数理解析研究所講究録 1344 巻 2003 年 51-56

ある種の trigonometry の理論の可算モデルの個数について

東京大学数理科学研究科・玉江 伸成 (Tamae Nobuaki)
Graduate School of Mathematical Sciences
University of Tokyo

Sudoplatov によって詳しく研究されてきた poly(tri)gonometry という対象は、通常の数学で考えられる大抵の幾何（ユークリッド幾何、双曲幾何等）を内に含む概念である。一方で、以前から良く知られていたモデル理論の予想に関して、多くの反例を与えてきた、Hrushovski による、有限構造の貼り合せによってできる generic な構造の多くからは、擬平面と呼ばれる構造が解釈される。poly(tri)gonometry は、特殊な、しかし重要な擬平面をも内に含む概念であり、この概念の研究を generic な構成法の枠内で進めることにより、さらに重要な予想（特に、Lachlan 予想と呼ばれるもの）の反例が産み出されるのでは、と Sudoplatov は考えているように映る。

以下では、我々にとってまだ馴染みがあるとは言い難い、この対象の定義と、簡単な場合において、この理論の可算モデルの個数を数える。

1．定義

Sudoplatov による trigonometry の定義については、例えば [2] に書いてあるが、以下の定義は、我々の目標のために、それらを少し簡約化してある。

定義 1　λ を基数とする（有限でもよい）。2-sorted な構造 $\mathcal{P}=(P,L,\in)$ が λ-擬平面であるとは、次の (1) から (3)（とその双対）を満たすときに言う。

(1) $p\in l$ となるのは、$p\in P$, $l\in L$ となるときに限る。

(2) 任意の P の元（点と呼ぶ）p に対し、$p\in l$ となる $l\in L$ がちょうど λ 本存在する。

(2)' 任意の L の元（線と呼ぶ）l に対し、$p\in l$ となる $p\in P$ がちょうど λ 個存在する。

(3) 任意の $p_1,p_2\in P$ に対し、$p_1\in l$ かつ $p_2\in l$ となる $l\in L$ は高々１本しかない。

(3)' 任意の $l_1,l_2\in L$ に対し、$p\in l_1$ かつ $p\in l_2$ となる $p\in P$ は高々１点しかない。

注意　通常、擬平面と言った場合、上の定義の (3)（及びその双対）における「高々１本」は、「高々有限本」とするのが普通である。ただ、ここでは、後に考える群の作用との兼ね合いもあり、このように定義しないと議論がうまく進

まない。実際のところ、Hrushovski が [1] で構成した、安定で ω-categorical な擬平面も、上の定義の (3) (及びその双対) の性質を持っているし、最終的な目標となる、Lachlan 予想の反例も、(タイプの個数が少ないという意味で) それほど複雑なものではないはずなので、この文脈の中では、上の定義はそれほど不自然なものではない。

定義 2 $\mathcal{P} = (P, L, \in)$ を λ-擬平面、G を群、$g_0 \in G$ を単位元でない勝手な元とする。このとき、三つ組 $(G, \mathcal{P}, g_0)$ が polygonometry であるとは、次の (1) から (4) を満たすときに言う。

(1) $|G| = \lambda$.

(2) G は、各線上忠実に作用している。すなわち、任意の $l \in L$, $p_1, p_2 \in l$ に対し、ある $g \in G$ が一意に存在して、$p_2 = p_1 g$ となり、結合律やその他の法則を満たしている。

(2)' G は、各点のまわりに忠実に作用している。すなわち、任意の $p \in P$, $l_1, l_2 \ni p$ に対し、ある $g \in G$ が一意に存在して、$l_2 = l_1 g$ となり、結合律やその他の法則を満たしている。

(3) 任意の $p_1 \in l_1$, $p_2 \in l_2$ に対して、次のような全単射 $f : P \to P$ が存在する。

(i) $f(p_1) = p_2$, $f(l_1) = (l_2)$ (setwise に)

