数理解析研究所講究録 1348 巻 2003 年 185-198

直交リー代数の普遍包絡環における列行列式を用いた中心元

(Central elements using column-determinants in the universal enveloping algebra of the orthogonal Lie algebra)

和地輝仁　北海道工業大・総合教育研究部

(WACHI, Akihito, Hokkaido Institute of Technology)

1 序

複素一般線形リー群 $GL_n(\mathbf{C})$ は, $n\times n$ 行列のなすベクトル空間 $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ に $g.X=Xg^{-1}$ $(g\in GL_n(\mathbf{C}), X\in\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C}))$ と作用し, これにより $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ 上の関数空間 (この論説では多項式だけ考えれば十分である) に $(g.f)(X)=f(Xg)$ と作用する. この作用を微分することで複素一般線形リー代数 $\mathfrak{gl}_n$ が $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ 上の関数空間に作用し, $\mathfrak{gl}_n$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ から $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ 上の多項式係数微分作用素環への代数準同型 ϕ が得られる. 非可換環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心の ϕ による像は, $GL_n(\mathbf{C})$-不変微分作用素である (さらに, $((h,g).f)(X)=f(h^{-1}Xg)$ $((h,g)\in GL_n(\mathbf{C})\times GL_n(\mathbf{C}))$ から誘導される $GL_n(\mathbf{C})\times GL_n(\mathbf{C})$ の作用に関しても不変微分作用素である).

$E_{ij}\in\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ を行列単位, x_{ij} を対応する座標関数, $\partial_{ij}=\partial/\partial x_{ij}$ を x_{ij} に関する偏微分作用素とすると, 次の Capelli 恒等式が知られている [Cap90]:

$$\det[x_{ij}]_{1\le i,j\le n}\det\left[\partial_{ij}\right]_{1\le i,j\le n}=\det\left[\sum_{k=1}^{n}x_{ki}\partial_{kj}+(n-j)\delta_{ij}\right]_{1\le i,j\le n}.$$

この等式は $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ 上の多項式係数微分作用素環の中での等式であり, 左辺の $GL_n(\mathbf{C})\times GL_n(\mathbf{C})$-不変微分作用素を, $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元の ϕ による像である右辺で表した等式と見ることができる. 実際, $\phi(E_{ij})=\sum_{k=1}^{n}x_{ki}\partial_{kj}$ であるので, $\mathbf{E}=(E_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{gl}_n))$ とおくと, 上式の右辺は

$$\det(\mathbf{E}+\mathrm{diag}(n-1,n-2,\dots,1,0))$$

という $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元の ϕ による像である. ここで, 成分が非可換な場合は行列式の定義において積の順番が重要であるが, この論説を通して det は列-行列式,

$$\det\Phi=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\Phi_{\sigma(1)1}\cdots\Phi_{\sigma(n)n}$$

を表す.

この論説の主題は, 直交リー代数に対して上のような列-行列式を用いた中心元を, split 実現 (3.1) のもとで構成することである. Split 実現ではなく, 直交リー代数を交代行列全体で実現した場合には, 列-行列式を用いた中心元の構成は既に Howe と Umeda により知られている [HU91] ので, §2でまずそれを復習する. しかし, Howe-Umeda の構成は直交リー代数の実現に強く依存しており, split 実現のもとでは同じ方法では中心元が構成できず, 列-行列式を用いた中心元の構成は知られていなかった. §3 では split 実現のもとで列-行列式を用いて中心元を構成する. Split 実現は対角成分に Cartan 部分代数をとれるので, 列-行列式を用いた中心元の Harish-Chandra 同型の像が容易にわかる. §4 では, Harish-Chandra 同型による像を与え, 構成した中心元による普遍包絡環の中心の代数独立な生成系の記述など, Harish-Chandra 同型による像からわかるいくつかの命題を与える. §5 では, 他の中心元との関係を考える. 特に行列式に類似した方法で構成される中心元との関係が重要であるが, この論説では symmetrized determinant (double-determinant) を用いた中心元 (Itoh-Umeda [IU01], Itoh [Ito00]) を復習し, 我々の中心元が本質的に symmetrized determinant を用いた中心元と等しいことを見る. §6 では直交リー代数の他の実現の場合や, 斜交リー代数の場合について列-行列式を用いた中心元の構成に関するいくつかの観察を紹介する. 直交リー代数のどんな実現でも列-行列式を用いて中心元が構成できているわけではなく, 斜交リー代数の場合は列-行列式を用いた中心元の構成自体できていない. §7 ではどのような現象がおきているときに列行列式を用いて中心元が構成できるかの, ひとつの表現論的説明をあたえる.

2 交代行列による実現のもとでの構成

この節では, 直交リー代数を交代行列で実現した場合の, 行列式型の中心元の構成 [HU91] を見る.

直交リー代数の交代行列による実現を

$$\mathfrak{o}_n = \{X \in \mathfrak{gl}_n \,;\ {}^tX + X = 0\}$$

とおき, まず, 一般線形リー代数の場合と同様に, リー代数 $\mathfrak{o}_n$ の元を並べた行列 $\mathbf{A}$ を,

$$A_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \in \mathfrak{o}_n,$$
$$\mathbf{A} = (A_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{o}_n))$$

で定める. すると, 一般線形リー代数の場合の $\mathbf{E}$ を $\mathbf{A}$ に変えただけといってもよい命題が成立する.

