数理解析研究所講究録 1342 巻 2003 年 107-116

$O(p,q)$ の極小ユニタリ表現のシュレディンガーモデル*

京都大学・数理解析研究所　小林 俊行 (Toshiyuki Kobayashi)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University
toshi@kurims.kyoto-u.ac.jp

概 要

D 型の Lie 群 $O(p,q)$ の極小ユニタリ表現を Hilbert 空間 $L^2(C)$ に実現する方法を概説し, さらにその背景や考え方を説明する. ここで, $p+q$ は 6 以上の偶数であり, C は $\mathbb{R}^{p+q-2}$ 上の二次形式の零点として表される $(p+q-3)$ 次元の錐である. 本稿で取り扱っている極小ユニタリ表現は, p, q が一般の場合は, 最高ウェイト表現でもなく, また spherical な表現でもないことに注意する. 本稿で解説する極小表現の L^2-空間における実現は, メタプレクティック群 $Mp(n,\mathbb{R})$ の極小表現 (Weil 表現) の Schrödinger モデルの類似物と考えられる.

0 序

Weil 表現 ϖ (あるいは Segal-Shale-Weil 表現とも oscillator 表現という名前でも呼ばれている) はメタプレクティック群 $Mp(n,\mathbb{R})$ の非常に "小さな" ユニタリ表現である. Weil 表現の Gel'fand-Kirillov 次元は n であり, これは $Mp(n,\mathbb{R})$ の既約無限次元ユニタリ表現の Gel'fand-Kirillov 次元のとりうる値の最小値となっている (大雑把にいうと, これが "極小" という言葉の由来である). 同じ n を次元とする Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 上の L^2-関数のなす Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ を考えよう. この $L^2(\mathbb{R}^n)$ に Weil 表現を実現したモデルがいわゆる **Schrödinger モデル**である. $Mp(n,\mathbb{R})$ は実シンプレクティック群 $Sp(n,\mathbb{R})$ の 2 重被覆群なので, 今までに出てきた記号を書きとめておくと次のようになる:

*京都大学数理解析研究所における短期共同研究「IV 型対称領域上の保型形式の研究」
2002 年 12 月 24 日〜12 月 26 日 (研究代表者: 織山孝幸氏) における講演記録

$$Mp(n,\mathbb{R}) \overset{\varpi}{\curvearrowright} L^2(\mathbb{R}^n)$$
$$\downarrow \text{double covering}$$
$$Sp(n,\mathbb{R})$$

次に, Weil 表現の Schrödinger モデルの特徴のいくつかを手短かに述べよう.

- 内積がとても はっきり している. 実際, 内積は L^2-内積によって与えられる.

  一般に, ユニタリ主系列表現以外のユニタリ表現の内積は, それほど簡明には書けない (核関数, 微分作用素が必要になったりする) ことが多いので, 内積が簡明かつ具体的に書けるということは大きな特徴の 1 つである.

- ある極大放物型部分群 $P_{\max}$ (Siegel parabolic) に制限すると, そこでの作用は はっきり と書ける.

- Siegel parabolic の反転を与える Weyl 群の元を w_0 とすると, $\varpi(w_0)$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ におけるユニタリ作用素であるが、それは本質的に Fourier 変換 $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ と同一視される.

- $P_{\max}$ と w_0 以外の群 $Mp(n,\mathbb{R})$ の元の作用はあまり簡明な式では書けない.

  (このことは G は関数空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ に作用するが, 空間 $\mathbb{R}^n$ そのものには作用していないことに起因する. 実際 ϖ の微分表現に 2 階の微分作用素が現れる.)

- 最小 K-type を与える関数は具体的に書ける

  (実際, $e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ は Weil 表現の最小 K-type を与える関数であり, この関数はまた Weil 表現の Fock モデルを定義するときに基本的な役割を果たす.)

