数理解析研究所講究録 1344 巻 2003 年 11-15

PAPA をもたない理論

東海大・理・情報数理　　桔梗宏孝 (Hirotaka Kikyo)
Dept. of Math. Sci., Tokai University
kikyo@ss.u-tokai.ac.jp

筑波大学数学系　　坪井明人 (Akito Tsuboi)
Dept. of Math., The Tsukuba University
tsuboi@math.tsukuba.ac.jp

Ehud Hrushovski
The Hebrew University at Jerusalem
ehud@math.huji.ac.il

1 はじめに

言語 $\mathcal{L}$ をもつ理論 T に対し，新しい関数記号 σ を導入し，T に「σ は $\mathcal{L}$ 自己同型」を意味する論理式を加えたものを T_σ と書く．T がモデル完全かつ不安定で PAPA をもつならば T_σ にモデルコンパニオンがない [2]．ここで，T が PAPA (la Propriété d'Amalgamation Pour les Automorphismes) [4] をもつとは，T_σ が融合性をもつことである．すなわち，理論 T の 3 つのモデルとそれらの自己同型写像 (M_0,σ_0)，(M_1,σ_1)，(M_2,σ_2) が与えられて，M_1 と M_2 が M_0 の拡大モデルで，σ_1 と σ_2 がともに σ_0 の拡張になっているとき，T のモデル M_3 とその自己同型写像 σ_3 が存在して，(M_1,σ_1) と (M_2,σ_2) が同時に (M_3,σ_3) に埋め込め，さらに M_0 の部分では両方の埋め込みが一致しているように必ずできることである．

T が不安定でモデル完全ならば T_σ にモデルコンパニオンがないと予想しているが，完全な解決には至っていない．T が strict order property をもつ場合にも T_σ にモデルコンパニオンがない [3]．

T が PAPA をもつということと，T が strict order property をもつということには関係がない．また，PAPA をもたないことがわかっている自然な理論はまだ無いようである．

不安定な理論 T に対して，T_σ にモデルコンパニオンがないという現象が最初に見つかったのは T がランダムグラフの理論のときである．この理論は単純不安定理論なので，単純不安定理論に対してこの予想がまず証明できるのではと期待されたが，実際はこの場合が難しいようである．

Hrushovski は $T = \mathrm{ACFA}$ に対して T_σ のモデルコンパニオンがないことを示している(未発表)．この証明は体論をかなり使っており，この証明の一般化には成功していない．ACFA は代数的閉体の generic 自己同型の公理系である．さらにこの構造の上の generic 自己同型のクラスを考えると，それは 1 階のクラスでないということである．ACFA が PAPA をもてば桔梗の結果からもこの事実が導かれる．しかしながら，ACFA が PAPA をもつかどうかは知られていないようである．

モデル完全で安定な任意の理論は PAPA をもつ．したがって，PAPA をもたないモデル完全な理論は不安定である．PAPA をもたない理論の例は Ziegler によるものと坪井によるものがあったが，定数をいくつか固定すると PAPA をもつようになる．定数をいくつか固定すると PAPA をもつ場合は桔梗の結果が使える場合になるので，これらの例を T とすると T_σ のモデルコンパニオンはない．

定数をいくつ固定しても PAPA をもたない理論があったので，ここに報告する．この理論を T としたときの T_σ にもモデルコンパニオンはない．

2 PAPA をもたない理論

言語は $\mathcal{L} = \{R(x,y), f(x)\}$ で，1 つの 2 項関係記号と 1 つの 1 変数関数記号からなる．T は次の 5 種類の公理からなる理論とする．

1. $f(x) \neq x$ かつ $f^2(x) = x$ (f は involution).
2. $\neg R(x,x)$.
3. $R(x,y)$ ならば $R(y,x)$. (公理 2, 3 は R が無向グラフの辺という意味)
4. 異なる 4 点 a, a', b, b' に対し，$f(a) = a'$ かつ $f(b) = b'$ ならば，この 4 点の中で R で結ばれているのはちょうど 2 組で，$R(a,b) \wedge R(a,b')$ または $R(a',b) \wedge R(a',b')$ または $R(a,b) \wedge R(a',b)$ または $R(a,b') \wedge R(a',b')$ のどれか 1 つが成り立つ．とくに，いつも $\neg R(a,a')$ かつ $\neg R(b,b')$ である．