(ii) $f(l) \in L$

(iii) $f(\{l | p \in l\}) = \{l | f(p) \in l\}$

(iv) 任意の $l \in L$, $p_1, p_2 \in l$ に対し、l 上で $p_2 = p_1 g$ となれば、$f(l)$ 上で $f(p_2) = f(p_1) g$ となる。

(iv)' 任意の $p \in P$, $l_1, l_2 \ni p$ に対し、点 p の周りで $l_2 = l_1 g$ となれば、$f(p)$ の周りで $f(l_2) = f(l_1) g$ となる。

(4) 任意の $p \in P$ に対し、$\{q \in P |$ ある $l \in L$ 上で $q = pg_0\}$ ($= l_p$ と置く) は線をなす、すなわち $l_p \in L$ である。また、$p \mapsto l_p$ という対応は、P と L の 1 対 1 対応を与える。

注意 (1) polygonometry とは、擬平面上に群を「幾何的な情報」を持たせるように作用させたものと言える。ここで言う「幾何的な情報」とは、定義 2 (2) で言えば、一意に存在する g が、直線 l 上の 2 点間の「向き付きの距離」を表すことを意味し、また定義 2 (2)' で言えば、一意に存在する g が、点 p を通る 2 直線間の「向き付きの角度」を表すことを意味している。

(2) 本来の polygonometry の定義では、「向き付きの距離」を表す群と「向き付きの角度」を表す群とをさらに区別する。例えば通常のユークリッド平面では、それぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ とする。しかし、ここで関心となるのは個々の構造ではなく、非同型なモデルの個数についてなので、特に必要がない限り簡単のために、距離と角度を表す群を同じものとしておく。なお、区別さ

れた場合にも、以下の定義はほぼ同様に進む。

(3) 言語をまだ定義していないので意味が薄いが、定義2 (3) は、polygonometry では、各点の周りは局所的には同型であると言うことを意味している。(ii),(iii) は、p の周りの直線たちと、$f(p)$ の周りの直線たちの間には１対１の対応が付いていることを意味し、(iv) では、群の作用が f で保存されることを表している。

(4) 定義2 (4) は、g_0 という固定された長さの半径の円が直線であることを表している。直感的には、球面上の幾何を想像してもらえればよい。一点から、経線の半分の距離にある点の軌跡は直線になっている。(正確に言えば、これは polygonometry にはなっていない。２直線の交点が必ず２点あるからである。しかし、これを変形して polygonometry にすることは容易である。)

定義3　$\mathrm{pm} = (G, \mathcal{P}, g_0)$ を polygonometry とする。$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$ ($g_i, h_j \in G,\ i,j = 1,\ldots,n,\ n \geq 3$) が pm での n 角形であるとは、ある $p_1,\ldots,p_n \in P,\ l_1,\ldots,l_n \in L$ が存在して、$p_{i+1} = p_i g_i,\ l_{i+1} = l_i h_i$ ($i = 1,\ldots,n\ (\mathrm{mod} n)$) となるときに言う。

定義4　$\mathrm{pm} = (G, \mathcal{P}, g_0)$ を polygonometry とする。以下の行列内に現れる元は、すべて G の元とする。

(1) pm での n 角形 $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$ ($n \leq 3$) の回転 (permutation) とは、$\begin{pmatrix} g_{k+1} & \cdots & g_n & g_1 & \cdots & g_k \\ h_{k+1} & \cdots & h_n & h_1 & \cdots & h_k \end{pmatrix}$ ($k = 0,\ldots,n-1$) と表される n 角形のことを言う。

(2) pm での n 角形 $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$ ($n \leq 3$) の逆順 (turn) とは、$\begin{pmatrix} g_n^{-1} & g_{n-1}^{-1} & \cdots & g_1^{-1} \\ h_n^{-1} & h_{n-1}^{-1} & \cdots & h_1^{-1} \end{pmatrix}$ と表される n 角形のことを言う。