本稿の目標

D 型の群 $O(p,q)$ $(p+q \in 2\mathbb{N},\ p,q \geq 2,\ p+q > 4)$ にも極小ユニタリ表現 $\varpi^{p,q}$ が存在する ([1, 3, 5, 10]). $\varpi^{p,q}$ のモデルとして, 適当な (Weil 表現に対する Schrödinger モデルの $L^2(\mathbb{R}^n)$ に相当するような) Hilbert 空間 $L^2(C)$ 上に $O(p,q)$ のユニタリ表現を定義したい. もし, このような実現が存在するならば, C の次元は $\varpi^{p,q}$ の Gel'fand-Kirillov 次元, すなわち, $(p+q-3)$ 次元であることが予期される. 実際, このようなモデルが存在することを本稿で具体的に解説する. 詳しい証明やアイディアについては [7, 8] も参照されたい. また同じ表現の別の空間における実現や、そこにおける不変な内積の具体表示については [1, 5, 6, 9, 10] で扱われている.

なお, $\varpi^{p,q}$ は

$p=2$ または $q=2 \Leftrightarrow$ 最高ウェイト加群 (の直和)
$p=q \qquad\qquad \Leftrightarrow$ K-fixed vector をもつ (spherical な) 表現

という性質をもつ．すなわち，$p,q \geq 3$ かつ $p \neq q$ ならば，既約ユニタリ表現 $\varpi^{p,q}$ は spherical でも最高ウェイト表現でもない．

1 $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$ の等長変換群の既約ユニタリ表現

この節では次節の準備として，初等的なやり方で等長変換群 $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{p-1,q-1})$ の既約ユニタリ表現を 1 つ構成する．特に断らない限り，

$$n = p + q - 2$$

とする．

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p+q-2}$ に，不定符号の計量

$$ds^2 = d\zeta_1^2 + \cdots + d\zeta_{p-1}^2 - d\zeta_p^2 - \cdots - d\zeta_{p+q-2}^2$$

を備えた擬リーマン多様体を $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$ と書くことにする．さらに，$\mathbb{R}^{p+q-2}$ 上の 2 次形式 Q を

$$Q(\zeta) = \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_{p-1}^2 - \zeta_p^2 - \cdots - \zeta_{p+q-2}^2$$

と定義し，2 次形式 Q に対応する錐を次の式で定義する：

$$C := \{\zeta \in \mathbb{R}^n : Q(\zeta) = 0, \zeta \neq 0\}$$

明らかに，C の次元は $p+q-3$ である．‘極座標’ を用いて表せば

$$C = \{(r\omega, r\eta) : r > 0, \omega \in S^{p-2}, \eta \in S^{q-2}\}$$

と書ける．錐 C 上の測度 $d\mu$ を座標 $(r\omega, r\mu)$ $(r > 0,\ \omega \in S^{p-2},\ \eta \in S^{q-2})$ に関して

$$d\mu = \frac{1}{2} r^{n-3} dr d\omega d\eta$$

と定める．このとき，$d\mu$ は $O(p-1, q-1)$-不変な測度となる．このことは次のようにして考えれば分かりやすい．すなわち，$\mathbb{R}^n$ 上の $(n-1)$-form ω で

$$dQ \wedge \omega = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$$

となるものをとると，ω のとり方によらず

$$\omega|_C = d\mu$$

が成り立つ．dQ および $d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$ は $O(p-1, q-1)$-不変なので $d\mu = \omega|_C$ も $O(p-1, q-1)$-不変になる．

なお, $O(p-1,q-1)$ は C に推移的に作用し, C は等質空間として

$$C \simeq O(p-1,q-1)/(O(p-2,q-2) \ltimes \mathbb{R}^{p+q-4})$$

と表される.

さて, Hilbert 空間 $L^2(C,d\mu)$ 上に, $O(p-1,q-1)$ の表現 π を関数の引き戻しによって定義すると, $d\mu$ は $O(p-1,q-1)$-不変なので π はユニタリ表現になる.

一方, 加法群 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p+q-2}$ は $L^2(C,d\mu)$ に

$$\pi(b) : L^2(C,d\mu) \to L^2(C,d\mu), \qquad \psi(\zeta) \mapsto e^{2\sqrt{-1}(b_1\zeta_1+\cdots+b_n\zeta_n)}\psi(\zeta)$$

によって作用する. ここで $b = (b_1,\cdots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ とした.

上記の 2 つの表現 $O(p-1,q-1) \curvearrowright L^2(C,d\mu)$ と $\mathbb{R}^{p+q-2} \curvearrowright L^2(C,d\mu)$ を合わせると半直積群

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{p-1,q-1}) \simeq O(p-1,q-1) \ltimes \mathbb{R}^{p+q-2}$$

の表現が定まる. すなわち, 次の命題が成り立つ:

命題 1. 1) $(\pi, L^2(C,d\mu))$ は, 半直積群 $O(p-1,q-1) \ltimes \mathbb{R}^{p+q-2}$ のユニタリ表現となる.