5. $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ が互いに f で対応していないとすると，ある z が存在して，$R(z,x_i) \wedge R(z,f(x_i))$ が $1 \le i \le m$ に対して成り立ち，$R(z,y_i) \wedge R(f(z),y_i)$ が $1 \le i \le n$ に対して成り立つ．

命題 2.1 T は整合的かつ可算範疇的で，量記号消去ができる．

証明 T の有限部分を考えると，それらを満たす有限モデルが簡単に作れる．可算範疇性と量記号消去は通常の back-and-forth method(往復論法) で示せる． □

この命題は次のようにも証明できる．(1) から (4) までの条件は全称命題で書ける．この理論を T_0 とする．T_0 の有限モデル全体のクラスは，HP (Hereditary Property), JEP (Joint Embedding Property), AP (Amalgamation property) をもつ．また，このクラスは uniformly locally finite で，任意に大きな有限構造を要素にもつ．Hodges の Model Theory [1] 定理 7.1.4 により，T_0 の有限モデル全体のクラスに対する "generic 構造" (Fraïssé limit) M_0 が存在し，$\mathrm{Th}(M_0)$ は可算範疇的で量記号消去もできる．$\mathrm{Th}(M_0)$ は T_0 の model completion になっている．(5) が M_0 で成り立つことがわかるので，T の可算範疇性から $T = \mathrm{Th}(M_0)$ がわかる．

また，f を忘れると T のモデルはランダムグラフである．T は単純理論で，SU 階数 1 をもつ．

関数 f の代わりに f の軌道を同値類とする同値関係 E を基本的な関係として導入しても同じ (interdefinable な) 理論ができる．しかし，量記号を完全に消去するには f(定義可能な関数である) を導入する必要がある．

定理 2.2 T は PAPA をもたない．さらに強く，要素をいくつ固定しても PAPA をもたない．

証明 T の巨大モデル $\mathcal{M}$ の中で議論する．$M \prec \mathcal{M}$ を任意のモデルとする．固定する要素がいくつあっても，それらはこの M の中にあると仮定できる．以下，M 上で恒等写像になる自己同型のみが登場する．

さて，f が involution なので，$M = A \cup B$，$A \cap B = \emptyset$，$B = \{f(a) : a \in A\}$ と書ける．すると次のような $e \in \mathcal{M}$ が存在する:

任意の $a \in A$ に対し

$$R(e,a) \wedge R(f(e),a) \wedge \neg R(e,f(a)) \wedge \neg R(f(e),f(a)). \tag{1}$$

量記号消去ができるので，e と $f(e)$ は M 上同じタイプをもつ．したがって，$N \supset M \cup \{e, f(e)\}$ なる T のモデル N と N の $\mathcal{L}$ 自己同型 σ で，$\sigma(e) = f(e)$, $\sigma|M = \mathrm{id}_M$

となるものがある．このとき，$\sigma(f(e)) = f(\sigma(e)) = f(f(e)) = e$ である．

同様に，$e' \in \mathcal{M}$ で，任意の $b \in B$ に対し，

$$R(e', b) \wedge R(f(e'), b) \wedge \neg R(e', f(b)) \wedge \neg R(f(e'), f(b)) \tag{2}$$

となるものがある．この e' に対しても，$N' \supset M \cup \{e', f(e')\}$ なる T のモデル N' と N' の $\mathcal{L}$ 自己同型 σ' で，$\sigma'(e') = f(e'), \sigma'(f(e')) = e', \sigma'|M = \mathrm{id}_M$ となるものがある．

主張 (N, σ) と (N', σ') は (M, id_M) 上融合できない．

これらが融合できたとし，(N^*, σ^*) を融合した T_σ のモデルとする．N, N' を N^* に埋め込んだときの e, e' の像を改めて，それぞれ e, e' と書く．

(1), (2) より，$f(e) \neq e'$ かつ $e \neq e'$ である．T の公理 4 より，

$$R(e, e') \wedge R(e, f(e')) \wedge \neg R(f(e), e') \wedge \neg R(f(e), f(e'))$$

