数理解析研究所講究録 1344 巻 2003 年 16-25

有限性を持つ理論について

坪井明人 (Akito TSUBOI)
筑波大学 (University of Tsukuba)

2003年3月　於数理解析研究所

概要

F. Oger は R^n を有限種類のタイルで覆う問題をモデル理論的に扱った．タイルをモデルの点と見て，タイルとタイルのつながり方を述語記号で表現することにより，構造を構成することがそのアイディアであった．本稿では，このような構造が持つ性質をモデル理論的に考察することをめざす．

本稿では L は有限個の述語記号からなる言語とする．$M, N, \ldots$ は L-構造をあらわす．また，$a, b, \ldots$ はこれら L-構造の元をあらわす．元の有限列は $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ などであらわす．

定義 1　1. $a_1, a_2 \in M$ の距離が 1 以下である $(d(a_1, a_2) \leq 1)$ とは $R(*_1, .., *_n) \in L$, $a_3, \ldots, a_n \in M$ と n の permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ で $M \models R(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$ となることである．帰納的に $d(a_1, a_2) \leq n$, $d(a_1, a_2) \geq n$ などを定義することができる．
部分集合 $A, B \subset M$ に対しては $d(A, B) = \min\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

2. $y \in B_n(x_1, \ldots, x_m)$ は $d(y, \{x_1, \ldots, x_m\}) \leq n$ を表す forumula とする．

3. 論理式 $\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ は

$$(Q_1 y_1 \in B_{n_1}(x_1, \ldots, x_k)) \ldots (Q_m y_m \in B_{n_m}(x_1, \ldots, x_k))[\theta(\bar{x}, \bar{y})],$$

の形の論理式と論理的に同値なとき，限定論理式とよぶことにする．ただし，Q_i たちは量化記号であり，θ は量化記号を持たない論理式である．$\bar{a}$ によって満たされる限定論理式全体は $\mathrm{btp}(\bar{a})$ で表す．

4. $A \subset M$ に対して，$d(a, A) < \omega$ となる点 $a \in M$ 全体を $C(A)$ で表す．$C \subset M$ が $C = C(a) (a \in M)$ の形をしているとき M の連結成分とよばれる．集合 $A \subset M$ が連結成分に含まれるとき，A は連結であるという．

注意 2 限定論理式全体はブール結合で閉じている．

定義 3　1. 論理式 $\varphi(\bar{x})$ は限定論理式 $\theta(\bar{y},\bar{x})$ によって

$$\exists\bar{y}\theta(\bar{y},\bar{x})$$

の形をしているとき，局所的 (あるいは Σ_1) とよぶことにする．

2. $\bar{a}$ によって満たされる局所論理式全体は $\mathrm{ltp}(\bar{a})$ で表す．

1　Gaifmanの定理

Gaifman の定理をわれわれの立場で証明する．

補題 4 M と N を L-構造とし，N は ω_1-飽和と仮定する．C と D を M および N それぞれの連結成分とする．いま可算列 $\{a_i\}_{i\in\alpha}\subset C$ と $\{b_i\}_{i\in\alpha}\subset D$ が同じ限定タイプを持つとする．このとき，各 $c\in C$ に対して $d\in D$ を

$$\mathrm{btp}(\{a_i\}_{i\in\alpha},c)=\mathrm{btp}(\{b_i\}_{i\in\alpha},d).$$

となるように選ぶことができる．

Proof. $q(\{x_i\}_{i\in\alpha},y)=\mathrm{btp}(\{a_i\}_{i\in\alpha},c)$ とする．$c\in C(\{a_i\}_{i\in\alpha})$ なので $q^*(\{x_i\}_{i\in\alpha}):=\{\exists y\theta(\bar{x},y):\theta(\bar{x},y)\in q\}$ は $\{a_i\}_{i\in\alpha}$ によって満たされる限定タイプと考えてよい．したがって，$q^*(\{x_i\}_{i\in\alpha})$ は $\{b_i\}_{i\in\alpha}\subset D$ によって満たされる．すなわち，限定タイプ $q(\{b_i\}_{i\in\alpha},y)$ is は N で有限充足的となる．D の ω_1-飽和性により，$q(\{b_i\}_{i\in\alpha},y)$ を満たす $d\in D$ が存在する．

