，

$$Z_{F,\varphi}(s) = \int_{\boldsymbol{Q}^\times\backslash\boldsymbol{Q}_A^\times}\int_{H_{\boldsymbol{Q}}\backslash H_A} \sum_{a\in\boldsymbol{Q}^\times} F_{a\eta}(\begin{pmatrix} t & & \\ & \beta & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta)\,\varphi(\beta)\,|t|_A^{s-(m+2)/2}\,d^\times t\,d\beta$$

$$= \int_{\mathbf{Q}_A^\times} W_{F,\varphi}\left(\begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta\right) |t|_A^{s-(m+2)/2}\, d^\times t$$

が得られる（F は尖点形式ゆえ $F_0 = 0$ となることに注意）．

次に，イデール群上の積分が F の L 関数を表すことを見る．各有限素点 p において，$\mathcal{H}^+(H_p, U_p^*)$ の指標 λ，$\mathcal{H}^+(G_{2,p}, K_{2,p}^*)$ の指標 Λ に対し，局所 Whittaker-Shintani 関数の空間を

$$\begin{array}{lll} \mathcal{W}_p(\lambda, \Lambda) & := & \left\{ W : U_p^* \backslash G_{2,p} / K_{2,p}^* \longrightarrow \mathbf{C} \,\middle|\, \text{(i), (ii)} \right\} \\ \text{(i)} & & W(n(x)g) = \psi(Q_1(\eta, x))W(g) \qquad (x \in V_{1,p}) \\ \text{(ii)} & & \phi * W * \Phi = \lambda(\phi)\Lambda(\Phi)W(g) \quad (\phi \in \mathcal{H}^+(H_p, U_p^*),\ \Phi \in \mathcal{H}^+(G_{2,p}, K_{2,p}^*)\ ) \end{array}$$

で定義する．ここで．

$$(\phi * W * \Phi)(g) := \int_{H_p} \int_{G_{2,p}} \phi(x)\, W(xgy)\, \Phi(y^{-1})\, dx\, dy$$

とおいた．$W \in \mathcal{W}(\lambda, \Lambda)$ に対し，

$$\int_{\mathbf{Q}_p^\times} W\left(\begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix}\right) |t|_A^{s-(m+2)/2}\, d^\times t = \frac{L_p(\Lambda; s)}{L_p(\lambda; s+1/2)} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & m : \text{odd} \\ 1 - p^{-2s} & m : \text{even} \end{array} \right\} W(1)$$

となることが，Hecke 環の構造の（Witt 指数に関する）帰納的な性質を用いて示される (cf. [S1])．この局所的な結果より，Theorem 1 の証明が完了する． ∎

Remark $G_{2,p}, H_p$ が共に分解型のとき，局所 Whittaker-Shintani 関数の空間 $\mathcal{W}_p(\lambda, \Lambda)$ は 1 次元で，その明示公式も求められている (cf. [KMS]). 従って大域的 Whittaker-Shintani 関数は，上述のようにイデール群上の積分値が Euler 積となるだけでなく，関数自身が（有限個の素点を除き）各素点での局所 Whittaker-Shintani 関数の積となる．

Proposition 2 より，$\xi(F; s)$ についての結果が得られる．

Corollary $F \in S_l(K_{2,A}^*)$ を Hecke eigenform とする．reduced な $\eta \in V_{1,\mathbf{Q}}$ と符号 σ_φ の Hecke eigenform $\varphi \in S(U_A^*)$ で，$W_{F,\varphi}(g_\eta) \neq 0$ なるものが存在すると仮定する．このとき，$\xi(F; s)$ は有理型関数として全 s 平面に解析接続され，関数等式 $\xi(F; s) = \sigma_\varphi^m \xi(F; 1-s)$ を満たす．また，possible pole は，$s = (m+2)/2 - k$ $(0 \le k \le m+1,\ k \in \mathbf{Z})$ で高々 1 位のみである．

Remark Corollary の仮定の元で，関数等式は

$$\xi(F; s) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & m : \text{even} \\ (-1)^l \prod_p \sigma_p(F) & m : \text{odd} \end{array} \right\} \xi(F; 1-s)$$

