数理解析研究所講究録 1346 巻 2003 年 91-98

Chen の方程式をみたす6次元球面内の 3次元CR部分多様体について

東京農工大学・工学部　間下 克哉 (Katsuya Mashimo)
Faculty of Technology,
Tokyo University of Agriculture and Technology

本稿は橋本英哉氏（名城大）との共同研究によるものである.

6 次元球面 S^6 上に, ケーリー数の積を用いて概複素構造 J が定義される. ケーリー代数の自己同型群 G_2 が概複素構造を保存する等長変換全体のなす群と一致し S^6 は $G_2/SU(3)$ と同相である.

等質空間 $M=G/K$ の各点 x における接空間 T_xM の p 次元部分空間全体のなすグラスマン束 $G^p(TM)=\cup_{x\in M}\wedge^p(T_xM)$ には自然に群 G が作用する. グラスマン束 $G^p(TM)$ 内のひとつの G 軌道 Σ をとるとき, M の p 次元部分多様体 N が Σ 部分多様体であるとはすべての $x\in N$ に対して $T_xN\in\Sigma$ であるときをいう. Σ 部分多様体の研究を総称してグラスマン幾何学というが, グラスマン幾何学の主要なテーマは

- Σ 部分多様体が存在するかどうかを調べること
- Σ 部分多様体の性質を調べること

である.

6 次元球面 $S^6=G_2/SU(3)$ の場合, 全実部分多様体やCR部分多様体はある Σ に対する Σ 部分多様体であり, 全実部分多様体についてはとくに多くの研究がなされている. 例えば, Dillen–Vrancken は 6 次元球面内の 3 次元CR部分多様体で Chen の不等式の等式を満たすものを分類している. 分類結果に現れるものは6 次元球面の 3 次元全実部分多様体の例として最初に知られたものを含んでいる.

一方, 3 次元CR部分多様体については全実部分多様体に比べて知られていることが少ない. 本稿では, 前述の Dillen–Vrancken の扱った問題を, 3 次元CR部分多様体について考える.

1 準備

四元数体 $\mathbf{H}$ の直和 $\mathfrak{C}=\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ に積

$$(q,r)\cdot(s,t)=(qs-\bar{t}r,tq+r\bar{s}),\quad q,r,s,t\in\mathbf{H}$$

を導入したものをケーリー代数という．$1, i, j, k$ を $\mathbf{H}$ の標準基底とし $\mathfrak{C}$ に内積 $\langle , \rangle$ を $e_0 = (1,0)$, $e_1 = (i,0)$, $e_2 = (j,0)$, $e_3 = (k,0)$, $e_4 = (0,1)$, $e_5 = (0,i)$, $e_6 = (0,j)$, $e_7 = (0,k)$ が正規直交基底となるように定める．$\mathfrak{C}$ の自己同型全体のなす群は $\mathfrak{g}_2$ 型のコンパクト連結な単純リー群であることが知られている．(この群を G_2 で表す)．

$$\mathfrak{C}_0 = \{x \in \mathfrak{C} | x + \overline{x} = 0\} = \sum_{j=1}^{7} \mathbf{R} e_j.$$

とおくとき，G_2 はベクトル e_0 と内積 $\langle , \rangle$ を保存する．これより G_2 は $SO(7) = SO(\mathfrak{C}_0)$ の部分群と見なせる．次の補題により G_2 は 6 次元球面に推移的に働く．

補題 1 互いに直交する単位ベクトル $a_1, a_4 \in \mathfrak{C}_0$ に対して $a_5 = a_1 \cdot a_4$ とおく．さらに単位ベクトル $a_2 \in \mathfrak{C}_0$ を a_1, a_4, a_5 に直交するようにとる．このとき $a_3 = a_1 \cdot a_2$, $a_6 = a_2 \cdot a_4$, $a_7 = a_3 \cdot a_4$ とおけば直交行列

$$g = (\, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \,)$$

は G_2 の元で $g(e_4) = a_4$ を満たす．

G_{ij} $(1 \leq i \neq j \leq 7)$ を次で定まる歪対称行列とする．

$$G_{ij}(e_k) = \begin{cases} e_i, & \text{if } k = j, \\ -e_j, & \text{if } k = i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