命題 2.1. 次で定める $C_n^{\mathfrak{o}_n}(u)$ は, 普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心に属する:

$$C_n^{\mathfrak{o}_n}(u) = \det(\mathbf{A} + uI_n + \mathrm{diag}(n-1, n-2, \ldots, 0)) \quad \text{(Howe-Umeda [HU91]).}$$

□

この命題の証明は，$\mathbf{A}$ の成分 A_{ij} たちの交換関係を本質的に用いており，従って直交リー代数の実現が変わり交換関係も変わると，同様の証明は通用しなくなることに注意しておく．この命題の証明はここでは与えないが，§7 でこの命題の証明に少し触れる．

3 Split 実現のもとでの構成

この節では，直交リー代数の split 実現のもとでの行列式型の中心元の構成を行う．前節の Howe-Umeda による中心元の構成は実現に強く依存しており，split 実現でそのまま適用することができない．ただ，split 実現での構成も実現に強く依存しており，他の実現にそのまま適用することはできない．

まず split 実現を定義する．一般に直交リー代数の実現は，n 次元ベクトル空間の内積をひとつとり，それを不変にする $\mathfrak{gl}_n$ の部分代数として得られる．$n \times n$ 非退化対称行列

$$S_n = (\delta_{i,n+1-j})_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

をとり，

$$\mathfrak{o}(S_n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n\ ;\ {}^tXS_n + S_nX = 0\} \tag{3.1}$$

と定め，これを直交リー代数の split 実現と呼ぶ．$\mathfrak{o}(S_n)$ は，主対角線ではない方の対角線に関して交代的であるような $\mathfrak{gl}_n$ の元全体のなす部分代数であり，リー代数として $\mathfrak{o}_n$ と同型である．

次にこれまでと同様に $\mathbf{F}$ を定める:

$$F_{ij} = E_{ij} - E_{n+1-j,n+1-i} \in \mathfrak{o}(S_n),$$
$$\mathbf{F} = (F_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{o}(S_n))).$$

この F_{ij} と $\mathbf{F}$ の定め方は，実は非退化対称行列 S_n を決めれば，ある意味で自然に決まるものである (cf. §6).

一般線形リー代数や直交リー代数の交代行列による実現の場合と同じように，$\mathbf{F}$ に対角シフト $(n-1, n-2, \ldots, 0)$ を入れて列-行列式 det を考えても，中心元にはならない．記号の簡単のために n-tuple $\tilde{\mathfrak{h}}_n$ を，

$$\tilde{\mathfrak{h}}_n = \begin{cases} (m-1, m-2, \ldots, 0; 0, -1, \ldots, -m+1) & (n = 2m), \\ (m-1/2, m-3/2, \ldots, 1/2; 0; -1/2, -3/2, \ldots, -m+1/2) & \\ & (n = 2m+1) \end{cases}$$

と定めると，列-行列式を用いた中心元は，次のように構成される．

定理 3.1. 複素数 u に対して, 次で定める $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ は, 普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心に属する:

$$C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u) = \det(\mathbf{F} + uI_n + \mathrm{diag}\,\tilde{\natural}_n).$$

Proof. 証明の概略を述べる. 一般に $n \times n$ 行列 $\Phi = (\Phi_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{o}(S_n)))$ が与えられたとき, その列-行列式 $\det \Phi$ は次のように外積代数を用いて表すことができる. $e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbf{C}^n$ の標準基底とし,

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} e_i \Phi_{ij} \quad \in \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{o}(S_n))$$

とおくと, 外積代数 $\bigwedge \mathbf{C}^n$ と $U(\mathfrak{o}(S_n))$ のテンソル積代数 $\bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{o}(S_n))$ において,

$$\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n = e_1 e_2 \cdots e_n \det \Phi$$

という等式が成立する. 従って $\Phi = \mathbf{F} + uI_n + \mathrm{diag}\,\tilde{\natural}_n$ とおいて, $\eta_1 \cdots \eta_n$ が全ての F_{ij} と可換であることを示せば, $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u) = \det \Phi$ が中心元であることが証明できる.

証明の概略は以上であるが, 証明の困難さについて注意しておく. 直交リー代数を交代行列で実現した場合や一般線形リー代数の場合は, η_j たちに性質の良い交換関係が成立するため証明は比較的容易であったが, split 実現の場合はその交換関係があまり良くないため可換性を示すことが困難になる. 実際, 本質的な部分では η_j の交換関係の助けを借りることが出来ずに, η_j の和をばらして計算を進めなくてはならない.

また, §7 で, 外積代数を用いた議論を進めて表現論的な考察を行う. □

注意 3.2. 列-行列式を用いた中心元 $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ における対角シフト $\tilde{\natural}_n$ は, 次のように '正ルートの和の半分' ρ とちょうど対応している.