2) $(\pi, L^2(C,d\mu))$ は, 既約である.

証明 (easy). (1) は直接, 群準同型の公理を確かめればよい.

(2) は Mackey 理論から容易に従う. 別の初等的な見方を説明しよう. (以下の議論は $\mathbb{R}^n$ の Wiener 空間へのアファイン変換群の作用と類似に行える ([4], 第 2 章, 第 11 章参照)).

$W \subset L^2(C,d\mu)$ が $\mathbb{R}^{p+q-2}$-不変な閉部分空間とする.

$\Longrightarrow$ 適当な可測集合 $E \subset C$ を選んで $W = L^2(E)$ と表される.

一方, W は $O(p-1,q-1)$-不変部分空間

$\Longrightarrow$ E は $O(p-1,q-1)$-不変 (測度 0 の集合を除いて)

$\Longrightarrow$ $E = \emptyset$ または C (測度 0 の集合を除いて).

($\because$ $O(p-1,q-1)$ は C に推移的に作用するので.)

$\Longrightarrow$ $W = \{\mathbf{0}\}$ または $L^2(C)$.

従って, $(\pi, L^2(C))$ が既約であることが証明された.

$\square$

2 表現を等長変換群から共形変換群に拡張する.

一般に, 部分群の既約表現を (同じ表現空間上に) より大きな群に拡張できることは滅多にない. しかし, 極小表現のように極めて小さな表現ではこのような現象はしばしば起こる ([12] 参照).

この節では, $L^2(C,d\mu)$ 上に定義された群 $O(p-1,q-1)\ltimes\mathbb{R}^{p+q-2}$ の表現を $O(p,q)$ に拡張する. 拡張した表現は結果的に, $O(p,q)$ の極小表現 $\varpi^{p,q}$ と同型となる. この 2 つの群

$$O(p-1,q-1)\ltimes\mathbb{R}^{p+q-2}\subset O(p,q)$$

はそれぞれ擬リーマン多様体 $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$ に関する

$$\text{等長変換群}\subset\text{(有理型) 共形変換群}$$

という幾何的な意味をもっている. Lie 環のレベルでこの包含関係を書き下してみよう. 最初に $O(p,q)$ の Lie 環 $\mathfrak{o}(p,q)$ の次のような分解を考える:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathfrak{g} & = & \bar{\mathfrak{n}} & \oplus & \mathfrak{m} & \oplus & \mathfrak{a} & \oplus & \mathfrak{n}\\
\| & & \|③ & & \|② & & \|① & & \|④\\
\mathfrak{o}(p,q) & = & \mathbb{R}^{p+q-2} & \oplus & \mathfrak{o}(p-1,q-1) & \oplus & \mathbb{R}E & \oplus & \mathbb{R}^{p+q-2}
\end{array}$$

ここで, ①, ②, ③, ④ の同一視を説明しよう:

① は $\mathfrak{a}$ の生成元を次のように定める.

$$E=\left(\begin{array}{c|c|c} & & 1\\ \hline & 0 & \\ \hline 1 & & \end{array}\right).$$

② では

$$\mathfrak{o}(p-1,q-1)\simeq\{\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & X & \\ \hline & & \end{array}\right):X\in\mathfrak{o}(p-1,q-1)\}$$

によって両者を同一視している.

③, ④:

$n=p+q-2$ 次元のベクトル $\vec{v}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ に対して,

$$\vec{v}_\varepsilon=(a_1,\cdots,a_{p-1},-a_p,\cdots,-a_n)$$

とおく.

③ の同一視は

$$\mathbb{R}^n\xrightarrow{\sim}\bar{\mathfrak{n}},\qquad \vec{v}\mapsto\begin{pmatrix}0 & -\vec{v}_\varepsilon & 0\\ \vec{v} & 0 & \vec{v}\\ 0 & \vec{v}_\varepsilon & 0\end{pmatrix}$$

④ の同一視は

$$j:\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathfrak{n}, \qquad \vec{v}\mapsto\begin{pmatrix}0 & -\vec{v_\varepsilon} & 0\\ \vec{v} & 0 & -\vec{v}\\ 0 & -\vec{v_\varepsilon} & 0\end{pmatrix}$$

によって行う.