補題 2 G_2 のリー環 $\mathfrak{g}_2$ は，歪対称行列全体のなす線形空間の

$$\begin{array}{llll} G_{23} + G_{45} + G_{76}, & G_{31} + G_{46} + G_{57}, & G_{12} + G_{47} + G_{65}, & G_{51} + G_{73} + G_{62}, \\ G_{14} + G_{72} + G_{36}, & G_{17} + G_{24} + G_{53}, & G_{61} + G_{34} + G_{25}, & \end{array}$$

に直交する線形部分空間である．

2 Σ 部分多様体の存在

$\mathfrak{C}_0$ の正規直交基底 $e_1, \cdots, e_7$ の相対基底を $\omega_1, \cdots, \omega_7$ とし

$$\Omega = (\omega_2 + \sqrt{-1}\omega_3) \wedge (\omega_4 + \sqrt{-1}\omega_5) \wedge (\omega_7 + \sqrt{-1}\omega_6)$$

とおく．(Ω が $T_{e_1}S^6$ 上の $SU(3)$-不変 3 形式であることに注意して) S^6 上への Ω の G_2 不変な拡張も Ω で表す．このとき次がわかる．

命題 1 グラスマン束 $G^3(TS^6)$ の二つの元 ξ_1, ξ_2 が同一の G_2 軌道上にあることと $\Omega(\xi_1)=\Omega(\xi_2)$ とは同値である．

S^6 の部分多様体 N が**全実部分多様体**であるとは $J(T_xN)\perp T_xN$ がすべての $x\in N$ に対して成り立つときをいい，**ＣＲ部分多様体**であるとは N の分布 $\mathcal{H}$ で，T_xN 内での $\mathcal{H}_x$ の直交補空間を $\mathcal{H}_x^\perp$ であらわすとき，$J(\mathcal{H}_x)=\mathcal{H}_x$ および $J(\mathcal{H}_x^\perp)\perp T_xN$ がすべての $x\in N$ に対してであるものが存在するときをいう．

絶対値が 1 の複素数 κ に対して

$$\Sigma_\kappa=\{\xi\in G_3(TS^6):\omega(\xi)=\kappa\}.$$

とおく．S^6 の 3 次元部分多様体 N が全実部分多様体ならば N の接空間 T_xN は $|\Omega(T_xN)|=1$ を満たすことは容易にわかる．N を S^6 内の 3 次元全実部分多様体とするとき，その接空間は $\omega(T_xN)=\pm1$ $(x\in N)$ を満たすことが知られている（[5]).

この結果に関連して，

命題 2 S^6 の 3 次元コンパクト Σ_κ 部分多様体が存在するならば κ は実数である．

がわかっているが，上の命題の仮定からコンパクト性の条件をはずすことができるかどうかは不明である．

3　全実およびＣＲ部分多様体の例

1.　J 正則曲面上の管　$\bar\phi:M^2\to S^6$ が J 正則曲面であるとは，$J(\bar\phi_*(T_xM))=\bar\phi_*(T_xM)$ がすべての $x\in M$ に対して成立するときをいう．σ を $\bar\phi$ の第 2 基本形式とする．J 正則曲線 M の正規直交枠 e_1,e_2 をとるとき，$\sigma(e_1,e_1)=-\sigma(e_2,e_2)$ が成り立つが，測地的点（$\sigma=0$ である点）を除いて

$$|\sigma(e_1,e_1)|=|\sigma(e_1,e_2)|\ (\neq 0)$$

が成り立つ．$\bar\phi:M^2\to S^6$ を測地的点のない J 正則曲線とする．e_1, e_2 を $x\in M^2$ における正規直交枠とし，N_x^1 を $\sigma(e_1,e_1)$, $\sigma(e_1,e_2)$ の張る法空間の部分空間，N_x^2 を法空間における N_x^1 の直交補空間とする．法束の部分束 $N_i=\cup_{x\in M}N_x^i$ の（局所的な）正規直交枠各点 ξ_1, ξ_2 をとり