定義 5 $\{a_i\}_{i\in\alpha}\subset M$ と $\{b_i\}_{i\in\alpha}\subset N$ を可算列とする．対 $(\{a_i\}_{i\in\alpha},\{b_i\}_{i\in\alpha})$ は次の条件を満たすとき (M,N)-善良対とよぶことにする：

1. $d(a_i,a_j)=d(b_i,b_j)$　$(i,j\in\alpha)$;
2. $a_{i_1},...,a_{i_n}$　$(b_{i_1},...,b_{i_n})$ が連結のとき，$\mathrm{btp}(a_{i_1},...,a_{i_n})=\mathrm{btp}(a_{i_1},...,a_{i_n})$.

注意 6　1. $\bar{a}\in M$ と $\bar{b}\in N$ が同じ限定タイプを持てば，$(\bar{a},\bar{b})$ は (M,N)-善良対である．

2. $(\{a_i\}_{i\in\alpha},\{b_i\}_{i\in\alpha})$ が (M,N)-善良対ならば，写像 $\sigma=\{(a_i,b_i)\}_{i\in\alpha}$ は M と N の間の部分同型となる：連結部分集合 $A\subset\{a_i\}_{i\in\alpha}$ に対して $\sigma|A$ は明らかに部分同型である．もし $\{a_{i_1},...,a_{i_n}\}$ が連結でないならば，$(a_{i_1},...,a_{i_n})\notin R^M$，$(b_{i_1},...,b_{i_n})\notin R^M$ がすべての n 変数述語記号 $R\in L$ で成立．したがって σ は部分同型である．

定義 7 $q(x)$ を M の限定タイプとする．$\dim_M(q)=|\{C(a):M\models q(a)\}|$.

注意 8 $\dim_M(q)\geq m\iff q$ の解たち $a_1,...,a_m$ で $d(a_i,a_j)=\infty$ $(i\leq m)$ を満たすものがある．したがって，$\dim_M(q)\geq m$ は Σ_1-閉論理式の集合で表現される．

補題 9 M と N を ω_1-飽和な L-構造とする．M と N が共通の Σ_1-閉論理式を満たすとする．

(a) $q(x)$ を限定論理式の集合とする．このとき $q(x)$ が M で有限充足的 $\Longleftrightarrow$ $q(x)$ が N で有限充足的．

(b) $q(x)$ が限定タイプのとき，各 $m \in \omega$ に対して，

$$\dim_M(q) = m \Longleftrightarrow \dim_N(q) = m.$$

(c) $(\{a_i\}_{i\in\alpha}, \{b_i\}_{i\in\alpha})$ を (M,N)-善良対とする．各 $c \in M$ に対して，$(\{a_i\}_{i\in\alpha} \cup \{c\}, \{b_i\}_{i\in\alpha}) \cup \{d\})$ が (M,N)-善良対となる $d \in N$ が存在する．

Proof. (a) は明らかである．

(b):上の注意 8 により，$\dim_M(q) \geq m$ および $\dim_N(q) \geq m$ は Σ_1-閉論理式により表現される．M と N は共通の Σ_1-閉論理式を持つので結論を得る．

(c): Case 1. $c \in C(\{a_i\}_{i\in\alpha})$. $I = \{i \in \alpha : a_i \in C(c)\}$ とおく．善良性の定義により，$\{a_i\}_{i\in I}$ と $\{b_i\}_{i\in I}$ は同じ限定タイプを持つ．特に $\{b_i\}_{i\in I}$ は N において連結である．補題4により，$d \in N$ を $\mathrm{btp}(\{a_i\}_{i\in I} \cup c) = \mathrm{btp}(\{b_i\}_{i\in I} \cup d)$ となるように選べる．このとき，$(\{a_i\}_{i\in\alpha} \cup \{c\}, \{b_i\}_{i\in\alpha}\{d\})$ が (M,N)-善良になることは明らかである．

Case 2. $c \notin C(\{a_i\}_{i\in\alpha})$. $q(x) = \mathrm{btp}(c)$ とおく．最初に $\dim_M q = \infty$ と仮定する．N における q の次元も無限となる．したがって N の ω_1-飽和性により，$d \in N \setminus \{b_i\}_{i\in\alpha}$ で q を満たすものがある．$(\{a_i\}_{i\in\alpha} \cup \{c\}, \{b_i\}_{i\in\alpha}\{d\})$ が (M,N)-善良なことを見るのはやさしい．