次に G の極大放物型部分群 $P_{\max}$ を

$$P_{\max}=MA\overline{N}$$

と定義する. $G=O(p,q)$ における $P_{\max}$ は, シンプレクティック群 $Sp(n,\mathbb{R})$ における Siegel の放物型部分群と同様な役割を担うことになる. ただし

$$\begin{aligned}M&=M_+\cup m_0M_+,\\ A&=\exp\mathfrak{a},\\ \overline{N}&=\exp\overline{\mathfrak{n}},\\ M_+&=O(p-1,q-1),\\ m_0&=-I_{p+q}\end{aligned}$$

とおいた. m_0 は G の中心の元であるが, $m_0\notin M_+$ に注意する. 群 M_+ は $\overline{N}$ を正規化するので, $M_+\overline{N}$ は G の部分群になる. 群 $M_+\overline{N}$ は第 1 節で扱った半直積群 $O(p-1,q-1)\ltimes\mathbb{R}^{p-1,q-1}$ に同型となる.

定理 1. ([7],Theorem 4.9) $M_+\overline{N}$ の既約表現 $(\pi,L^2(C,d\mu))$ は $G=O(p,q)$ の既約ユニタリ表現に拡張できる. $p+q\geq 8$ のとき, この表現は $O(p,q)$ の極小ユニタリ表現になる.

この定理は $O(p,q)$ の極小ユニタリ表現の "Schrödinger モデル" を与えていると解釈できる.

注意 最高ウェイト表現や spherical な表現の場合には 1990 年代に入って類似の問題の研究が進展している ([2, 11]). ただし, 解析的に微妙な評価式の証明が必要である.

定理 1 の説明.

群の包含関係 $M_+\overline{N}\subset\overline{P}\subset G$ において, 表現 $(\pi,L^2(C,d\mu))$ を $M_+\overline{N}$ から $\overline{P}$ に拡張するのは簡単である. すなわち,

$$\begin{aligned}\pi(m_0)\psi&=(-1)^{\frac{p-q}{2}}\psi,\\ \pi(e^{tE})\psi(\zeta)&=e^{-\frac{n-2}{2}t}\psi(e^{-t}\zeta)\end{aligned}$$

とおけば, 既述の $M_+\overline{N}$ の作用と合わせて $\overline{P}=(M_+\cup m_0M_+)A\overline{N}$ の表現が定まる.

この表現が $\overline{P}$ から G にどのように拡張できるかを, Lie 環の表現で明示しよう.

$$\mathfrak{g}=\overline{\mathfrak{p}}+\mathfrak{n}$$

であるから, $X \in \mathfrak{n}$ に対して微分表現 $d\pi(X)$ を表示すればよい.

$$L^2(C, d\mu) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \qquad (n \geq 2)$$

とみなして, $d\pi(X)$ を $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に作用する微分作用素として表示すると次のようになる ([7]):

$$d\pi(j(\vec{v})) = \sqrt{-1}\Big(\big(\frac{n-2}{2} - E_\zeta\big)\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial \zeta_j} + \frac{1}{2}\big(\sum_{j=1}^{n} a_j \varepsilon_j \zeta_j\big)\Box_\zeta\Big). \tag{2.1}$$

ただし,

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & (1 \leq j \leq p-1) \\ -1 & (p \leq j \leq n) \end{cases}$$

$$E_\zeta = \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \cdots + \zeta_n \frac{\partial}{\partial \zeta_n}$$

$$\Box_\zeta = \frac{\partial^2}{\partial \zeta_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{p-1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \zeta_p^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial \zeta_n^2}$$

とおいた. 式 (2.1) は 2 階の微分作用素である. $d\pi(X)$ が 1 階の微分作用素で書けないということは群 $N = \exp \mathfrak{n}$ が $L^2(C)$ には作用するが, C 自身には作用していないということに対応している.