$$\phi_{i,\theta}(x,t)=\cos\theta x+\sin\theta(\cos t\xi_1+\sin t\xi_2)$$

により $\phi_{i,\theta}$ は第 i 法束 N_i から S^6 への写像を定める．

2. Generalized Helicoid 実数の組 $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ に対して

$$\phi_{(a,b,c)} : S^2 \times \mathbf{R} \to S^6;$$

を

$$\phi_{(a,b,c)}(x_1,x_2,x_3;t) = (x_1\cos(at), x_2\cos(bt), x_3\cos(ct), 0, x_1\sin(at), x_2\sin(bt), x_3\sin(ct)) \tag{3.1}$$

により定める.

命題 3 (橋本–間下 [4]**)** $\phi_{(a,b,c)}(S^2 \times \boldsymbol{R})$ は（特異点を除いて） S^6 のＣＲ部分多様体である.

3. 等質部分多様体 A. I. Mal'cev により G_2 の３次元単純リー部分群は（共役を除いて） ４つあることが知られている. 間下はそれらの軌道で S^6 の３次元極小部分多様体であるものを分類した（[5] ）.

次の３つの元

$$\begin{cases} X_1 &= 4G_{32} + 2G_{54} + 6G_{76}, \\ X_2 &= \sqrt{6}(G_{37} + G_{26} - 2G_{15}) + \sqrt{10}(G_{42} - G_{35}), \\ X_3 &= \sqrt{6}(G_{63} + G_{27} - 2G_{41}) + \sqrt{10}(G_{25} - G_{34}). \end{cases}$$

が張る $\mathfrak{g}_2$ の３次元部環が生成する G_2 のリー部分群を U_4 で表す. U_4 は（$SO(7)$ の部分群として） $\mathfrak{C}_0$ に既約に働く.

U_4 の軌道で S^6 の極小部分多様体であるものは以下のとおりである；

- e_2 を通る軌道（全実部分多様体）
- e_6 を通る軌道（全実部分多様体）
- ＊＊＊＊を通る軌道

U_4 の軌道でＣＲ部分多様体であるものは無数に存在する（[4]）

4 Chen の不等式

B. Y. Chen により次の定理が知られている.

定理 1 M を，定曲率 c の n 次元空間形 $R^m(c)$ 内の m 次元リーマン部分多様体とする．τ をスカラー曲率，H を平均曲率とするとき，M の各点 x における断面曲率 K の最小値は次の不等式をみたす；

$$\inf K \geq (1/2)\{\tau - n^2(n-2)/(n-1)\ |H|^2 - (n+1)(n-2)c\} \tag{4.2}$$

不等式 (4.2) で等号が成立するのは，M の接空間 T_xM の直交枠 $e_1, \cdots, e_n$ および法空間 N_xM の直交枠 $e_{n+1}, \cdots, e_m$ で第２基本形式がつぎの形になるものが存在することと同値

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{pmatrix}, A_\alpha = \begin{pmatrix} h_{11}^\alpha & h_{21}^\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21}^\alpha & -h_{11}^\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

ただし $\alpha = n+2, \cdots, m$.

Chen の不等式 (4.2) で等号が成立する部分多様体については，多く研究がなされている．Dillen-Vrancken は６次元球面内の全実部分多様体で Chen の不等式 4.2 で等号が成立する部分多様体について研究している．

定理 2 (Dillen–Vrancken [2]) ６次元球面内の充満でない３次元全実部分多様体は Chen の不等式 (4.2) の等号を満たす.

定理 3 (Dillen–Vrancken [2]) ６次元球面内の J 正則曲線 $\bar{\phi}: N^2 \to S^6$ 上の第２法則方向の半径 $\pi/2$ の管は３次元前全実部分多様体で Chen の不等式 (4.2) の等号を満たす.