次に $\dim_M(q) = n \in \omega$ を仮定する．(b) により，$\dim_M(q) = n$ である．もし $\dim_{C(\{b_i\}_{i\in\alpha})}(q) < n$ とすれば，$d \in N \setminus C(\{b_i\}_{i\in\alpha})$ で q を満たすものがある．明らかに $(\{a_i\}_{i\in\alpha} \cup \{c\}, \{b_i\}_{i\in\alpha}\{d\})$ は (M,N)-善良である．

後は $\dim_{C(\{b_i\}_{i\in\alpha})}(q) = n$ を仮定して矛盾を導けばよい．$e_1, ..., e_n$ をこの次元の原因となる元として選ぶ．これに応じて $b_{i_1}, ..., b_{i_n}$ を $e_j \in C(b_{i_j})$ $(j \leq n)$ となる元とする．$(\{a_{i_1}, ..., a_{i_n}\}, \{b_{i_1}, ..., b_{i_n}\})$ の善良性と補題4を用い，$d_j \in C(a_{i_j})$ $(j \leq n)$ を q の解としてとる．$d(a_{i_j}, a_{i_k}) = \infty$ $(j \neq k)$ だから，$\dim_{C(\{a_i\}_{i\in\alpha})}(q) \geq n$ である．$c \notin C(\{a_i\}_{i\in\alpha})$ はもうひとつの q の解だから，$\dim_M(q) > n$ を得る．これは矛盾である．

定理 10 M，N を L-構造とする．$\bar{a} \in M$ と $\bar{b} \in N$ に対して

$$\mathrm{ltp}_M(\bar{a}) = \mathrm{ltp}_N(\bar{b}) \Rightarrow \mathrm{tp}_M(\bar{a}) = \mathrm{tp}_N(\bar{b}).$$

Proof. $\mathrm{ltp}(\bar{a}) = \mathrm{ltp}(\bar{b})$ を仮定する．M と N は共通の Σ_1-閉論理式を満たす．また $(\bar{a}, \bar{b})$ は (M,N)-善良対となる．M と N を拡大することにより，それぞれ ω_1-飽和と仮定してよい．したがって補題9と back and forth argument により，可算モデル M_0 と N_0 を次の条件を満たすようにとれる：

- $\bar{a} \in M_0 \prec M$, $\bar{a} \in N_0 \prec N$,
- (M_0, N_0) は (M, N)-善良.

よって注意 6 により, $(M_0, \bar{a})$ and $(N_0, \bar{a})$ は同型となる. したがって $\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$ である.■

系 11 M を L-構造とし, $\bar{a}, \bar{b} \in M$ とする. $(\bar{a}, \bar{b})$ が (M, M)-善良ならば $\mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$ である.

Proof. 定理 10 の証明では補題 9 を使うので, M と N が同じ Σ_1-閉論理式を満たすことが必要だった. この条件はいまの状況では自明に成立する. あとは定理 10 の証明と同様の議論をすればよい.

系 12 $\bar{a}_i \in M$ $(i \leq m)$ とする. 各 $\bar{a}_i$ が連結で, $d(\bar{a}_i, \bar{a}_j) = \infty$ $(i \neq j)$. ならばタイプ $p(\bar{x}_0, ..., \bar{x}_m) = \mathrm{tp}(\bar{a}_0, ..., \bar{a}_m)$ は次で生成される：

$$q(\bar{x}_0, ..., \bar{x}_m) = \bigcup_{i \leq m} \mathrm{btp}(\bar{a}_i) \ \cup \bigcup_{i<j\leq m} \text{“}d(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \infty\text{”}.$$

Proof. $\bar{c}$ と $\bar{d}$ を q の二つの解とすれば, $(\bar{c}, \bar{d})$ は善良対となる. したがって上の系により結論を得る.

系 13 (*Gaifman*) 任意の閉論理式は次の形の Σ_1-閉論理式のブール結合としてかける：

(*) $\exists x_0 ... \exists x_m [\bigwedge_{i \leq m} \theta(x_i) \wedge \bigwedge_{i<j\leq m} d(x_i, x_j) \geq n]$, θ は限定論理式.