$\mathfrak{o}(S_n)$ に属する対角行列全体のなす部分代数を $\mathfrak{h}$ とする (Cantan 部分代数). つまり $n = 2m$ または $n = 2m+1$ のとき, $\mathfrak{h} = \mathbf{C}F_{11} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}F_{mm}$ である. $\mathfrak{h}$ の基底 $\{F_{11}, \ldots, F_{mm}\}$ の双対基底を $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ とすると,

$$\rho = \begin{cases} (m-1)\varepsilon_1 + (m-2)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{m-1} + 0\varepsilon_m & (n = 2m), \\ (m-1/2)\varepsilon_1 + (m-3/2)\varepsilon_2 + \cdots + (1/2)\varepsilon_m & (n = 2m+1) \end{cases}$$

である. つまり $\tilde{\natural}_n$ の前半半分は, ちょうど ρ における ε_j の係数と一致している. また, $F_{ii} = -F_{n+1-i,n+1-i}$ に注意すると,

$$\tilde{\natural}_n = (\rho(F_{11}), \rho(F_{22}), \ldots, \rho(F_{nn}))$$

とも表せる.

一般線形リー代数の場合も同様に ρ と対角シフトが対応している. しかし, 直交リー代数を交代行列で実現した場合は, ρ と対角シフトは対応していない. □

さらに, 小行列を用いた中心元が構成できる. これは一般線形リー代数の場合や, 直交リー代数の交代行列による実現の場合も (紹介しなかったが) 同様に構成できる. $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u+v)$ を v の factorial power で展開した係数として, $1 \leq d \leq n$ に対して $C_d^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ を次のように定める:

$$C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u+v) = \sum_{d=0}^{n} v^{(d)} C_{n-d}^{\mathfrak{o}(S_n)}(u+d/2).$$

$$v^{(d)} = \begin{cases} 1 & (d=0), \\ v(v-1)\cdots(v-d+1) & (d>0). \end{cases}$$

定め方より, $C_d^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ は $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心に属する. 同じ方法で, 一般線形リー代数の場合や直交リー代数の交代行列による実現の場合でも小行列式を用いた中心元が構成できる. また §7 では, 別の方法でそれらを構成する.

中心元 $C_d^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ は $\mathbf{F}$ の小行列を用いて表すことが出来るが, 記号の準備が必要である. 対角シフトを記述するために新たに $\tilde{\mathbf{F}}$ を用意する:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{cases} \mathbf{F} + \begin{pmatrix} 0_m & \\ & I_m \end{pmatrix} & (n=2m), \\ \mathbf{F} + \begin{pmatrix} 0_m & & \\ & 1/2 & \\ & & I_m \end{pmatrix} & (n=2m+1). \end{cases}$$

ここで 0_m は m 次の零行列である. すると,

$$C_d^{\mathfrak{o}(S_n)}(u) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \sharp I = d}} \det(\tilde{\mathbf{F}}_I + uI_d + \mathrm{diag}(d/2-1, d/2-2, \ldots, d/2-d))$$

である. ここで, $\tilde{\mathbf{F}}_I$ は I で定まる $\tilde{\mathbf{F}}$ の主小行列である. $d=n$ の時この表示は, 定理 3.1 の $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ の定義と一致している. この等式は, 差分作用素 $\Delta f(v) = f(v+1) - f(v)$ を用いて $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u+v)$ を $v^{(d)}$ で実際に展開することにより得られる (微分作用素 d/dv を用いてテイラー展開することの類似である).

4 Harish-Chandra同型による像

ここでは, 前節で構成した中心元 $C_d(u)$ の Harish-Chandra 同型による像を与える. それにより, $C_d(u)$ を用いて $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心 $ZU(\mathfrak{o}(S_n))$ の生成系を与えることもできる.

まず, Harish-Chandra 同型 $\overline{\gamma}$: $ZU(\mathfrak{o}(S_n)) \to U(\mathfrak{h})^W$ を定義する. ここで, $\mathfrak{h}$ は §3 と同じく, $\mathfrak{h} = \mathbf{C}F_{11} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}F_{mm}$ ($n=2m$ または $n=2m+1$) であり, $U(\mathfrak{h})^W$

は $U(\mathfrak{h})$ のワイル群不変元のなす部分代数を表す．F_{ij} $(i<j)$ を正ルートベクトル，F_{ij} $(i>j)$ を負ルートベクトルとするような $\mathfrak{o}(S_n)$ の三角分解に関する射影を $\gamma\colon U(\mathfrak{o}(S_n))\to U(\mathfrak{h})$ とし，正ルートの和の半分 $\rho\in\mathfrak{h}^*$ を $U(\mathfrak{h})$ に拡張したものも ρ で表すと，Harish-Chandra 同型 $\overline{\gamma}$ は写像の合成 $\overline{\gamma}=(\mathrm{id}_{U(\mathfrak{h})}-\rho)\circ\gamma$ で定義される．$\overline{\gamma}$ は $ZU(\mathfrak{o}(S_n))$ から $U(\mathfrak{h})^W$ への代数同型である．

定理 4.1. 複素数 u に対して $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心元 $C_n(u)$ の Harish-Chandra 同型による像は，

$$\overline{\gamma}(C_n(u))=\begin{cases}(u^2-F_{11}^2)\cdots(u^2-F_{mm}^2) & (n=2m),\\ u(u^2-F_{11}^2)\cdots(u^2-F_{mm}^2) & (n=2m+1)\end{cases}$$