3 最小 K-type の表示

さて, 上記の微分表現 $d\pi(X)$ ($X \in \mathfrak{n}$) が(2.1) の形で与えられ, 逆にこのように $d\pi(X)$ を定めるとリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p, q)$ の表現が定まることを発見的考察で説明しよう. このためには, (実は $\mathbb{R}^n$ ではなく) $S^{p-1} \times S^{q-1}$ における表現の実現 ([1, 3, 5, 10]) を援用すればよい. この両者は共形埋め込みによって結びついている.

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p-1,q-1} \underset{\text{conformal}}{\overset{\iota}{\hookrightarrow}} \overset{+\cdots+}{S^{p-1}} \times \overset{-\cdots-}{S^{q-1}}.$$

$q = 1$ ならば, ι は立体射影 $S^{p-1} \setminus \{1 \text{ 点}\} \to \mathbb{R}^{p-1}$ の逆写像に他ならない. この共形埋め込みに応じて関数の引き戻し:

$$C^\infty(\mathbb{R}^{p-1,q-1}) \underset{\iota^*}{\leftarrow} C^\infty(S^{p-1} \times S^{q-1})$$

を考える．但し，$\widetilde{\iota^*}$ は共形幾何において，

共形写像 ι の引き戻し + 共形因子による twist

によって定義される線型写像である ([5]).

ここで述べた表現の 3 つのモデルを次の図式にまとめておこう:

$$
\begin{array}{ccccc}
(1) & & (2) & & (3) \\
\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) & \xleftarrow[\mathcal{F}]{\sim} & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) & \xleftarrow[\widetilde{\iota^*}]{} & C^\infty(S^{p-1}\times S^{q-1}) \\
\cup & & \cup & & \cup \\
L^2(C) & \xleftarrow{\sim} & \{\Box_{\mathbb{R}^{p-1,q-1}} f = 0\} & \longleftarrow & \{\widetilde{\Delta}_{S^{p-1}\times S^{q-1}} g = 0\} \\
 & & + \text{“減衰” 条件} & &
\end{array}
$$

ここで，

$$
\Box_{\mathbb{R}^{p-1,q-1}} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},
$$

であり，$S^{p-1}\times S^{q-1}$ 上の山辺作用素を

$$
\widetilde{\Delta}_{S^{p-1}\times S^{q-1}} = \Delta_{S^{p-1}} - \Delta_{S^{q-1}} - \frac{1}{4}(p-q)(p+q-4).
$$

と記した．

上の図式を簡単に説明しよう．

- (1) と (2) は Fourier 変換によって対応している．
- 表現論の言葉では (2) は退化 (非ユニタリ) 主系列表現の N-picture, (3) は K-picture であり，その部分表現がユニタリ化可能になっている．図式でまとめると，

$$
\begin{array}{c}
S^{p-1}\times S^{q-1} \\
\downarrow \text{double covering} \\
\overline{N} \hookrightarrow G/P \simeq K/M
\end{array}
$$

- (2) と (3) では群作用を書くのは簡単であり，ユニタリ内積は複雑である ([5, 6, 7]).
- (1) では群作用 (の一部) は複雑であり，ユニタリ内積は簡単 (L^2-内積) である ([7]).
- (3) のモデルでは $\widetilde{\Delta}_{S^{p-1}\times S^{q-1}} = \widetilde{\Delta}_{S^{p-1}} - \widetilde{\Delta}_{S^{q-1}}$ が成り立ち，これを用いることによって極小表現の K-type 公式を容易に求めることができる ([5]).

最後に, 最小 K-type で $L^2(C)$ における Schrödinger モデルでどのような関数で表されるかをみよう. まず, $p=q$ のときを考えよう. このときは, 山辺作用素 $\widetilde{\Delta}_{S^{p-1}\times S^{q-1}}$ の定数項 $-\frac{1}{4}(p-q)(p+q-4)$ が消える. 特に $S^{p-1}\times S^{q-1}$ 上の定数関数 1 は $\widetilde{\Delta}_{S^{p-1}\times S^{q-1}}f=0$ をみたす. 定数関数 1 は表現空間のベクトルとして上記の表現の最小 K-type (この場合は K の自明な 1 次元表現) を生成している. そこでこのベクトルが, 同型写像 $\mathcal{F}\circ\widetilde{\iota^*}$ によって, モデル (1) ではどのような関数に変換されているかを具体的に調べればよい. 次の定理がその答えである.