と書かれる．ここで，$\sigma_p(F) = \pm 1$ を $F(g(-1)_p) = \sigma_p(F) F(g)$ で定めた．

5. theta lift

S を正定値, even integral, maximal な m 次対称行列とし, $Q_1 := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -S & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ とする. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2$, $h = [\xi, \eta, \zeta] \in V \times V \times \boldsymbol{G}_a$ $(V_{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{Q}^m)$ を

$$hg = \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^t\eta S & S(\xi,\eta)-\zeta & S[\eta]/2 \\ & 1 & {}^t\xi S & S[\xi]/2 & \zeta \\ & & 1_m & \xi & \eta \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & & & \\ -c & d & & & \\ & & 1_m & & \\ & & & a & b \\ & & & c & d \end{pmatrix}$$

により, G_2 に埋め込む. この像を G^J で表し, Jacobi 群と呼ぶ.

G^J_∞ は $\mathfrak{H} \times \boldsymbol{C}^m$ に推移的に作用する：

$$(hg)\langle(z,w)\rangle = (g\langle z\rangle, wj(g,z)^{-1} + \xi \cdot g\langle z\rangle + \eta)\ .$$

ここで, $SL_2(\boldsymbol{R})$ の上半平面への作用および保型因子は

$$g\langle z\rangle = (az+b)/(cz+d), \qquad j(g,z) = cz+d$$

なる通常のものである. l, N を自然数とし, weight l, index $N \cdot S$ の正則保型因子を

$$J_{l,N}(hg,(z,w)) := j(g,z)^l\, \boldsymbol{e}[N\left\{-\zeta + \frac{c}{2}S[w]j(g,z)^{-1} - S(\xi,w)j(g,z)^{-1} - g\langle z\rangle S[\xi]/2\right\}]$$

で定義する. $\Gamma^J := G^J \cap SL_{m+4}(\boldsymbol{Z})$ とおく. $\mathfrak{H} \times \boldsymbol{C}^m$ 上の正則関数 f で,

$$\begin{aligned} f(\gamma\langle(z,w)\rangle) &= J_{l,N}(\gamma,(z,w))\, f(z,w) \qquad (\gamma \in \Gamma^J)\ , \\ f(z,w) &= \sum_{n\in\boldsymbol{Z},\alpha\in L^*,2nN-S[\alpha]>0} a_f(n,\alpha)\, \boldsymbol{e}[nz - S(\alpha,w)] \end{aligned}$$

を満たすものを, weight l, index $N \cdot S$ の Jacobi 尖点形式と呼び, その全体を $\mathfrak{S}_{l,N}(\Gamma^J)$ で表す.

index S の Jacobi 尖点形式の空間 $\mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ には Jacobi Hecke 環 $\mathcal{H}^J_p$ が作用する. その中心 $\mathcal{H}^{J,+}_p$ の指標 $\lambda : \mathcal{H}^{J,+}_p \longrightarrow \boldsymbol{C}$ に対し, local standard L 関数 $L_p(\lambda;s)$ が定義される. $S \in GL_m(\boldsymbol{Z}_p)$ のとき, m が偶数［resp. 奇数］ならば $L_p(\lambda;s)^{-1}$ は p^{-s} の 3 次[resp. 2 次] 多項式である (cf. [S3]).

$\mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ が $\mathcal{H}^{J,+}_p$ の同時固有関数 (固有値 λ_f) のとき, $L(f;s) := \prod_{p<\infty} L_p(\lambda_f;s)$ を global standard L 関数と呼ぶ. ガンマ因子を

$$L_\infty(f;s) = \begin{cases} (\det S)^{s/2}\, \Gamma_{\boldsymbol{C}}(s+l-(m+2)/2)\, \Gamma_{\boldsymbol{R}}(s+a) & m : \text{even} \\ (2^{-1}\det S)^{s/2}\, \Gamma_{\boldsymbol{C}}(s+l-(m+2)/2) & m : \text{odd} \end{cases}$$