Proof. M と N を (*) の形の閉論理式に関して elementary な構造とする. このとき, $M \equiv N$ となることを示せばよい. 拡大により, それぞれのモデルは ω_1-飽和としてよい. 各限定タイプは M と N で同じ次元を持つ（有限なら同じ値）. したがって, (M, N)-善良対 $(\emptyset, \emptyset)$ から始めて, 善良対に関する back-and-forth argument を行うことができ, 可算モデル $M_0 \prec M$ and $N_0 \prec N$ とその間の同型を得る.

定義 14 1. M が局所有限 $\iff$ $|B_n(b)|$ がすべての $n \in \omega$ とすべての $b \in M$ に対して有限.
2. M が一様局所有限 $\iff$ $\sup\{|B_n(b)| : b \in M\}$ が各 $n \in \omega$ に対して有限.
3. M が局所同型性を持つ $\iff$ 各限定論理式 $\varphi(x)$ に対して $m_\varphi \in \omega$ が存在して各 $B_{n_\varphi}(a) (a \in M)$ が $\varphi(x)$ の解を持つ.

次は易しい.

事実 15 $M \equiv N$ に対して次が成立：
1. M が一様局所有限 $\iff$ N が一様局所有限.

2. M が局所同型性を持つ $\iff$ N が局所同型性を持つ.

定義 16 *1.* T が一様局所有限 $\iff$ T のある（全ての）モデルが一様局所有限.
2. T が局所同型性を持つ $\iff$ T のある（全ての）モデルが局所同型性を持つ.

次も易しい.

補題 17 • T が局所同型性を満たせば，すべての *1*-タイプは *non-algebraic* である.
• T が一様局所有限ならば, T は *superstable* で U*-rank 1* である.

2 局所同型性.

補題 18 M^* を ω-飽和な M の *elementary extension* とする．このとき次は同値である：
(a) M が局所同型性を持つ；;
(b) M^* の任意の連結成分 C に対して，$C \prec M^*$ である.

Proof. $\leftarrow$: M が局所同型性を持たないとする．このとき，consistent な限定論理式 $\varphi(x)$ で各 $m > 0$ に対して $b \in M$ で $B_m(b)$ が $\varphi(x)$ の解を持たないようにできる．したがって，飽和性により $b^* \in M^*$ を選んで $C(b^*)$ が $\varphi(x)$ の解を持たないようにできる．よって $C(b^*)$ は M^* の elementary submodel ではない.

$\rightarrow$: (a) を仮定する. C と M が同じ Σ_1-閉論理式を満たすことを示せばよい．特に系 13 により，閉論理式 φ が

$$\exists x_0 ... \exists x_m [\bigwedge_{i \leq m} \theta(x_i) \wedge \bigwedge_{i<j\leq m} d(x_i, x_j) \geq n]$$

の形のものを考えればよい．ここで θ は限定論理式である．M が上の φ を満たすとして，C でも満たされることを示せばよい．T は局所同型性を持つので，θ に解があれば適当な n_θ が存在して，C の各点の n_θ 近傍に θ の解をとることができる．これは C が φ を満たすことを示す.

注意 19 同様の議論で，T が局所同型性を持つとき，$A \subset M$ に対して，$C(A) \prec M$ が示される.

補題 20 M^* を T の ω-飽和モデルとする．次は同値である.
1. T は一様局所有限である；;
2. 任意の $a \in M^*$ に対して, $C(a) \subset \mathrm{acl}(a)$.

Proof. $1 \rightarrow 2$ は明らかである．$2 \rightarrow 1$ は ω-飽和性による．T が一様局所有限でないとして，$a \in M$ と $n \in \omega$ を $B_n(a)$ が無限になるように選ぶ．このとき $\{x \in B_n(a)\} \cup \{x \notin \mathrm{acl}(a)\}$ は有限充足的. したがって解 $b \in M^*$ を持つ. この b は $C(a) \setminus \mathrm{acl}(a)$ に属する.