定理 2. ([7], Theorem 5.5 の特別な場合) $p=q$ のとき

$$\mathcal{F}\circ\widetilde{\iota^*}(1)=C_{p,q}|\zeta|^{\frac{3-q}{2}}K_{\frac{q-3}{2}}(2|\zeta|)\delta(Q)$$

ここで,

$$\begin{aligned} 1 &: S^{p-1}\times S^{q-1}\ \text{上の定数関数} \\ K_{\frac{q-3}{2}}(2|\zeta|) &: K\text{-}\mathit{Bessel}\ \text{関数} \\ |\zeta| &= (\zeta_1^2+\cdots+\zeta_n^2)^{\frac{1}{2}} \\ C_{p,q} &= (2\pi)^{\frac{p+q-2}{2}}2^{-\frac{p-q}{2}}\frac{\Gamma(\frac{q-1}{2})}{\Gamma(\frac{p+q-4}{2})} \end{aligned}$$

次に $p\neq q$ のときを考えよう. 一般性を失うことなく $p>q$ としてよい. このときは, (3) の表現空間には (0 でない) 定数関数は含まれないが, (3) の実現においては最小 K-type は Jacobi 多項式で生成されることが簡単な議論で分かる ([7],Proposition 5.3). これに対応する関数を (1) のモデル (すなわち, $L^2(C)$ における "Schrödinger モデル") で具体的に求めると, やはり K-Bessel 関数が現れる. すなわち, 定理 2 は次の定理に拡張される:

定理 3. ([7],Theorem 5.5) $p>q$ のとき

$$\mathcal{F}\circ\widetilde{\iota^*}(\mathrm{J})=C_{p,q}|\zeta|^{\frac{3-q}{2}}K_{\frac{q-3}{2}}(2|\zeta|)\delta(Q).$$

ここで, $S^{p-1}\times S^{q-1}\ni(u_1,\cdots,u_n)$ 上の関数 J を

$$\mathrm{J}={}_2F_1\left(\frac{q-p}{2},\frac{p+q-4}{4},\frac{q-1}{2};u_{p+1}^2+\cdots+u_{p+q-1}^2\right)$$

と定義した (ここで J は Jacobi 関数の頭文字である).

$Mp(n,\mathbb{R})$ の Weil 表現のときは $\exp(-\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2))\in L^2(\mathbb{R}^n)$ が最小 K-type を与える関数であった. 定理 3 は K-Bessel 関数を用いて最小 K-type の生成関数が表されることを主張しているのである.

参考文献

[1] B. Binegar and R. Zierau, Unitarization of a singular representation of $SO(p,q)$, Comm. Math. Phys., **138** (1991), 245-258.

[2] A. Dvorsky and S. Sahi, Explicit Hilbert spaces for certain unipotent representations II, Invent. Math., **138** (1999), 203-224.

[3] J.-S. Huang and Zhu, On certain small representations of indefinite orthogonal groups. Represent. Theory 1 (1997), 190-206.

[4] 小林俊行-大島利雄, Lie 群と Lie 環 1,2, 岩波講座現代数学の基礎, 岩波書店, 1999.

[5] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on minimal representations of $O(p,q)$, Part I, realization and conformal geometry, Adv. Math.,(in press).

[6] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on minimal representations of $O(p,q)$, Part II, branching laws, Adv. Math.,(in press).

[7] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on minimal representations of $O(p,q)$, Part III, ultra-hyperbolic equations on $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$, Adv. Math.,(in press).

[8] T. Kobayashi, Conformal geometry and analysis on minimal representations, Lecture Notes of the 22nd Winter School 2002 "Geometry and Physics", Czech Republic, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl. **71** (2003), 15–40.

[9] T. Kobayashi, 山辺作用素の解空間における不変な内積について, 数理解析研究所講究録 (ed. 太田琢也氏), **1294** (2002), 76-86.

[10] B. Kostant, The vanishing scalar curvature and the minimal unitary represetation of SO(4,4), eds. Connes et al, Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory, Progress in Math., **92** Birkhäuser, 1990, Boston, 85-124.

[11] S. Sahi, Explicit Hilbert spaces for certain unipotent representations, Invent. Math. **110** (1992), 409-418.

[12] P. Torasso, Méthode des orbites de Kirillov-Duflo et representations minimales des groupes simples sur un corps local de caractéristique nulle, Duke Math. J., **90** (1997), 261-377.