で定める．ここで，$m \equiv 0 \pmod 4$ のとき $a=1$ とし，$m \equiv 2 \pmod 4$ のとき $a=0$ とおいた．

Proposition 3 $f \in \mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ を Hecke eigenform とする．$\xi(f;s) := L_\infty(f;s)\,L(f;s)$ は有理型関数として全 s 平面に解析接続され，関数等式

$$\xi(f;s) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & m \equiv 1,3 \pmod 8 \\ 1 & \text{otherwise} \end{array} \right\} \xi(f;1-s)$$

を満たす．また，$s=0,\ 1$ が高々 1 位の possible pole である他では正則．

$f \in \mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ に対し，IV 型領域 $\mathcal{D}$ 上の正則関数 $I(f)$ を

$$I(f)(Z) \ := \sum_{\eta \in L_1^*,\ i\eta \in \mathcal{D}} a_{I(f)}(\eta)\, e[Q_1(\eta, Z)] \qquad (Z \in \mathcal{D}) ,$$

$$a_{I(f)}(\begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ b \end{pmatrix}) \ := \sum_{r | a,b,\alpha} r^{l-1}\, a_f(abr^{-2}, \alpha r^{-1}) \qquad (a, b \in \boldsymbol{Z},\ \alpha \in L^*)$$

により定義する．$I(f)$ は $\Gamma_2^* := G_{2,\boldsymbol{Q}} \cap G_{2,\infty}^0 \prod_{p<\infty} K_{2,p}^*$ に関する weight l の正則尖点形式となる．$G_{2,A} = G_{2,\boldsymbol{Q}} G_{2,\infty}^0 K_{2,A}^*$ ゆえ，これは $S_l(K_{2,A}^*)$ の元を定める．$I : \mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J) \longrightarrow S_l(K_{2,A}^*)$ を theta lift と呼ぶ．

Remark $\mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ は，$SL_2(\boldsymbol{Z})$ に関する weight $l-m$ の（ベクトル値）正則保型形式の空間とみなされる．上記の theta lift I は，Oda [O1] の構成の Jacobi 形式版である．この定式化の一つのメリットは，I の単射性にある．Siegel modular 形式の場合（$m=1$）に，Zagier [Z] により導入されたもので，Saito-Kurokawa 予想の解決に用いられた．

Proposition 4 $f \in \mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ を Hecke eigenform とする．このとき，$I(f) \in S_l(K_{2,A}^*)$ も Hecke eigenform で，次が成立する．

$$L(I(f);s) = L(f;s) \prod_{j=0}^{m} \zeta(s-j+m/2) .$$

Remark Proposition 3, 4 より，theta lift の像 (old forms) については，standard L 関数 $\xi(I(f);s)$ の解析接続・関数等式及び $s=(m+2)/2$ で極を持つことが分かる．更に，$s=(m+2)/2$ での極の存在は，old form を特徴付けると思われる．$\xi(F;s)$ についての (条件なしの) 結果が得られている場合には，これは確かめられている（cf. [O2], [S2]）.

6. Kohnen-Skoruppa の方法

G_2 上の weight 0 の Eisenstein 級数について復習しておく．定値直交群 $G=O(S)$ 上の保型形式の空間 $S(K_A^*)$ を §3 と同様に定める．P_2 を G_2 の上三角極大放物部分群で，Levi part が $GL_2 \times G$ となるものとする：

$$P_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ & \beta & * \\ & & \alpha' \end{pmatrix} \middle| \alpha \in GL_2,\ \beta \in G \right\}, \quad \alpha' = J^{-1\,t}\alpha^{-1} J .$$

岩澤分解 $G_{2,A} = P_{2,A}K^*_{2,A}$ により，$g \in G_{2,A}$ は

$$g = \begin{pmatrix} \alpha(g) & * & * \\ & \beta(g) & * \\ & & \alpha(g)^{-1} \end{pmatrix} k(g), \quad \alpha(g) \in GL_2(\boldsymbol{Q}_A),\ \beta(g) \in G_A,\ k(g) \in K^*_{2,A}$$

