数理解析研究所講究録 1346 巻 2003 年 155-158

Ruled Lagrangian submanifolds in complex projective spaces

島根大学総合理工学部 木村 真琴 (Makoto Kimura)

Department of Mathematics, Shimane Unversity

$\mathbb{CP}^n$ を正則断面曲率 4 の Fubini-Study 計量をもつ複素射影空間とする。$\mathbb{CP}^n$ 内で、各 leaf が全測地的、totally real $\mathbb{RP}^{n-1}$ であるような余次元 1 の foliation をもつ Lagrangian submanifolds M^n について考える。その為に $\mathbb{CP}^n$ 内の全測地的、totally real $\mathbb{RP}^{n-1}$ 全体のなす空間を $\mathcal{M}_n$ とする。このとき、$\mathcal{M}_n$ は等質空間 $U(n+1)/K_n$,

$$K_n = \left\{ e^{i\theta} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix};\ g_1 \in O(n),\ g_2 \in U(1),\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

とみなすことができる。ユニタリー群 $U(n+1)$ に自然な両側不変計量を入れる。このとき、射影 $\hat{\pi}: U(n+1) \to \mathcal{M}_n$ が Riemannian submersion となるように、$\mathcal{M}_n$ に Riemann 計量を導入する。

$\gamma: I \to \mathcal{M}_n$ を $\mathcal{M}_n$ 内の (正則) 曲線とし、$g: I \to U(n+1)$ を γ の $\hat{\pi}$ に関する (一つの) horizontal lift とする。このとき、写像 $\widetilde{\Phi}: I \times S^{n-1} \to S^{2n+1} (\subset \mathbb{C}^{n+1})$ を

$$\widetilde{\Phi}(t, \mathbf{x}) = g(t) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{x} \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n,\ 0 \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

で定義し、$\Phi: I \times S^{n-1} \to \mathbb{CP}^n$ を $\Phi = \pi \circ \widetilde{\Phi}$ (ここで $\pi: S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ は Hopf fibration) とすると、その像は $\mathbb{CP}^n$ 内の全測地的 $\mathbb{RP}^{n-1}$ の 1 パラメーター族からなり、horizontal lift γ の取り方にはよらない。

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{o}(n) \right\} \oplus \left\{ \sqrt{-1} \begin{pmatrix} \alpha E_n & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

(E_n は n 次単位行列) と置くと、$\mathfrak{k}$ は K_n の Lie 環となる。

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{-1}B & \mathbf{z} \\ -\mathbf{z}^* & 0 \end{pmatrix} \middle| B \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}),\ \mathrm{trace}\, B = 0,\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \right\}$$

(Sym$(n,\mathbb{R})$ は n 次実対称行列全体) と置くと、$\mathfrak{u}(n+1)=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ は $U(n+1)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(n+1)$ の直和分解となる。与えられた $\mathcal{M}_n$ 内の曲線 γ とその lift $g: I \to U(n+1)$ が、射影 $\hat{\pi}$ について horizontal であるための必要十分条件は、すべての $t \in I$ について $g(t)^{-1}g'(t) \in \mathfrak{p}$ となることである。

$\mathcal{M}_n$ の元に対して、その $\mathbb{RP}^{n-1}$ を含む複素射影超平面 $\mathbb{CP}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^n$ が一意的に定まる。$\{\mathbb{CP}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^n\}$ を改めて $\mathbb{CP}^n$ と同一視し、このようにして定義される fibration を $\tilde{\pi}: \mathcal{M}_n \to \mathbb{CP}^n$ とする。Φ の微分を計算することにより、次が分かる。

命題 0.1 $\mathcal{M}_n$ 内の曲線 γ から構成される $\Phi: I \times S^{n-1} \to \mathbb{CP}^n$ が (正則点において) Lagrangian immersion となるための条件は、対応する $g: I \to U(n+1)$ が $\tilde{\pi}$ に関して horizontal。

このとき、

$$g(t)^{-1}g'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{z}(t) \\ -\mathbf{z}(t)^* & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる。

次に、上の $\Phi: I \times S^{n-1} \to \mathbb{CP}^n$ が極小となるための条件を求める。(必要なら)$\gamma: I \to \mathcal{M}_n$ のパラメータを取り換えて、(2) の $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{C}^n$ のノルムが常に 1 であるとしてよい。Φ の平均曲率ベクトルを計算することにより、Φ が極小になるための条件は、任意の単位実ベクトル $\mathbf{x} \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathrm{Im}(\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)^*)\mathbf{x} = 0$ と ${}^t\mathbf{x}\,\mathrm{Im}(\mathbf{z}'(t)\mathbf{z}(t)^*)\mathbf{x} = 0$ を満たすことである。このことから、次がわかる。