Dillen-Vrancken は６次元球面 S^6 の充満な全実部分多様体で Chen の不等式 (4.2) の等号が成立するものは定理３のものに限ることを示している．

5 主定理

写像

$$(x_1, x_2, x_3; t) \mapsto (x_1 \cos t, x_2 \cos t, x_3, 0, x_1 \sin t, -x_2 \sin t, 0)$$

から特異点を除いた $\varphi_{(1,-1,0)}: S^2 \setminus (0,0,\pm 1) \times \mathbf{R} \to S^6$ はＣＲ部分多様体であることを３節で述べた．Chen の不等式において等号が成立するＣＲ部分多様体でさらに極小部分多様体であるものについて次が成り立つ.

定理 4 $\varphi : M^3 \to S^6$ を３次元ＣＲ部分多様体でさらに極小部分多様体でもあるものとする．φ が Chen の不等式の等号を満たせば φ は $\varphi_{(1,-1,0)}$ の一部分と G_2 の作用によりと一致する．

以下定理の証明の概略を述べる．

$\varphi : M^3 \to S^6$ を３次元ＣＲ部分多様体とする．U を M の適当な開集合とし，U 上の直交枠 e_1, e_2, e_3 を $J(e_1) = e_2$ を満たすようにとる．$e_0 = \varphi$, $e_4 = J(e_3)$, $e_1 \times e_3 = e_5$, $e_2 \times e_3 = e_6$ とおくと，$g = [e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6]$ は G_2 に値を持つ関数である．

M の各点 x に対して $\varphi(x)$ における直交枠 $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ を

$$\begin{cases} e_0 = \varphi(x), \\ e_1, e_2, e_3 \in d\varphi(T_x M), \quad J(e_1) = e_2, \\ e_4 = J(e_3), \quad e_1 \times e_3 = e_5, \quad e_2 \times e_3 = e_6 \end{cases} \tag{5.4}$$

により定めると，$g = [e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6]$ は G_2 に値を持つ関数である．

g による G_2 の Maurer-Cartan 形式の引き戻し $g^{-1}dg$ を考える．$\mathbf{R}^7$ における方向微分を D で表し，

$$\omega_{AB}(X) = \langle D_X e_B, e_A \rangle$$

とおけば $g^{-1}dg = [\omega_{ij}]_{0 \leq i,j \leq 6}$ は U 上の $\mathfrak{g}_2$ に値をもつ関数だから補題 2 より次を得る（ただし，ω_{i0} は単に ω_i とした）．

命題 4

$$\begin{cases} 0 = \omega_1 + \omega_{63} - \omega_{54} \\ 0 = \omega_2 - \omega_{53} - \omega_{64} \\ 0 = \omega_3 - \omega_{61} + \omega_{52} \\ 0 = \omega_{21} + \omega_{43} - \omega_{65} \\ 0 = \omega_{31} - \omega_{42} \\ 0 = \omega_{32} + \omega_{41} \\ 0 = \omega_{62} + \omega_{51} \end{cases} \tag{5.5}$$

$\varphi : M^3 \to S^6$ を S^6 の３次元ＣＲ部分多様体とする．e_1, e_2 の取り方には自由度があるが，$\langle \sigma(e_1, e_3), e_5 \rangle = A$, $\langle \sigma(e_2, e_3), e_5 \rangle = B$ とおくと

$$A^2 + B^2 + B = 0$$

が成り立つことがわかる．以下 e_1, e_2 は $A = 0$ を満たすようにとってあるものとする．

命題 5.5 と次の命題とあわせて用いることにより，ふたつの３次元ＣＲ部分多様体が G_2 の作用で合同であることの判定ができる．

命題 5 (cf. Grigitths, [3]) N を連結な可微分多様体，G をリー群とする．$f,\ f'$: $N \to G$ を可微分写像とするとき次は同値である．