の形に書かれる．$\varphi \in S(K^*_A)$, $s \in \boldsymbol{C}$ に対し，$G_{2,A}$ 上の Eisenstein 級数を

$$E_{G_2}(g, \varphi; s) := \sum_{\gamma \in P_{2,\boldsymbol{Q}} \backslash G_{2,\boldsymbol{Q}}} \varphi(\beta(\gamma g)) \, |\det \alpha(\gamma g)|_A^{s+(m+1)/2}$$

で定義する．右辺は，$\mathrm{Re}\,(s) > (m+1)/2$ で広義一様絶対収束する．$\varphi \in S(K^*_A)$ が Hecke eigenform のとき，

$$E^*_{G_2}(g, \varphi; s) := \xi(\varphi; s+3/2) \left\{ \begin{array}{ll} \xi(2s+1) & m : \text{even} \\ \xi(2s+2) & m : \text{odd} \end{array} \right\} E_{G_2}(g, \varphi; s)$$

とおく．

Proposition 5 $\varphi \in S(K^*_A)$ を符号 σ_φ の Hecke eigenform とする．

(1) $E^*_{G_2}(g, \varphi; s)$ は有理型関数として全 s 平面に解析接続され，関数等式

$$E^*_{G_2}(g, \varphi; s) = \sigma_\varphi^m \, E^*_{G_2}(g, \varphi; -s)$$

を満たす．

(2) $E^*_{G_2}(g, \varphi; s)$ は $s = (m+1)/2 - k$ $(0 \le k \le m+1,\ k \in \boldsymbol{Z})$ で高々 1 位の極を持つ以外は正則である．$s = (m+1)/2$ で極を持つ必要十分条件は，φ が定数関数であることであり，このとき留数は定数となる．

(3) $\sigma_\varphi = -1$ ならば，$E^*_{G_2}(g, \varphi; s)$ は entire である．

P_2 の unipotent radical を N_2 とし，P_2 の部分群 $\boldsymbol{G}$ を

$$\boldsymbol{G} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ & \beta & * \\ & & \alpha' \end{pmatrix} \in G_2 \,\middle|\, \alpha \in SL_2,\ \beta \in G \right\} = (SL_2 \times G) \cdot N_2$$

で定める．$\boldsymbol{G}$ は

$$Z := \{ z(\zeta) \mid \zeta \in \boldsymbol{G}_a \}, \qquad z(\zeta) := n(\begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$$

を中心とする非簡約群で，Jacobi 群 G^J と $G = O(S)$ との半直積となる．

$\boldsymbol{K}^*_A := \boldsymbol{G}_A \cap K^*_{2,A}$ に関する weight l，index $N \cdot S$ の Jacobi 尖点形式が §5 と同様に定義される．その全体を $\mathfrak{S}_{l,N}(\boldsymbol{K}^*_A)$ で表す（領域上の Jacobi 尖点形式の空間の，類数 $|G_{\boldsymbol{Q}} \backslash G_A / K^*_A|$ 個の直積と同型となる）．$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}' \in \mathfrak{S}_{l,N}(\boldsymbol{K}^*_A)$ の (Petersson) 内積を

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}' >_N := \int_{Z_A \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{Q}} \backslash \boldsymbol{G}_A} \boldsymbol{f}(g) \, \overline{\boldsymbol{f}'(g)} \, dg$$

で定義する．また，この空間に $S(K_A^*)$ を

$$(\boldsymbol{f}\otimes\varphi)(g) := \boldsymbol{f}(g)\,\varphi(\beta(g)) \qquad (\boldsymbol{f}\in\mathfrak{S}_{l,N}(\boldsymbol{K}_A^*),\ \varphi\in S(K_A^*))$$

と作用させる．

$F\in S_l(K_{2,A}^*)$ の N-th Fourier-Jacobi 係数 F_N を

$$F_N(g) := \int_{\boldsymbol{Q}\backslash\boldsymbol{Q}_A} F(z(\zeta)g)\,\psi(-N\zeta)\,d\zeta$$