上の二つの補題により T が一様局所有限で局所同型性を持てば，$\mathrm{acl}(a) = C(a)$ で $C(a) \models T$ となる．

3 モデルの個数

定理 21 *M を一様局所有限性と局所同型性を持つ L-構造とする．$T = Th(M)$ に関する次の条件は同値である．*
(a) 任意の $S_1(T)$-タイプは孤立的でない；
(b) $|S_1(T)| \geq \omega$.
(c) $|S_1(T)| = 2^\omega$.
(d) 連続濃度だけ連結モデルが存在する；
(e) 非可算個の連結モデルが存在する；
(f) $I(T,\omega) > \omega$;
(g) $I(T,\omega) = 2^\omega$;

Proof. If we assume (a), we can easily construct a 2^ω-many 1-types, using a binary tree argument. This shows (a) $\rightarrow$ (c). (c) $\rightarrow$ (b) is trivial. The local isomorphism property implies that if a is a point in a model of T then $C(a)$ is a model of T. So the implications (c) $\rightarrow$ (d) $\rightarrow$ (e)$\rightarrow$ (f) and (c) $\rightarrow$ (g) $\rightarrow$ (f) are obvious. So it is sufficient to show the implications (f) $\rightarrow$ (b) and (b) $\rightarrow$ (a).
(b) $\rightarrow$ (a): Assume the negation of (a) and choose an isolated type $r(x) \in S_1(T)$. We show that any 1-type is isolated. Let $p(x)$ be any type and a a realization of p. By the local isomorphism property, $C(a)$ is a model. Since r is an isolated type, $C(a)$ has a solution b of r. By the uniform local finiteness, $a \in C(b) \subset \mathrm{acl}(b)$. So $p = \mathrm{tp}(a)$ is an isolated type. This shows that there are only finitely many 1-types.
(f) $\rightarrow$ (b): Assume the negation of (b). Notice that a 1-type determines the isomorphsm type of the connected component that realizes the type. So there are only finitely many connected components $C_1, ..., C_n$ modulo isomorphism. Let M be a countable model. Let $m_i \leq \omega$ be the number of components C in M with $C \cong C_i$. M is completely determined by the tuple $(m_1, .., m_n)$, so there are only countably many models.

M は恒等写像以外に自己同型を持たないときに rigid であると言われる．

系 22 *M を一様局所有限性と局所同型性を持つ L-構造とする．T が rigid でなければ T は 2^ω 個の連結モデルを持つ．*

Proof. If T has a rigid model, then any two points in a component have different types. So there are infinitely many 1-types. By the above theorem ((a) $\rightarrow$ (d)), we are done.

4 Rigidな構造.

Let $M = \bigcup_{i<\alpha} C_i$ be a decomposition of M by connected components. If there are two isomorphic components C_i and C_j, then the mapping which exchanges these two isomorphic components (and fixes other components) is an isomorphism. So M is rigid if and only if (1) there are no isomorphic components and (2) each component is rigid. In this section, we study rigid connected models.

定義 23 *1.* $\varphi(x, \bar{y})$ は次の条件を満たすとき（$\bar{y}$ によらず，M において）一様に代数的な論理式とよばれる：$n \in \omega$ が存在して任意の $\bar{a} \in M$ に対して $|\{b \in M : \varphi(b, \bar{a})\}| < n$.

2. M の自己同型 σ は次の条件を満たすとき *translation* とよばれる：一様に代数的な論理式 $\varphi(x, y)$ が存在して $M \models \varphi(\sigma(a), a) \quad (a \in M)$.

定理 24 $M \equiv N$ が次の条件を満たすとする：

(a) $M = \mathrm{acl}(a)$ *for any* $a \in M$;

(b) $k \in \omega$ が存在して $A \subset N$ が k 個以上の点を持てば $N = \mathrm{dcl}(A)$.

このとき M が *rigid* ならば N は自明でない *translation* を持たない.

Proof. Suppose that N has a translation $\sigma \neq \mathrm{id}$. We show that M is not rigid. Then, by property 2, for any k-element set $A \subset N$ there is $a \in A$ with $\sigma(a) \neq a$, since otherwise we would have $\sigma = \mathrm{id}$. Let $\varphi(x, y)$ be a formula witnessing that σ is a translation. Let $\psi(x, \bar{y})$ ($\bar{y} = y_1 ... y_k$) be the formula

$$\bigvee_{i=1,\ldots,k} (\varphi(x, y_i) \vee (x = y_i)).$$

Then for any $A \subset N$ with $|A| = k$, there is $a \in N$ such that $N \models \psi(\sigma(a), A) \wedge \psi(a, A) \wedge \sigma(a) \neq a$. In particular for any formula $\theta(x)$ we have

$$N \models \forall \bar{y}[\bigwedge_{i \neq j} y_i \neq y_j \rightarrow \exists x \exists x'[\psi(x, \bar{y}) \wedge \psi(x', \bar{y}) \wedge (\theta(x) \leftrightarrow \theta(x')]] \tag{1}$$