(3)pm での２つの多角形 $S_1 = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_{k-1} & g_k & \cdots & g_m \\ h_1 & \cdots & h_{k-1} & h_k & \cdots & h_m \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} g_m^{-1} & \cdots & g_{k+1}^{-1} & g_k^{-1} & g'_1 & \cdots & g'_n \\ h_m^{-1} & \cdots & h_{k+1}^{-1} & h'_0 & h'_1 & \cdots & h'_n \end{pmatrix}$ に対し、S_1 と S_2 の $(g_k, \cdots, g_m)$ での結合 (join) とは、$\begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_{k-1} & g'_1 & \cdots g'_n \\ h_1 & \cdots & h_{k-1} \cdot h'_0 & h'_1 & \cdots h'_n \cdot h_m \end{pmatrix}$ のことを指す。

定義5　pm を polygonometry とする。pm における任意の多角形が、pm における３角形から、回転、逆順、結合の操作を用いて作られるとき、pm が trigonometry であるという。

次に、言語を入れる。これによって、「可算モデルの個数」等の概念がはっきりする。

定義6 $\mathrm{trm} = (G, \mathcal{P}, g_0)$ を trigonometry とする。trm に対する言語 L を

$$L = L(\mathrm{trm}) = \{Q_g(\cdot,\cdot)|g \in G\} \cup \{R_g(\cdot,\cdot,\cdot)|g \in G\}$$

(Q_g, R_g はいずれも関係記号) で定義する。L-構造 $M = M(\mathrm{trm})$ を以下の解釈で定義する：

$M = P$,

$Q_g^M = \{(p_1, p_2)|$ ある $l \in L$ 上で $p_2 = p_1 g\}$,

$R_g^M = \{(p_0, p_1, p_2)|p_0, p_1 \in l_1, p_0, p_2 \in l_2$ なる $l_1, l_2 \in L$ があって $l_2 = l_1 g\}$.

$T(\mathrm{trm}) = \mathrm{Th}(M(\mathrm{trm}))$ と置き、これを trm の理論と呼ぶ。

注意 polygonometry の定義を用いれば、R_g は Q_g たちから定義可能であることがわかる (Sudoplatov [3])。

また、polygonometry の定義（とその後の注意）より、$M(\mathrm{trm})$ の任意の２点のまわりは局所的に同型なので、$T(\mathrm{trm})$ において、空集合上の１変数タイプは１つしか存在しない。

G が有限の時は、$T(\mathrm{trm})$ のモデルは、簡単な構造をしているので、例を兼ねて、この時の $I(\lambda, T(\mathrm{trm}))$ （$T(\mathrm{trm})$ の濃度 λ の非同型なモデルの個数）を決定してみる。そのために必要な定義をする。

定義7 $\mathcal{P} = (P, L, \in)$ を擬平面とする。

(1) $p_1 \neq p_2 \in P$ に対し、$p_1 \in l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n \ni p_2$ かつ $l_i \cap l_{i+1} \neq \emptyset$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ となる $l_1, \ldots, l_n$ が存在するとき、このような n の最小値を $d(p_1, p_2)$ で表す。そのような $l_1, \ldots, l_n$ が存在しないとき、$d(p_1, p_2) = \infty$ と置く。$p_1 = p_2$ の時は、$d(p_1, p_2) = 0$ と定義する。

(2) $p \in P$ に対し、$\{q \in P|d(p,q) < \infty\}$ のことを、p の連結成分という。

(3) $d(\mathcal{P}) = \begin{cases} \max(\{d(p,q) < \infty | p, q \in P\} & \text{(最大値がある時)} \\ \infty & \text{(最大値がない時)} \end{cases}$

と置き、擬平面の直径と呼ぶ。

定理8 G を有限群、$\mathrm{trm} = (G, \mathcal{P}, g_0)$ を trigonometry とする。$d(\mathcal{P}) < \infty$ の時、$T(\mathrm{trm})$ は totally categorical, つまり任意の無限濃度に対して、その濃度のモデルの数は同型を除いてただ１つである。