で定める．定義より，F_N の $\boldsymbol{G}_A$ への制限は $\mathfrak{S}_{l,N}(\boldsymbol{K}_A^*)$ の元を定める．特に，$F\in S_l(K_{2,A}^*)$ と $\boldsymbol{f}\in\mathfrak{S}_{l,1}(\boldsymbol{K}_A^*)$ に対し，大域的 Whittaker-Shintani 関数を

$$W_{F,\boldsymbol{f}}(g) := \int_{Z_A\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{Q}}\backslash\boldsymbol{G}_A} F_1(g_1g)\,\overline{\boldsymbol{f}(g_1)}\,dg_1$$

で定義する．$W_{F,\boldsymbol{f}}(1) = < F_1|_{\boldsymbol{G}_A}, \boldsymbol{f} >_1$ である．

Theorem 2　$F\in S_l(K_{2,A}^*)$ を Hecke eigenform, $\varphi\in S(K_{0,A}^*)$ を Hecke eigenform とする．Jacobi 尖点形式 $f\in\mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ の theta lift $I(f)$ の $\boldsymbol{G}_A$ への制限を $\boldsymbol{f}$ で表す．このとき，次が成立する．

$$\begin{aligned}
Z_{F,\varphi,f}^*(s) &:= \int_{G_{2,\boldsymbol{Q}}\backslash G_{2,A}} F(g)\,E_{G_2}^*(g,\varphi;s-1/2)\,\overline{I(f)(g)}\,dg \\
&= c'\cdot 2^{-s}\Gamma_{\boldsymbol{C}}(s+l-(m+2)/2)\xi(\varphi;s+1)\times\left\{\begin{array}{ll}\xi(2s) & m:\text{even}\\ \xi(2s+1) & m:\text{odd}\end{array}\right\} \\
&\quad\times\int_{GL_2(\boldsymbol{Q}_{A,f})\cap M_2(\boldsymbol{Z}_{A,f})} W_{F,\boldsymbol{f}\otimes\overline{\varphi}}(\begin{pmatrix} g & & \\ & 1_m & \\ & & g'\end{pmatrix})\,|\det g|_A^{s-m/2}\,dg \\
&= c\cdot W_{F,\boldsymbol{f}\otimes\overline{\varphi}}(1)\cdot\xi(F;s)\ .
\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{Q}_{A,f}$ は $\boldsymbol{Q}_A$ の有限部分，$\boldsymbol{Z}_{A,f}=\prod_{p<\infty}\boldsymbol{Z}_p$ である．

[sketch]　Theorem 2 の最初の等式をまず見る．標準的な unfolding により，任意の $F,\ F'\in S_l(K_{2,A}^*)$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{2,\boldsymbol{Q}}\backslash G_{2,A}} F(g)\,E_{G_2}(g,\varphi;s-1/2)\,\overline{F'(g)}\,dg \\
&= c_1\,2^{-s}\,\Gamma_{\boldsymbol{C}}(s+l-\frac{m+2}{2})\sum_{N=1}^{\infty} N^{-(s+l-(m+2)/2}\,e^{4\pi N}\ < F_N|_{\boldsymbol{G}_A}\otimes\varphi, F'|_{\boldsymbol{G}_A} >_N\ .
\end{aligned}$$

一方，shift operator $\boldsymbol{V}_N:\mathfrak{S}_{l,1}(\boldsymbol{K}_A^*)\longrightarrow\mathfrak{S}_{l,N}(\boldsymbol{K}_A^*)$ を用いて Whittaker-Shintani 関数の積分を計算することにより，$F\in S_l(K_{2,A}^*)$，$\boldsymbol{f}\in\mathfrak{S}_{l,1}(\boldsymbol{K}_A^*)$，$\varphi\in S(K_A^*)$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\int_{GL_2(\boldsymbol{Q}_{A,f})\cap M_2(\boldsymbol{Z}_{A,f})} W_{F,\boldsymbol{f}\otimes\overline{\varphi}}(\begin{pmatrix} g & & \\ & 1_m & \\ & & g'\end{pmatrix})\,|\det g|_A^{s-m/2}\,dg \\
&= c_2\sum_{N=1}^{\infty} N^{-(s+l-(m+2)/2)}\,e^{2\pi N}\ < F_N|_{\boldsymbol{G}_A}\otimes\varphi, \boldsymbol{V}_N\boldsymbol{f} >_N
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．$V_N(I(f)_1|_{G_A}) = e^{2\pi(N-1)}\cdot I(f)_N|_{G_A}$ であることに注意して，basic identity を得る．