Since $\psi(x, y_1, ..., y_k)$ is a uniformly algebraic formula, there is a number n such that

$$N \models \forall \bar{y} \exists^{\leq n} x \psi(x, \bar{y}) \tag{2}$$

By (1), (2) and $M \equiv N$, if $a_1, ..., a_k \in M$ are distinct elements, then for each $\theta(x)$ we can choose distinct a_θ, b_θ with $M \models \psi(a_\theta, a_1, ..., a_k) \wedge \psi(b_\theta, a_1, ..., a_k)$ such that

$$M \models \theta(a_\theta) \leftrightarrow \theta(b_\theta).$$

So, since $\psi(x, a_1, ..., a_k)$ has only n solutions in M, we can easily deduce that there are $a \neq b$ having the same type.

系 25 T を一様局所有限な理論とする．また M と N を T の連結モデルとする．M が *rigid* で $N = \mathrm{dcl}(A)$ がすべての k 個以上の元を持つ $A \subset N$ に対して成立するとする．このとき N は自明でない *translation* を持たない．

Now we are going to show:

例 26 一様局所有限な二つの構造 $M \equiv N$ で次を満たすものが存在する：

(a) M と N は局所同型性を持つ；

(b) M は *rigid* でないが N は *rigid.*

一連の補題を証明しながら上の例を示す．For each $n \in \omega$, we define two subsets I_n and D_n of $\mathbb{Z}$ by

- $I_n = [-2^n, 2^n] = \{a \in \mathbb{Z} : -2^n \leq a \leq 2^n\}$;
- $D_n = \bigcup_{i \leq n}(I_i + 2^{i+2}\ \mathbb{Z})$.

補題 27 *Let $\{A_n\}_{n\in\omega}$ be a family of subsets of $\mathbb{Z}$ with $A_n \subset I_n$. Define the A_n^*'s by $A_n^* = \bigcup_{i\leq n}(A_i + 2^{i+2}\ \mathbb{Z})$. We assume $A_{n+1} \cap D_n \subset A_n^*$ for all $n \in \omega$. Then $A_n^* \subset D_n$ and $A_{n+1}^* \cap D_n = A_n^*$. So $(\bigcup_{i\in\omega} A_i^*) \cap D_n = A_n^*$.*

Proof. First notice that by our assumption we have $A_m^* \cap D_n \subset A_n^*$ for all $m \geq n$. $A_n^* \subset D_n$ is clear. Since $A_{n+1}^* \cap D_n \supset A_n^*$ is clear, we prove the other direction $A_{n+1}^* \cap D_n \subset A_n^*$. By assuming $x \in A_{n+1}^* \cap D_n$ and $x \notin A_n^*$, we derive a contradiction.

$$x = b + 2^{i+2}l.$$

So we have $a = b + 2^{i+2}m$ for some $m \in \mathbb{Z}$. This means that $a \in D_i$. Hence, by $A_n \cap D_i \subset A_i^*$, we have $a \in A_i^*$. So $x = a + 2^{n+3}k \in A_i^* \subset A_n^*$. A contradiction. ∎

Now we are going to construct specific sets A_n's satisfying the conditions in lemma 27 plus the symmetric condition

$$A_n = -A_n.$$

We put $A_0 = \emptyset$. Suppose that we have defined A_i's for $i \leq n$.

Case 1. $n = 2m$. It is clear that $m \in I_n$. Clearly $I_{n+1} \setminus I_n^* \neq \emptyset$. For example, $a = 1 + 2 + \cdots + 2^n \in I_{n+1} \setminus I_n^*$. Choose $b \in I_n$ such that $a - b$ is a multiple of m. If $b \in A_n$ then we put $A_{n+1} = A_n$. If $b \notin A_n$ then we put $A_{n+1} = A_n \cup \{-a, a\}$.

Case 2. $n = 2m + 1$. As in the first case, choose the least positive $a \in I_{n+1} \setminus I_n^*$. Then $-a + m \in I_n^*$, by the minimality. If $-a + m \in A_n$ then we put $A_{n+1} = A_n$. Otherwise we put $A_{n+1} = A_n \cup \{-a, a\}$.