定理 0.2 複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ 内の全測地的 $\mathbb{RP}^{n-1}$ の 1 パラメータ族からなる Lagrangian 部分多様体 M^n が極小ならば、全測地的である。

そこで、極小性よりも弱い条件である「Hamiltonian 極小 Lagrangian 部分多様体」[3] について調べる。$(P^{2n}, \langle\ ,\ \rangle)$ を Kähler 多様体、M^n をその Lagrangian 部分多様体とする。V を M に沿ったベクトル場とするとき、M 上の 1-form α_V を $\alpha_V = \langle JV, \cdot \rangle|_{TM}$ で定義する。埋め込みの smooth family $\iota_t: M \to P$ は、その変分ベクトル場 V から作られる 1-form α_V が exact であるとき **Hamiltonian deformation** であるという。M^n は、その任意の Hamiltonian deformation に関して臨界点であるとき **Hamiltonian minimal** (略して H-minimal) であるという。Oh [3] によって、特に M^n が compact であるとき、M^n が H-minimal であるための必要十分条件は

$$\delta\alpha_H = 0 \quad (H \text{ は平均曲率ベクトル}) \tag{3}$$

である (第一変分公式)。この条件は $\operatorname{div} JH = 0$ と同値であるので、以下 (局所的に) $\operatorname{div} JH = 0$ をみたす Lagrangian 部分多様体 M^n について考える。

n 次実行列 A から定義される 2 次形式を $Q(A) = {}^t xAx$ と表す。曲線 $\gamma : I \to \mathcal{M}_n$ とその holizontal lift $g : I \to U(n+1)$ から (2) で定義される $\mathbf{z}(t)$ に関して、$G(= G(t,x)) = Q(\operatorname{Re}\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)^*)$ とおく。(1) で定義される $\Phi : I \times S^{n-1} \to \mathbb{CP}^n$ について、$G = \|\Phi_*(\partial/\partial t)\|$ となり、Φ の正則点では $G > 0$ である。次が成り立つ。

$$\begin{aligned}2G^3 \operatorname{div}(JH) &= 2GQ(\operatorname{Im}(\mathbf{z}''(t)\mathbf{z}(t)^*)) - Q(\operatorname{Im}(\overline{\mathbf{z}(t)}^t \mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)^*)) \\ &\quad -6GQ(\operatorname{Re}(\mathbf{z}'(t)\mathbf{z}(t)^*))Q(\operatorname{Im}(\mathbf{z}'(t)\mathbf{z}(t)^*))\end{aligned}$$

ここで、特に $\mathcal{M}_n$ 内の曲線 γ が $U(n+1)$ の 1-parameter 部分群の軌道となっている場合 (この条件は $\mathbf{z}'(t) = 0$ と同値) を考えると、次がわかる。

定理 0.3 $U(n+1)$ の 1-parameter 部分群

$$g(t) = \exp t \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{z} \\ -\mathbf{z}^* & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{z} \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n)$$

による $\mathcal{M}_n$ 内の軌道 $\gamma(t)$ から構成される $\Phi : I \times S^{n-1} \to \mathbb{CP}^n$ が (正則点において) $\operatorname{div} JH = 0$ をみたす Lagrangian immersion となるための条件は、$\mathbf{z}$ が次のいずれかの条件を満たすことである：

(i) ある $x \in S^{n-1}$ と $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $\mathbf{z} = e^{\sqrt{-1}\theta}\mathbf{x}$. このとき、$\Phi$ は全測地的。

(ii) ${}^t\mathbf{z}\mathbf{z} = 0$.

この定理の (ii) において、$n \geq 3$ の場合には Φ は特異点をもつが、$n = 2$ のときには、Φ は正則で、その Lagrangian surface M^2 は次の性質をもつ：(a) Gauss 曲率 $K = 0$ (flat), (b) 平均曲率ベクトル H が法接続について平行で、0 ではない。なお、Ogata [2] によって次の事実が知られている：x を向き付けられた定曲率曲面 $M^2(K)$ から $\mathbb{CP}^2$ への isometric immersion で、その平均曲率ベクトル H が法接続について平行で、0 ではないとする。このとき、x は Lagrangian で $K = 0$ である。さらに、x の像は $U(3)$ の Abelian subgroup の軌道になっている ($\mathbb{CP}^2$ 内の極小 Lagrangian 曲面について、対応する結果は [1] で得られている)。

参考文献

[1] G. D. Ludden, M. Okumura and K. Yano, *A totally real surface in CP^2 that is not totally geodesic*, Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975), 186–190.

[2] T. Ogata, *Surfaces with parallel mean curvature vector in $P^2(C)$*, Kodai Math. J. 18 (1995), 397–407.

[3] Y.-G. Oh, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Zeitschrift 212 (1993), 175–192.

E-mail: mkimura@math.riko.shimane-u.ac.jp
http://susc3002.riko.shimane-u.ac.jp/