(1) 適当な $g \in G$ に対して $f = g \circ f'$ が成り立つ，

(2) G の *Maurer-Cartan* 形式 ω に対して $f^*\omega = f'^*\omega$ が成り立つ，

定理 5 (G_2 合同性) M を向き付けられた３次元リーマン多様体とし，

$$\varphi,\ \varphi'\ :\ M \to S^6$$

を S^6 内のふたつの３次元ＣＲ部分多様体とする．M の各点に $J(d\varphi(e_1)) = e_2$ および $J(d\varphi'(e_1)) = e_2$ 満たす互いに直交する長さ１の接ベクトル $e_1,\ e_2$ が存在することを仮定し，これを M の向きに同調する正規直交枠 e_1, e_2, e_3 に拡張しておく．φ に沿った $\boldsymbol{R}^7$ の正規直交枠 $e_0, e_1, \cdots, e_6$ を (5.4) により定め，φ' に沿った $\boldsymbol{R}^7$ の正規直交枠 $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4', e_5', e_6'$ も同様に定める．$\varphi,\ \varphi'$ の第２基本形式を $\sigma,\ \sigma'$ であらわすとき，

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(e_3, e_3), e_\alpha \rangle &= \langle \sigma'(e_3, e_3), e_\alpha' \rangle, \quad \alpha = 4, 5, 6, \\
\langle \sigma(e_i, e_3), e_\beta \rangle &= \left\langle \sigma'(e_i, e_3), e_\beta' \right\rangle, \quad i = 1, 2,\ \beta = 5, 6, \\
\langle \sigma(e_i, e_j), e_\beta) \rangle &= \left\langle \sigma'(e_i, e_j), e_\beta') \right\rangle, \quad i, j = 1, 2,\ \beta = 5, 6
\end{aligned}$$

が成り立てば $\varphi = g \circ \varphi'$ となる元 $g \in G_2$ が存在する．

以下３次元ＣＲ部分多様体 $\varphi : M^3 \to S^6$ をは極小部分多様体で，さらに Chen の不等式の等号を満たすものとする．(4.3) から目的の部分多様体の各点で $\sigma(X, X) = 0$ を満たす接ベクトル $X (\neq 0)$ が存在することがわかり，さらに (5.5) も考慮にいれることにより

$$\begin{aligned}
&\omega_{61} = \omega_3, \quad \omega_{63} = \omega_1, \quad \omega_{54} = 2\omega_1, \quad \omega_{65} = \omega_2 \\
&\omega_{51} = \omega_{52} = \omega_{53} = \omega_{62} = 0
\end{aligned}$$

がわかる．

S^6 の３次元ＣＲ部分多様体に対して局所的な切り口 $g : M \to G_2$ が構成され，g による Maurer-Cartan 形式の引き戻しは (5.5) をみたすが，さらに Maurer-Cartan の微分方程式

$$d\omega_{ij} + \sum_{l=0}^{6} \omega_{il} \wedge \omega_{lj} = 0$$

(すなわち，S^6 の (概複素構造を考えない単なる) リーマン部分多様体 M の Gauss, Codazzi, Ricci の方程式) を満たす．これを書き下して次を得る．

$$\omega_{21} = \omega_{43} = -\omega_{32} = \alpha\omega_1, \quad \omega_{31} = 0,$$
$$d\alpha(e_2) = \alpha^2 + 1, \quad d\alpha(e_1) = d\alpha(e_3) = 0.$$

この微分方程式は簡単に解くことができて，M は $S^2 \times \mathbf{R}$ 上にリーマン計量

$$ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + ((x_1)^2 + (x_2)^2)dt^2$$

を入れたものであることがわかる．

φ と $\varphi_{(1,-1,0)}$ に対して定理 5 を適用することにより定理 4 を得る．

参考文献

[1] B. Y. Chen, *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds,* Archiv Math., 60(1993), 568–578

[2] F. Dillen and L. Vrancken, *Totally real submanifolds in* $S^6(1)$ *satisfying Chen's equality*, Trans. Amer. Math. Soc., 348(1996), 1633–1646.

[3] Griffiths, P., *On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry,* Duke Math. J., 41(1974), 775–814.

[4] Hashimoto, H. and Mashimo, K., *On some 3-dimensional CR submanifolds in* S^6, Nagoya Math. J., 45(1999), 171–185

[5] K.Mashimo. *Homogeneous totally real submanifolds of* S^6, Tsukuba J. Math., 9(1985), 185-202.