である．さらに $d\in\{1,\ldots,n\}$ に対して，中心元 $C_d(u)$ の像は，

$$\overline{\gamma}(C_d(u))=\sum_{k=0}^{\lfloor d/2\rfloor}(-1)^k\sigma_k\left\{\frac{(-1)^{n-d}}{(n-d)!}\sum_{t=0}^{n-d}(-1)^t\binom{n-d}{t}(u+t-(n-d)/2)^{n-2k}\right\}$$

となる．ここで σ_k は，$F_{11}^2,\ldots,F_{mm}^2$ に関する k 次の基本対称式を表し，$\lfloor d/2\rfloor$ は $d/2$ を超えない最大の整数を表す．

Proof. F_{ij} $(i<j)$ が正ルートベクトルであることから，$C_n(u)$ の γ による像には，$C_n(u)$ の summands のうち σ が恒等置換であるもの，つまり行列の対角成分のみが寄与し，対角シフトが ρ-シフトとちょうど対応していることから $C_n(u)$ の $\overline{\gamma}$ による像も上のようにわかる．

$C_d(u)$ の像に関しては，$C_d(u)$ の $\overline{\gamma}$ による像を直接計算するのではなく，$\overline{\gamma}(C_n(u+v))$ を $v^{(d)}$ に関して展開する．そこでは第 2 種スターリング数があらわれるが，二項係数を用いて書き直すと上の式が得られる． □

$n=2m+1$ の場合は，$U(\mathfrak{h})^W$ は $F_{11}^2,\ldots,F_{mm}^2$ の基本対称式で生成され，$n=2m$ の場合は，$F_{11}^2,\ldots,F_{mm}^2$ の基本対称式と $F_{11}\cdots F_{mm}$ で生成される．このことと，定理 3.1 の Harish-Chandra 同型による像から，$ZU(\mathfrak{o}(S_n))$ の生成系を与えることができる．

命題 4.2. $n=2m+1$ の場合，$\{C_2(u),C_4(u),\ldots,C_{2m}(u)\}$ は $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心の代数独立な生成系である．

$n=2m$ の場合，$\{C_2(u),C_4(u),\ldots,C_{2m-2}(u),C^{\mathrm{Pf}}\}$ は $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心の代数独立な生成系である．ただし，$C^{\mathrm{Pf}}\in ZU(\mathfrak{o}(S_n))$ は $F_{11}\cdots F_{mm}$ の $\overline{\gamma}$ による逆像である． □

上の命題で $n=2m$ の場合の中心元 C^{Pf} は，例えば次のように構成される (cf. [IU01, Žel73])．$2m\times 2m$ 交代行列 Φ に対して，パフィアン $\mathrm{Pf}\,\Phi$ を，

$$\mathrm{Pf}\,\Phi=\frac{1}{2^m m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2m}}\mathrm{sgn}(\sigma)\Phi_{\sigma(1)\sigma(2)}\cdots\Phi_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$

と定め,

$$C^{\mathrm{Pf}} = \mathrm{Pf}(\mathbf{F}S_{2m})$$

と定める. ここで $\mathbf{F}S_{2m}$ は $2m \times 2m$ 行列の積であり, 交代行列となることに注意する. Harish-Chandra 同型による像を比較すると, 特に,

$$(C^{\mathrm{Pf}})^2 = (-1)^m C_{2m}(0)$$

である.

定理 3.1 より, $C_{2k+1}(u)$ は $C_2(u), C_4(u), \ldots, C_{2k}(u)$ で表すことが出来るから, 命題 4.2 における生成系には d が奇数である $C_d(u)$ が含まれないのは当然であるが, さらに定理 3.1 の $\overline{\gamma}(C_d(u))$ の式のブレースの中身が, $u = 0$ で d が奇数の時にゼロになることがわかるので, 次の命題が得られる.

命題 4.3. d が奇数ならば $C_d(0) = 0$. □

5 他の中心元との関係

直交リー代数の普遍包絡環における, 行列式を用いて構成された中心元としては, §3 で与えたものの他に Howe-Umeda [HU91] による中心元, Itoh-Umeda [IU01] による symmetrized determinant を用いた中心元, Molev [Mol95] による Sklyanin determinant を用いた中心元がある. Howe-Umeda による中心元は, 交代行列による実現のもとでのみ構成できるものであったが, Itoh-Umeda によるものと Molev によるものは実現によらず構成が可能である. これら 3 つの中心元はいずれも Harish-Chandra 同型による像が知られており, それを見ると互いに (本質的には) 等しいことがわかる. ここでは, これら 3 つの中心元のうち, Itoh-Umeda による中心元と等しいことを述べる. ここでの証明は Harish-Chandra 同型の像が一致することを見る証明であるが, 最近 (2003 年 9 月ころ)Harish-Chandra 同型を経由しない証明が伊藤稔氏により与えられた.