It is clear that A_n's satisfy the required conditions. As in lemma 27, we define A_n^*. Let A^* be the set $\bigcup_{n\in\omega} A_n^*$. Now we consider the structure

$$M = (\mathbb{Z}, R, A^*),$$

where R is the binary relation $\{(x, x+1) : x \in \mathbb{Z}\}$.

補題 28 M は局所同型性を持つ.

Proof. Let $n \in \omega$. It is sufficient to find $m \in \omega$ such that any $B(a, m) = [a - m, a + m]$ contains an interval which is isomorphic to the substructure I_n. By the definition of A_k's, we have $A_l \cap I_k = A_n$ $(l \geq n)$. So, by lemma 27, we have $A^* \cap D_n = A_n^*$. This means that for any $k \in \omega$, the following equation holds:

$$A^* \cap (I_n + 2^{n+2}\, k) \;=\; A_n + 2^{n+2}\, k.$$

Now two subsets $(I_n + 2^{n+2}\, k)$ and I_n are isomorphic as $\{R, A^*\}$-structures. Hence $m = 2^{n+1}$ has the required property. ∎

補題 29 M の自己同型は恒等写像と 0 における反転 $(x \mapsto -x)$ だけである.

Proof. The transposition at 0 is an automorphism by the property $A^* = -A^*$. We show that there is no other nontrivial automorphism. Let σ be an automorphism of M. By the definition of R, $\sigma(x) = x + m$ $(m \in \mathbb{Z})$ or $\sigma(x) = -x + m$ $(m \in \mathbb{Z})$. First let us assume that $\sigma(x) = x + m$ and $m > 0$. Put $n = 3m$. Both $2^n + 1$ and $2^n + 1 - m$ belong to I_{n+1}. But by the definition of A_{n+1} (case 1), exactly one of $2^n + 1$ and $2^n + 1 - m$ belongs to A_{n+1}. Using $A^* \cap I_n = A_{n+1}$, we know that σ is not an autormophism. The case where $\sigma(x) = x + m$ and $m < 0$ is treated similarly. Next we assume $\sigma(x) = -x + m$ and $m > 0$. Now we put $n = 2m + 1$. Then both $2^n + 1$ and $-2^n + 1 + m$ belong to I_{n+1}. But by the definition of A_{n+1} (case 2), exactly one of $2^n + 1$ and $-2^n + 1 + m$ belongs to $A_{n+1} = A^* \cap I_{n+1}$. Again we know that σ is not an automorphism. The case where $\sigma(x) = -x + m$ and $m < 0$ is treated similarly, by $A^* = -A^*$. ∎

Let $p_n(y,z)$ be the (possibly) partial type asserting that $d(y,z)=n$ and that the mapping $\sigma_{yz}(x)=-x+y+z$ is an automorphism of M. Notice that the only solution of $p(y,z)$ in M is $(0,0)$. We prove

補題 30 $p_n(y,z)$ は $T=Th(M)$ において孤立的でない.

Proof. By way of contradiction, suppose that $p_n(y,z)$ is isolated by $\varphi(y,z)$. By Gaifman's theorem, $\varphi(y,z)$ can be assumed to be a bounded formula. Since $\varphi(0)$ holds in M, we can choose $n\in\omega$ such that

$$M\models(\forall y)[B(y,2^n)\cong I_n\ \rightarrow\ \varphi(y)].$$

By the local isomoprhism property, there is $a\neq 0$ satisfying $B(a,2^n)\cong I_n$. From the above, a satisfies φ, so a realizes $p(y)$. A contradiction. ∎

Using the omitting types theorem, choose a model $N\models T$ omitting the type $p(y,z)$. By the local isomorphism property, we can assume that N is connected.

補題 31 N は *rigid* である.

Proof. Since N omits $p(y,z)$, any σ_{ab} is not an automorphism. Recall that any $\tau_a(x)=x+a$ is not an automorphism of M. By $N\equiv M$, τ_a is not an automorphism of N. ∎

参考文献

[1] Chang and Keisler, Model Theory, revised version.

[2] F. Oger, Tiling に関する preprint.

[3] Y. Tsujiyama, 筑波大学教育研究科修士論文（2002 年度）