（証明） G が有限で、$d(\mathcal{P}) < \infty$ であることから、$M(\mathrm{trm})$ の連結成分の濃度は有限。polygonometry が局所的に一様であることから、各連結成分は同型である。任意の $M \models T(\mathrm{trm})$ に対し、各点 $a \in M$ の連結成分は一意に定まる（G が有限だから、a との距離が n であるということを論理式で書けて

しまうから）ので、$T(\mathrm{trm})$ のモデルは、連結成分の個数によって定まる。したがって、濃度を無限の λ に持つようなモデルは同型を除いて１つだけに定まる。 ∎

定理９ G を有限群、$\mathrm{trm} = (G, \mathcal{P}, g_0)$ を trigonometry とする。$d(\mathcal{P}) = \infty$ の時、$T(\mathrm{trm})$ の非同型な可算モデルの数は $\aleph_0$ 個。任意の非可算な無限濃度に対しては、その濃度のモデルの数は同型を除いてただ１つである。

（証明）G が無限で、$d(\mathcal{P}) = \infty$ より、$M(\mathrm{trm})$ の連結成分の濃度は $\aleph_0$ である。定理８の証明と同じ理由により、各点 $a \in M$ の連結成分は一意に定まり、しかもみな同型である。従って $T(\mathrm{trm})$ のモデルは、これも連結成分の個数によって定まる。可算モデルの種類は、連結成分が１個、２個、…、$\aleph_0$ 個の、$\aleph_0$ 種類あり、濃度が非可算なモデルは、その濃度と同じ数の連結成分を持っているので、みな同型となる。 ∎

群 G が無限の時には、有限の時のような簡単な構造にはなっていない。例えば、$M \models T(\mathrm{trm})$ と $a \in M$ にたいして、a の M での連結成分という概念が曖昧になる。

$$\{Q_{g_0}(x, a) \wedge Q_{g_0}(a, b)\} \cup \{\neg R_g(a, b, x) | g \in G\}$$

$(a, b \in M)$ という部分タイプが、コンパクト性定理より解 c をもつので、a, c を通る直線、a, b を通る直線は存在するのに、その２直線の角度を表す G の元が存在しないということがある。つまり、a を含んだ「連結成分」（もとの擬平面と同型な構造）が無限個あるようなモデルも存在する。

このようなときは、同一直線上にある２点 a, b で、その距離も G の元で表せるようなものをとってくると、$\mathrm{dcl}(a, b)$ が素モデルになるので、それを基準にモデルの構造を考えていくことになる。

有限群の trigonometry の理論の次に簡単な理論は、２つの素モデルの交わりを高々１点にするような trigonometry の理論である。これについては、例えば、各 n について n 角形が有限種類しかないような trigonometry（everywhere finitely defined trigonometry という。[3] 参照）や、h.p. polygon を持たないような trigonometry（いかなる射影平面上の trigonometry にも埋め込めないような trigonometry。[4] 参照）などが Sudoplatov によって調べられている。

参考文献

[1] Ehud Hruhshovski, "A stable $\aleph_0$- categorical pseudoplane," Unpublished notes, 1988.

[2] S. V. Sudoplatov, "Group polygonometries and related algebraic systems (an informative survey)," Contributions to general algebra, 11 (Olo-

mouc/Velkœ.AœNi Kārlovice, 1998), 191-210, Heyn, Klagenfurt, 1999.
[3] S. V. Sudoplatov, "The number of models of theories of everywhere finitely determined polygonometries," Sibirsk. Mat. Zh. 40 (1999), no. 3, 689-694, iv (Russian); translation in Siberian Math. J. 40 (1999), no. 3, 590-594.
[4] S. V. Sudoplatov, "ω-stable trigonometries on a projective plane," Mat. Tr. 5 (2002), no. 1, 135-166 (Russian).