$n \times n$ 行列 Φ に対して, symmetrized determinant $\mathrm{Det}\,\Phi$ を

$$\mathrm{Det}\,\Phi = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma')\,\Phi_{\sigma(1)\sigma'(1)} \cdots \Phi_{\sigma(n)\sigma'(n)}$$

で定める. Φ の成分が互いに可換であれば, これは $\det \Phi$ に等しい. また, 対角シフト $(u_1, \ldots, u_n)$ のついた symmetrized determinant $\mathrm{Det}(\Phi; u_1, \ldots, u_n)$ を

$$\mathrm{Det}(\Phi; u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma') \times \\ (\Phi_{\sigma(1)\sigma'(1)} + u_1 \delta_{\sigma(1)\sigma'(1)}) \cdots (\Phi_{\sigma(n)\sigma'(n)} + u_n \delta_{\sigma(n)\sigma'(n)})$$

で定める．すると, symmetrized determinant は, 各 summands において行の添字にも列の添字にも対称群が作用しており強い対称性をもつため, $\mathrm{Det}(\mathbf{F}; u_1, \ldots, u_n)$ は任意の $u_j \in \mathbf{C}$ に対して $U(\mathfrak{o}(S_n))$ の中心に属する．実際 Det は

$$\mathrm{Det}(g\Phi g^{-1}; u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{Det}(\Phi; u_1, \ldots, u_n) \qquad (g \in GL_n(\mathbf{C}))$$

という対称性を持ち, $\mathbf{F}$ は

$$(\mathrm{Ad}(g)F_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = {}^t g \mathbf{F}\, {}^t g^{-1} \quad (g \in O(S_n) := \{x \in GL_n(\mathbf{C})\ ;\ {}^t x S_n x = S_n\}) \quad (5.1)$$

という不変性を持つので, $\mathrm{Det}(\mathbf{F}; u_1, \ldots, u_n)$ は中心元であることがわかる．しかし, symmetrized determinant は列の添字に対称群が作用しているため, Harish-Chandra 同型による像は split 実現のもとでも一般には計算が困難である．$d \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, 次のように特別な対角シフトを使って中心元 $C_n^{\mathrm{Det}}(u)$ を,

$$C_n^{\mathrm{Det}}(u) = \mathrm{Det}(uI_d - \mathbf{F}_I; \tilde{\square}_n),$$

と定めた場合, その Harish-Chandra 同型による像が知られている [Ito00].

$$\overline{\gamma}(C_n^{\mathrm{Det}}(u)) = \begin{cases} (u^2 - F_{11}^2) \cdots (u^2 - F_{mm}^2) & (n = 2m), \\ u(u^2 - F_{11}^2) \cdots (u^2 - F_{mm}^2) & (n = 2m+1). \end{cases}$$

これは $C_n(u)$ の像と一致している．

命題 5.1. 行列式を用いて構成した中心元 $C_n(u)$ と symmetrized determinant を用いて構成した中心元 $C_n^{\mathrm{Det}}(u)$ は等しい． □

6 他の実現や斜交リー代数における観察

§4 の中心元の構成に見られる自然さは次のとおりである: 非退化対称行列 S_n をとったとき,

(a) F_{ij} を S_n を用いて定義できる (後述).

(b) その F_{ij} を成分とする行列 $\mathbf{F}$ は, 群の作用で不変である (式 (5.1)).

(c) $\mathbf{F}$ に ρ と対応する対角シフトを入れて行列式をとると, 中心元が構成される.

この節では, 直交リー代数の他の実現や斜交リー代数において上の意味で自然な構成を試みても中心元が得られないようであることを解説する．議論はほぼ平行に進むので, 斜交リー代数の場合で話を進める．

斜交リー代数は, $2m$ 次元ベクトル空間の非退化交代双1次形式をひとつとり, それを不変にする $\mathfrak{gl}_{2m}$ の部分代数として得られる. S'_{2m} を, ある $2m \times 2m$ 非退化交代行列として,

$$\mathfrak{sp}(S'_{2m}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2m}\ ;\ {}^tXS'_{2m} + S'_{2m}X = 0\}$$

とおく. このとき,

$$G_{ij} = E_{ij} - S'^{-1}_{2m}E_{ji}S'_{2m}$$

と定めると, $\mathfrak{sp}(S'_{2m})$ に属することが簡単な計算でわかる. G_{ij} を成分とする行列 $\mathbf{G}$ を

$$\mathbf{G} = (G_{ij})_{1 \le i,j \le 2m} \in \mathrm{Mat}_{2m}(\mathfrak{sp}(S'_{2m}))$$

と定める. $\mathfrak{sp}(S'_{2m})$ に対応するリー群は,

$$Sp(S'_{2m}) = \{g \in GL_{2m}(\mathbf{C})\ ;\ {}^tgS'_{2m}g = S'_{2m}\}$$

であり, $\mathbf{G}$ は

$${}^tg^{-1}(gG_{ij}g^{-1})\,{}^tg = \mathbf{G} \qquad (g \in Sp(S'_{2m})) \tag{6.1}$$

という不変性を持つ.

注意 6.1. S'_{2m} の代わりに非退化対称行列 S_n を用いると, §3の F_{ij} が得られる. 一般に, 交代行列 S'_{2m} の代わりに任意の非退化な対称行列または交代行列 S をとると,

(a) G_{ij} は, S を不変にするリー代数 $\mathfrak{o}(S)$ または $\mathfrak{sp}(S)$ に属する.

(b) その G_{ij} を成分とする行列 $\mathbf{G}$ は, 群 $O(S)$ または $Sp(S)$ の作用で不変である.