と仮定してよい．しかし，$\sigma^*(e) = f(e)$ かつ $\sigma^*(e') = f(e')$ で σ^* が自己同型なので，$R(e, e')$ より，$R(f(e), f(e'))$ である．しかし，これは矛盾である． □

定理 2.3 T_σ はモデルコンパニオンをもたない．

証明 T_σ のモデルコンパニオン TA が存在すると仮定する．

T の公理 4 と公理 5 から，論理式 $R(x, y) \wedge R(x, f(y))$ が order property をもつことが容易にわかる．すると，T のあるモデル M の中に可算列 a_i $(i \in \mathbb{Z})$ がとれて，

$$i < j \;\Leftrightarrow\; R(a_i, a_j) \text{ かつ } R(a_i, f(a_j))$$

となる．Ramsey の定理より，M を取り直して，a_i $(i \in \mathbb{Z})$ が空集合上の一様列 (indiscernible sequence) であると仮定してよい．

さらに M を取り直して，M の $\mathcal{L}$ 自己同型 σ で，$a_i = \sigma^i(a_0)$ $(i \in \mathbb{Z})$ となるものがあると仮定してよい．さらに，(M, σ) を拡大して TA のモデルにできるので，(M, σ) がすでに TA のモデルであると仮定してよい．さらに初等拡大しても TA のモデルになるので，(M, σ) は $\aleph_1$ 飽和的であると仮定してよい．

$a = a_0$ とおくと，任意の $i < j$ に対し，

$$i < j \;\Leftrightarrow\; R(\sigma^i(a), \sigma^j(a)) \text{ かつ } R(\sigma^i(a), f(\sigma^j(a)))$$

である．

$\Psi(y) = \{R(\sigma^i(a), y) \wedge R(\sigma^i(a), f(y)) : i \in \mathbb{Z}\}$ とおく．

主張 (M,σ) において,

$$\Psi(y) \vdash \exists x\,[R(a,x) \wedge R(a,f(x)) \wedge R(x,y) \wedge R(x,f(y)) \wedge \sigma(x)=x].$$

b を $\Psi(y)$ の (M,σ) における任意の解とする．すると，T の公理 4 から，任意の $n \in \mathbb{Z}$ について $\sigma^n(a) \neq b, f(b)$ である．

M 上の $\mathcal{L}$ タイプ $p(x)$ を次のような論理式の集合とする．

- $R(\sigma^n(a),x)$ と $R(\sigma^n(a),f(x))$ (n は整数)
- $R(x,c)$ と $R(x,f(c))$ ($c \in M$ で，任意の整数 n について，$\sigma^n(a) \neq c, f(c)$ となるもの)

f の軌道 $(\{x,f(x)\})$ で分類して考えるとわかり易いだろう．

すると，p は整合的で M 上の完全 $\mathcal{L}$ タイプになり，$\sigma(p)=p$ となる．これから，主張のような要素 x が p の解として (M,σ) の T_σ に関する拡大モデルでとれる．(M,σ) が TA のモデルであること (generic であること) により，主張の結論の x が M でとれる．

主張と (M,σ) におけるコンパクト性より，主張の右辺は左辺のある有限部分 $\psi(y)$ から導ける．$\psi(y)$ に現れるどの $\sigma^n(a)$ の n よりも大きい自然数 k をとる．すると，$\sigma^k(a)$ は $\psi(y)$ を (M,σ) で満たす．したがって，(M,σ) において

$$R(a,c) \wedge R(a,f(c)) \wedge R(c,\sigma^k(a)) \wedge R(c,f(\sigma^k(a))) \wedge \sigma(c)=c$$

となる $c \in M$ が存在する．σ が $\mathcal{L}$ 自己同型なので，(M,σ) において

$$R(\sigma^k(a),c) \wedge R(\sigma^k(a),f(c))$$

が成り立つ．$R(c,f(\sigma^k(a)))$ でもあるので，これは T の公理 4 に反する． □

参考文献

[1] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press, 1993.

[2] H. Kikyo, Model companions of theories with an automorphism, J. Symbolic Logic **65** (2000), No. 3, 1215–1222.

[3] H. Kikyo, S. Shelah, The strict order property and generic automorphisms, J. Symbolic Logic **67** (2002), No. 1, 214–216.

[4] D. Lascar, Autour de la propriété du petit indice, Proc. London Math. Soc. **62** (1991) 25-53.