数理解析研究所講究録 1348 巻 2003 年 199-205

旗多様体上の軌道対応に関する領域の同一性について

京都大学大学院理学研究科　松木　敏彦 (Toshihiko Matsuki)
Faculty of Science, Kyoto University

1 Introduction

$G_{\mathbb{C}}$ を連結複素半単純リー群、$G_{\mathbb{R}}$ をその連結な real form とする。K を $G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群とし、$K_{\mathbb{C}}$ をその（連結な）複素化とする。任意の $G_{\mathbb{C}}$ の旗多様体 $X=G_{\mathbb{C}}/P$ 上の $K_{\mathbb{C}}$-軌道と $G_{\mathbb{R}}$-軌道との間には次の自然な 1 対 1 対応がある ([M1])。

$$\begin{aligned} & K_{\mathbb{C}}\backslash X \ni S \longleftrightarrow S' \in G_{\mathbb{R}}\backslash X \\ & \Longleftrightarrow S\cap S' \text{ は空でないコンパクト集合} \end{aligned} \tag{1.1}$$

[GM1] において、$S\in K_{\mathbb{C}}\backslash X$ に対し、次のような $G_{\mathbb{C}}$ の部分集合を定義した。

$$C(S)=\{x\in G_{\mathbb{C}}\mid xS\cap S' \text{ は空でないコンパクト集合}\}$$

ただし、S' は (1.1) によって定まる X 上の $G_{\mathbb{R}}$-軌道である。明らかに $C(S)$ は左 $G_{\mathbb{R}}$-不変かつ右 $K_{\mathbb{C}}$-不変な集合である。

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の Cartan 分解とする。$\mathfrak{t}$ を $i\mathfrak{m}$ の 1 つの極大可換部分空間とし、$\mathfrak{t}^+=\{Y\in\mathfrak{t}\mid |\alpha(Y)|<\pi/2 \text{ for all } \alpha\in\Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{t})\}$ とおく。このとき **Akhiezer-Gindikin 領域** D が次の式で定義される ([AG])。

$$D=G_{\mathbb{R}}(\exp\mathfrak{t}^+)K_{\mathbb{C}}$$

[GM1] (Conjecture 1.6) において次のように予想した。

予想 1.1 $S\neq X$ が nonholomorphic type のとき $C(S)_0=D$ であろう。ただし、$C(S)_0$ は $C(S)$ の単位元を含む連結成分とする。

注意 1.2 $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型のとき、full flag manifold $G_{\mathbb{C}}/B$ 上には 2 つの特殊な閉 $K_{\mathbb{C}}$-軌道 $S_1=Q/B$ と $S_2=w_0Q/B$ が存在する。ただし $Q=K_{\mathbb{C}}B$ は $G_{\mathbb{R}}/K$ の複素構造を定義するための極大放物型部分群であり、w_0 はワイル群の最長元とする。このとき、任意の放物型部分群 $P\supset B$ に対し、S_1P と S_2P は $G_{\mathbb{C}}/P$ の holomorphic type の $K_{\mathbb{C}}$-軌道と呼ばれ、それ以外の $K_{\mathbb{C}}$-軌道はすべて nonholomorphic type と定義する。従って、閉でないすべての軌道あるいは $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型でないときのすべての軌道は nonholomorphic type である。

$G_{\mathbb{C}}/B$（B は $G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群）上の開 $K_{\mathbb{C}}$-軌道 S_{op}（ただ１つ）を考えよう。このとき S'_{op} は閉 $G_{\mathbb{R}}$-軌道であるので

$$C(S_{\mathrm{op}}) = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS_{\mathrm{op}} \supset S'_{\mathrm{op}}\}$$

となる。連結成分 $C(S_{\mathrm{op}})_0$ は最近しばしば Iwasawa domain と呼ばれている。[H] ([FH] Proposition 2.0.2)、[M3] において inclusion

$$D \subset C(S_{\mathrm{op}})_0$$

が示され、[GM1] Proposition 8.1、Proposition 8.3 において任意の $X = G_{\mathbb{C}}/P$ 上の $K_{\mathbb{C}}$-軌道 S に対して

$$C(S_{\mathrm{op}})_0 \subset C(S)_0$$

が示されている。従って、予想 1.1 を示すには逆向きの inclusion を示せばよい。

[B] の定理 $(C(S_{\mathrm{op}})_0 \subset D)$ の一般化として次のような定理が成り立つ ([M4])。

定理 1.3 $G_{\mathbb{R}}$ が単純のとき、次の３つの性質を満たす $G_{\mathbb{C}}$ の $K_{\mathbb{C}}$-B 不変部分集合 $\widetilde{S}$ が存在する。

(i) $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型のとき、$\widetilde{S}$ は２つの $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類からなり、エルミート型でないときは１つの $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類である。

(ii) 任意の D の境界の元 x に対し、$x\widetilde{S}^{cl} \cap S'_{\mathrm{op}} \neq \phi$

(iii) B を含む放物型部分群 P について、$S_{\mathrm{op}}P \neq G_{\mathbb{C}} \Longrightarrow \widetilde{S} \cap S_{\mathrm{op}}P = \phi$

この定理によって、次のように S が開軌道の場合の予想 1.1 が解決される。

系 1.4 $S_{\mathrm{op}}P \neq G_{\mathbb{C}} \Longrightarrow C(S_{\mathrm{op}}P)_0 = D$