ことが示される. □

$\mathbf{G}$ が不変性 (6.1) を持つので, symmetrized determinant を用いた中心元が構成できることは前節と全く同じである. 次の命題では S'_{2m} は任意の非退化交代行列でよいが, '実現によらず中心元が構成できる' というのはこの意味である.

命題 6.2. S'_{2m} を $2m \times 2m$ 非退化交代行列とすると, $u_1, \ldots, u_{2m} \in \mathbf{C}$ に対して, 次の元は $U(\mathfrak{sp}(S'_{2m}))$ の中心に属する:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{G}; u_1, \ldots, u_{2m}) \qquad \text{(Itoh-Umeda [IU01]).}$$

□

さて, 実現への依存が強い列-行列式による中心元の構成を考えるため,

$$S'_{2m} = \begin{pmatrix} 0_m & S_m \\ -S_m & 0_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} 1 \\ & & & 1 & \\ & & -1 & & \\ -1 \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. この場合は,

$$G_{ij} = E_{ij} - \theta_{ij} E_{2m+1-j,2m+1-i},$$
$$\theta_{ij} = \begin{cases} 1 & (1 \le i, j \le m \text{ または } m < i, j \le 2m) \\ -1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である. $\mathfrak{sp}(S'_{2m})$ の Cartan 部分代数として, $\mathfrak{h} = \mathbf{C}G_{11} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}G_{mm}$ をとり, $\mathfrak{h}$ の基底 $\{G_{11}, \ldots, G_{mm}\}$ の双対基底を $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ とすると, $\rho = m\varepsilon_1 + (m-1)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m$ である. 従って, 列-行列式を用いた自然に思える中心元の構成は,

$$\det(\mathbf{G} + \operatorname{diag}(m, m-1, \ldots, 1; -1, -2, \ldots, -m))$$

であるが, この元は $U(\mathfrak{sp}(S'_{2m}))$ の中心には属さない.

注意 6.3. 計算機によるランクの低い場合の計算結果からわかることがいくつかある: 上の構成で, 対角シフトを他のどのようなものに変えても中心元は得られないようである. また, S'_{2m} の代わりに, $\left(\begin{smallmatrix} 0_m & I_m \\ -I_m & 0_m \end{smallmatrix}\right)$ を用いても, やはり中心元は得られないように見える.

S'_{2m} の代わりに非退化対称行列をとり, 直交リー代数の実現を考えた場合にも, 計算結果からわかることがらがいくつかある: S'_{2m} のかわりに,

$$\begin{pmatrix} 0_m & I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0_m & & s_1 \ddots & \\ & & & s_m \\ s_1 \ddots & & & \\ & s_m & & 0_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} s_1 \\ & & & s_m & \\ & & s_m & & \\ s_1 \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

を用いても, §3 と同じ対角シフト $\tilde{\mathfrak{t}}_{2m}$ で中心元の構成ができる. また S'_{2m} の代わりに, $\operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ を用いると, §2 と同じ対角シフト $(n-1, n-2, \ldots, 0)$ で中心元が構成できる. □

以上のように斜交リー代数において列-行列式を用いた中心元の構成はできていない. 単に列-行列式と対角シフトを用いるだけでは構成できないようにも感じる. また, 直交リー代数に対しても列-行列式を用いた中心元が構成できるのは, 本質的には Howe-Umeda の場合 (§2) と, この論説の場合 (§3) のみである.

しかし別の行列式型の中心元の構成がなされている (今のところ symmetrized ではない行列式型の中心元はこれのみと思われる).

注意 6.4. Twisted Yangian における Sklyanin determinant を用いて, Molev は直交リー代数と斜交リー代数の普遍包絡環の中心元を統一的に構成している [Mol95]. □

7 表現論的な解釈

ここでは, 列-行列式を用いた中心元が構成できる場合はどういった現象がおこっているのかについて, ひとつの表現論的説明を試みる.

$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{gl}_n$, $\mathfrak{o}_n$, $\mathfrak{o}(S_n)$ のいずれかとし, それに応じて Φ は $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$ のいずれかとする. 定理 3.1 の証明のように, 列-行列式を外積代数を用いて表す. $e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbf{C}^n$ の標準基底とする. さらにここでは $\mathbf{C}^n$ を $\mathfrak{g}$ の自然表現の双対表現 $(\pi, \mathbf{C}^n)$ と考え, 外積代数 $\bigwedge \mathbf{C}^n$ 上に誘導される $\mathfrak{g}$ の作用も π で表す. $U(\mathfrak{g})$ には $\mathfrak{g}$ が $\mathrm{ad}(X)u = Xu - uX$ と作用しているから, テンソル積代数 $\bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{g})$ にも, テンソル積表現 $\pi \otimes \mathrm{ad}$ で作用する. テンソル積代数 $\bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{g})$ の元 $\eta_j^{\Phi}(u)$ を

$$\eta_j^{\Phi}(u) = \sum_{i=1}^{n} e_i(\Phi_{ij} + u\delta_{ij})$$

と定理 3.1 の証明のように定める. ただし, ここでは $\mathbf{C}^n$ にも作用が入っている点が異なる.