Euler 積への分解は，

$$\mathcal{W}_p := \left\{ W : \boldsymbol{K}_p \backslash G_{2,p}/K^*_{2,p} \longrightarrow \boldsymbol{C} \mid W(z(\zeta)g) = \psi(z)W(g) \quad \zeta \in \boldsymbol{Q}_p \right\}$$

への Hecke 環 $\mathcal{H}(G_{2,p}, K^*_{2,p})$ の作用を詳しく見ること基づく．$W \in \mathcal{W}_p$ が

$$W * \Phi = \Lambda(\Phi)\, W \quad (\Phi \in \mathcal{H}^+(G_{2,p}, K^*_{2,p})\ ), \qquad \phi * W(1) = \lambda(\phi) W(1) \quad (\phi \in \mathcal{H}^+(G_p, K^*_p))$$

を満たすとき，適当な付加条件の下で，

$$\begin{aligned} &\int_{GL_2(\boldsymbol{Q}_p)\cap M_2(\boldsymbol{Z}_p)} W(\begin{pmatrix} g & & \\ & 1_m & \\ & & g' \end{pmatrix}) \,|\det g|_p^{s-m/2}\, dg \\ = \;& W(1)L_p(\Lambda; s)L_p(\lambda; s)^{-1} \begin{cases} 1 - p^{-2s} & m : \text{even} \\ 1 - p^{-(2s+1)} & m : \text{odd} \end{cases} \end{aligned}$$

の成り立つことが示され，Euler 積への分解を得る． ∎

Remark $F_1|_{G_A} \neq 0$ ならば，$\varphi \in S(K^*_A)$，$f \in \mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ で $W_{F, f\otimes\overline{\varphi}}(1) \neq 0$ なるものが存在する．従って，Proposition 5 より $\xi(F; s)$ の解析接続・関数等式が得られる．

7. 新谷関数による方法

Proposition 1, 2 の証明においては，新谷関数の利用が鍵を担った（§3 Remark 参照）．この手法は（原理的には）対称行列の符号にはよらないので，正則保型形式の場合にも適用可能である（但し無限素点での計算は易しくないと思われる）．

L_1^* の primitive element ξ を $Q_1[\xi] < 0$ にとり，Q_1 の $\xi^\perp$ への制限を R_1 とおく．R_1 の符号は $(1, m)$ である．以下，R_1 に関して $M_1 := L_1 \cap \xi^\perp$ が maximal であると仮定する．

$$R_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & R_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & R_2 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

とし，R_i の直交群を H_i $(i = 2, 3)$ とおく．L_2 の基底を取り替え，

$$Q_1 = \begin{pmatrix} R_1 & -R_1\alpha \\ -{}^t\alpha R_1 & -2a \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}, \quad \Delta = 2a + R_1[\alpha]$$

とすると，H_2 は G_2 における $\tilde{\xi}$ の，G_2 は H_3 における η の固定化部分群となる．ここで，

$$\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^t\eta = (a, 0, {}^t\alpha, 0, 1)$$

H_3 の上三角極大放物部分群 P_3 で，Levi part が $GL_1 \times H_2$ なるものを表す．$H_{3,\infty}$ の極大コンパクト群 $U^*_{3,\infty} \cong SO(3) \times SO(m+2)$ を $U^*_{3,\infty} \cap G_{2,\infty} = K^*_{2,\infty}$ となるように選んでおく．$SO(3)$ の heighest weight l の既約表現 (τ_l, V_l) を，($SO(m+2)$ 上 trivial として) $U^*_{3,\infty}$ の表現とみなす．