命題 7.1. $u \in \mathbf{C}$ とする. $\mathbf{C}\eta_1^{\Phi}(u) \oplus \mathbf{C}\eta_2^{\Phi}(u) \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}\eta_n^{\Phi}(u)$ はテンソル積代数 $\bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{g})$ の $(\pi \otimes \mathrm{ad})(\mathfrak{g})$-部分加群であり,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \to & \bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{g}) \\ e_j & \mapsto & \eta_j^{\Phi}(u) \end{array}$$

は単射 $\mathfrak{g}$-準同型である.

Proof. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, $\Phi = \mathbf{E}$ の場合のみ証明する. 他の場合も同様に証明できる. 単射性は明らかであるので, 以下で準同型であることを示す.

まず, $(\pi, \mathbf{C})$ は自然表現の双対であるから,

$$\pi(E_{ij})e_k = -\delta_{ik}e_j$$

である. 次に,

$$\begin{aligned}
(\pi \otimes \mathrm{ad})(E_{ij})\eta_k^{\mathbf{E}}(u) &= (\pi \otimes \mathrm{ad})(E_{ij}) \sum_{l=1}^{n} e_l(E_{lk} + u\delta_{lk}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \{-\delta_{il}e_j(E_{lk} + u\delta_{lk}) + e_l(\delta_{jl}E_{ik} - \delta_{ki}E_{lj})\} \\
&= -e_j(E_{ik} + u\delta_{ik}) + e_jE_{ik} - \delta_{ki}\eta_j^{\mathbf{E}}(0) \\
&= -\delta_{ki}\eta_j^{\mathbf{E}}(u).
\end{aligned}$$

従って, $e_j \mapsto \eta_j^{\mathbf{E}}(u)$ は $\mathfrak{gl}_n$-準同型である. □

テンソル積代数 $\bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{g})$ の中で $\eta_j^{\Phi}(u)$ は次の交換関係をみたしていることが，直接計算してわかる．

補題 7.2. $u \in \mathbf{C}$ とするとき，

(1) $\eta_i^{\mathbf{E}}(u)\eta_j^{\mathbf{E}}(u-1) + \eta_j^{\mathbf{E}}(u)\eta_i^{\mathbf{E}}(u-1) = 0$

(2) $\eta_i^{\mathbf{A}}(u)\eta_j^{\mathbf{A}}(u-1) + \eta_j^{\mathbf{A}}(u)\eta_i^{\mathbf{A}}(u-1) = -\delta_{ij}\Theta^{\mathbf{A}}$

(3) $\eta_i^{\mathbf{F}}(u)\eta_j^{\mathbf{F}}(u-1) + \eta_j^{\mathbf{F}}(u)\eta_i^{\mathbf{F}}(u-1) = -\delta_{i,n+1-j}\Theta^{\mathbf{F}}$

ただし，

$$\Theta^{\mathbf{A}} = \sum_{1\le k,l\le n} e_k e_l A_{kl}, \qquad \Theta^{\mathbf{F}} = \sum_{1\le k,l\le n} e_k e_l F_{k,n+1-l}$$

である． □

従って特に $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, $\Phi = \mathbf{E}$ の場合は，$u \in \mathbf{C}$ とすると，

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge \mathbf{C}^n & \to & \bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{gl}_n) \\ e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_d} & \mapsto & \eta_{i_1}^{\mathbf{E}}(u)\eta_{i_2}^{\mathbf{E}}(u-1)\cdots\eta_{i_d}^{\mathbf{E}}(u-d+1) \qquad (1 \le i_t \le n) \end{array}$$

が well-defined な $\mathfrak{gl}_n$-準同型であることがわかる．

また，$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_n$, $\Phi = \mathbf{A}$ の場合は，$\eta_j^{\mathbf{A}}(u)$ どうしの交換関係において $\Theta^{\mathbf{A}}$ という余分な項が現れるが，うまく相殺してやはり同様の $\mathfrak{o}_n$-準同型が存在する．

最後に，$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(S_n)$, $\Phi = \mathbf{F}$ の場合は $\eta_j^{\mathbf{F}}(u)$ の交換関係に $\Theta^{\mathbf{F}}$ という余分な項が現れ，うまく相殺してはくれない．しかし，上のような準同型は $(d=1$ と$)d=n$ の場合に存在する:

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge \mathbf{C}^n & \to & \bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{o}(S_n)) \\ e_1e_2\cdots e_n & \mapsto & \eta_1^{\mathbf{F}}(u_1)\eta_2^{\mathbf{F}}(u_2)\cdots\eta_n^{\mathbf{F}}(u_n), \end{array}$$

$$\text{ただし } (u_1,\ldots,u_n) = (u,\ldots,u) + \tilde{\mathfrak{d}}_n.$$

これが準同型であることは $\eta_1^{\mathbf{F}}(u_1)\cdots\eta_n^{\mathbf{F}}(u_n)$ が $(\pi \otimes \mathrm{ad})(\mathfrak{o}(S_n))$-不変であること，つまり $C_n^{\mathfrak{o}(S_n)}(u)$ が中心元であるという定理 3.1 の主張にほかならない．まとめると次の命題を得る．