岩澤分解 $H_{3,A} = P_{3,A}U^*_{3,A}$ により，$h \in H_{3,A}$ は

$$h = \begin{pmatrix} t(h) & * & * \\ & \beta(h) & * \\ & & t(h)^{-1} \end{pmatrix} k(g), \quad t(h) \in \boldsymbol{Q}_A^\times,\ \beta(h) \in H_{2,A},\ u(h) \in U^*_{3,A}$$

の形に書かれる．$H_{2,A}$ 上の weight l の正則尖点形式 $f \in S_l(U^*_{2,A})$ に対し，$H_{3,A}$ 上の Eisenstein 級数を

$$E_{H_3}(h, \overline{f}; s) := \sum_{\gamma \in P_{3,Q}\backslash H_{3,Q}} \overline{f(\beta(\gamma h))}\, |t(\gamma h)|_A^{s+(m+3)/2}\, \tau_l(u(h)_\infty^{-1})\, v_l$$

で導入する ($v_l \in V_l$ は heighest weight vector)．

Theorem 3 $F \in S_l(K^*_{2,A})$, $f \in S_l(U^*_{2,A})$ を共に Hecke eigenform とする．このとき，次が成立する．

$$\begin{aligned} Z_{F,f}(s) &:= \int_{G_{2,Q}\backslash G_{2,A}} F(g)\, E_{H_3}(g, \overline{f}; s-1/2)\, dg \\ &= \int_{H_{2,A}\backslash G_{2,A}} W_{F,f}(\beta(g)^{-1}g)\, |t(g)|_A^{s+(m+2)/2}\, dg\, v_l \\ &= Z_{F,f,\infty}(s) \frac{L(F;s)}{L(\overline{f}; s+1/2)} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & m : \text{odd} \\ \zeta(2s)^{-1} & m : \text{even} \end{array} \right\} v_l . \end{aligned}$$

ここで $W_{F,f}$ は大域的新谷関数

$$W_{F,f}(g) := \int_{H_{2,Q}\backslash H_{2,A}} F(hg)\, \overline{f(h)}\, dh$$

であり，$Z_{F,f,\infty}(s)$ は無限素点での積分を表す．

Remark Therorem 3 の basic identity を示す際，unfolding において様々な orbit が現れる．F の cuspidality により，main orbit 以外の積分が消え，アデール上の積分に書き直される (cf. [MS 1])．

References

[A] Andrianov, A.N. : Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2, Russian Math. Surveys 29 (1974), 45 – 116.

[KMS] Kato, S., Murase, A. and Sugano, T. : Whittaker-Shintani functions for orthogonal groups, Tohoku Math. J. 55 (2003), 1 - 64.

[KS] Kohnen, W. and Skoruppa, N.-P. : A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree tow, Invent. Math. 95 (1989), 541 - 558.

[MS1] Murase, A. and Sugano, T. : Shintani functions and its application to automorphic L-functionsfor classical groups, I. The case of orthogonal groups. Math. Ann. 299 (1994), 17 - 56.

[MS2] Murase, A. and Sugano, T. : On standard L-functions attached to automorphic forms on definite orthogonal groups, Nagoya Maty. J. 152 (1998), 57 - 96.

[MS3] Murase, A. and Sugano, T. : On standard L-functions associated witgh holomorphic cusp forms on $O(2, m+2)$, preprint.

[O1] Oda, T. : On modular forms associated with indefinite quadrfatic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. 231 (1977), 97 - 144.

[O2] Oda, T. : On the poles of Andrianov L-functions, Math. Ann. 256 (1981), 323 - 340.

[S1] Sugano, T. : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on $SO(2, q)$, Advanced Studies in Pure Math. 7 (1985), 333 - 362.

[S2] Sugano, T. : On the L-functions associated with hermitian modular forms of genus 2, Bull. Fac. Educ. Mie Univ. 42 (1991), 1 - 28.

[S3] Sugano, T. : Jacobi forms and the theta liftings, Commentarii Mathematici Univ. St. Pauli 44 (1995), 1 - 58.

[Z] Zagier, D. : Sur les conjecture de Saito-Kurokawa (d'apres H. Maass), Seminaire Delange-Pisot-Poitou 1979 - 1980, Progress in Math. 5 (1980), Birkhauser, 371 -