命題 7.3. $u \in \mathbf{C}$ とする．$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, $\Phi = \mathbf{E}$ または $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(S_n)$,$\Phi = \mathbf{A}$ のとき，$d = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge \mathbf{C}^n & \to & \bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{g}) \\ e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_d} & \mapsto & \eta_{i_1}^{\Phi}(u)\eta_{i_2}^{\Phi}(u-1)\cdots\eta_{i_d}^{\Phi}(u-d+1) \end{array}$$

は $\mathfrak{g}$-準同型である．

また，$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(S_n)$, $\Phi = \mathbf{F}$ のとき $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (u, \ldots, u) + \tilde{\mathfrak{d}}_n$ とすると，

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge \mathbf{C}^n & \to & \bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{o}(S_n)) \\ e_1e_2\cdots e_n & \mapsto & \eta_1^{\mathbf{F}}(u_1)\eta_2^{\mathbf{F}}(u_2)\cdots\eta_n^{\mathbf{F}}(u_n) \end{array}$$

は $\mathfrak{o}(S_n)$-準同型である． □

上の命題の $d=n$ の場合の主張は, $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n$ のときは $\det(\mathbf{E}+uI_n+\mathrm{diag}(n-1,n-2,\ldots,0))$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{o}_n$ のときは $\det(\mathbf{A}+uI_n+\mathrm{diag}(n-1,n-2,\ldots,0))$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{o}(S_n)$ のときは $\det(\mathbf{F}+uI_n+\tilde{\mathfrak{h}}_n)$ がそれぞれ $U(\mathfrak{g})$ の中心元であることと同値である.

さらに $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{gl}_n$ か $\mathfrak{o}_n$ の場合は, §3で触れたように, 小行列式を用いた中心元も次のように上の命題から構成できる. $(\pi^*,(\mathbf{C}^n)^*)$ を $\mathfrak{g}$ の自然表現とし, $\{e_j^*\}$ を $\{e_j\}$ の双対基底とする. $\bigwedge(\mathbf{C}^n)^*$ にも $\mathfrak{g}$ の作用が入るが同じ記号 π^* で表す. $\bigwedge\mathbf{C}^n$ と $\bigwedge(\mathbf{C}^n)^*$ の pairing を

$$(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_d}, e_{j_1}^*e_{j_2}^*\cdots e_{j_{d'}}^*)=\begin{cases}1 & (d=d', I=J)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$$\text{ただし } I=(i_1,\ldots,i_d),\, J=(j_1,\ldots,j_{d'})$$

と定めるとこれは $\mathfrak{g}$-不変である. さて, $\{\eta_{i_1}^{\Phi}(u)\eta_{i_2}^{\Phi}(u-1)\cdots\eta_{i_d}^{\Phi}(u-d+1) \mid 1\le i_1<i_2<\cdots<i_d\le n\}$ と $\{e_{i_1}^*e_{i_2}^*\cdots e_{i_d}^* \mid 1\le i_1<i_2<\cdots<i_d\le n\}$ は $\bigwedge\mathbf{C}^n\otimes_{\mathbf{C}}U(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbf{C}}\bigwedge(\mathbf{C}^n)^*$ の中で互いに双対な基底であるから,

$$\sum_{\sharp I=d}\eta_{i_1}^{\Phi}(u)\eta_{i_2}^{\Phi}(u-1)\cdots\eta_{i_d}^{\Phi}(u-d+1)e_{i_1}^*e_{i_2}^*\cdots e_{i_d}^*$$

は $(\pi\otimes\mathrm{ad}\otimes\pi^*)(\mathfrak{g})$-不変である. これは,

$$\sum_{\sharp I=\sharp J=d}e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_d}\det(\Phi_{JI}(u))e_{i_1}^*e_{i_2}^*\cdots e_{i_d}^*$$

$$(\text{ここで}\Phi_{JI}(u)=(\Phi_{j_s,i_t}+(u-t)\delta_{j_s,i_t})_{1\le s,t\le d})$$

に等しく, 先ほど定めた pairing による contraction である $\bigwedge\mathbf{C}^n\otimes_{\mathbf{C}}\bigwedge(\mathbf{C}^n)^*\to\mathbf{C}$ $(a\otimes b\mapsto(a,b))$ という $\mathfrak{g}$-準同型でうつすと,

$$\sum_I\det(\Phi_{II}+uI_d+\mathrm{diag}(0,-1,\ldots,-d+1))$$

となり, これは小行列を用いた中心元である.

以上のように行列式を用いた中心元の構成には命題7.1や命題7.3のような $\mathfrak{g}$-準同型の存在が深く関わっている. この準同型の存在は行列式を用いて中心元を構成できるためのひとつの指標である. 斜交リー代数の場合は, 列-行列式 (あるいは列-パーマネント) を用いた中心元が今のところ見付かっていないが, それは命題7.3の準同型に対応するものは存在ないという事情も関係している.

参考文献

[Cap90] A. Capelli, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.

[HU91] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), no. 3, 565–619.

[Ito00] M. Itoh, *Capelli elements for the orthogonal Lie algebras*, J. Lie Theory **10** (2000), no. 2, 463–489.

[IU01] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, Compositio Math. **127** (2001), no. 3, 333–359.

[Mol95] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), no. 2, 923–943.

[Žel73] D. P. Želobenko, *Compact Lie groups and their representations*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973, Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 40.