証明 $x \in \partial D \cap C(S_{\mathrm{op}}P)$ とすると、

$$xS_{\mathrm{op}}P \supset S'_{\mathrm{op}}P$$

である。定理 1.3 (ii) により $x\widetilde{S}^{cl} \cap S'_{\mathrm{op}} \neq \phi$ だから

$$x\widetilde{S}^{cl} \cap xS_{\mathrm{op}}P \neq \phi$$

であるが、これは (iii) に矛盾する。すなわち $\partial D \cap C(S_{\mathrm{op}}P) = \phi$、従って $C(S_{\mathrm{op}}P)_0 \subset D$ である。 □

S が閉集合（$\Longleftrightarrow$ コンパクト）の場合、S' は開集合であるので、

$$C(S) = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS \subset S'\}$$

となる。したがって、この場合 $C(S)$ の単位元を含む連結成分 $C(S)_0$ は [WW] によって定義された（開 $G_{\mathbb{R}}$-軌道 S' に対する）cycle space である。

（複素）余次元 1 の $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類の集合を $\{S_j \mid j \in J\}$ とし、$T_j = S_j^{cl}$ とする。閉 $K_{\mathbb{C}}$-P 両側剰余類 S に対し、

$$J' = J(S) = \{j \in J \mid S(BwB)^{cl} = T_j \text{ for some } w \in W\}$$

とおき、

$$\Omega(J') = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xT_j \cap S_0' = \phi \text{ for all } j \in J'\}_0$$

とおく ([GM2])。（注： $G_{\mathbb{C}}$ における S_{op} の補集合は $\bigcup_{j\in J} T_j$ であるので、$\Omega(J) = C(S_{\text{op}})_0$ である。）[GM2] において

$$C(S)_0 = \Omega(J') \tag{1.2}$$

が示された ([HW] との関連については [GM2], [M2] 参照)。[M4] においてさらに次を示した。

定理 1.5 $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型でないとき、$\widetilde{S}$ はすべての余次元 1 の $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類の閉包に含まれる。

この定理によって、次のように S が閉軌道の場合の予想 1.1 が解決される（$G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型のときは [WZ1, WZ2]）。

系 1.6 $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型でないとき、任意の $\phi \neq J' \subset J$ に対し、$\Omega(J') = D$. 従って、(1.2) により、任意の閉 $K_{\mathbb{C}}$-軌道 $S \neq X = G_{\mathbb{C}}/P$ に対し、$C(S)_0 = D$

証明 $j \in J'$ のとき、$D = C(S_{\text{op}})_0 = \Omega(J) \subset \Omega(J') \subset \Omega(\{j\})$ だから、$\Omega(\{j\}) \subset D$ を示せばよい。 $x \in \partial D$ とすると、定理 1.3 により

$$x\widetilde{S}^{cl} \cap S'_{\text{op}} \neq \phi$$

であるが、定理 1.5 により任意の $j \in J$ に対し $x\widetilde{S}^{cl} \subset xT_j$ であるので

$$xT_j \cap S'_{\text{op}} \neq \phi$$

すなわち $x \notin \Omega(\{j\})$ である。よって $\Omega(\{j\}) \subset D$。 □

注意 1.7 [FH] においては小林双曲性という概念を用いて系 1.6 が証明されている。[HN] に $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型でないときの予想の一般的証明[1]が書いてあるが、不備がある。

[1]これに関する筆者の最新の結果 [M5] については、研究集会の後で完成したものなので本稿では述べない。

2 例

例 2.1 $G_{\mathbb{C}} = SL(3,\mathbb{C})$, $G_{\mathbb{R}} = SU(2,1)$,

$$K_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}} \right\}$$

とする。$\mathbb{C}^3$ の標準基底 e_1, e_2, e_3 によって $V_+^0 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$ and $V_-^0 = \mathbb{C}e_3$ とおく。このとき

$$gK_{\mathbb{C}} \mapsto (V_+,\ V_-) = (gV_+^0,\ gV_-^0)$$

によって、$G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}^3$ の2次元部分空間 V_+ と1次元部分空間の組であって $V_+ \cap V_- = \{0\}$ を満たすものの集合と見なせる。$SU(2,1)$ を定義するエルミート形式

$$Q(z,z) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2$$

によって、$\mathbb{C}^3$ を

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^3 &= C_0 \sqcup C_+ \sqcup C_- \\ &= \{Q(z,z) = 0\} \sqcup \{Q(z,z) > 0\} \sqcup \{Q(z,z) < 0\} \end{aligned}$$

と分割する。このとき $D/K_{\mathbb{C}}$ は次のように書ける。

$$D/K_{\mathbb{C}} = \{(V_+, V_-) \in G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \mid V_+ - \{0\} \subset C_+,\ V_- - \{0\} \subset C_-\}$$

$D/K_{\mathbb{C}}$ の境界は次の3つの $G_{\mathbb{R}}$-軌道からなる。

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(V_+, V_-) \in G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \mid V_+ \text{ は } C_0 \text{ に接し、} V_- - \{0\} \subset C_-\}, \\ D_2 &= \{(V_+, V_-) \in G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \mid V_+ - \{0\} \subset C_+,\ V_- \subset C_0\}, \\ D_3 &= \{(V_+, V_-) \in G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \mid V_+ \text{ は } C_0 \text{ に接し、} V_- \subset C_0\} \end{aligned}$$

($G_{\mathbb{R}}$ の実階数が1のときは、このように $D/K_{\mathbb{C}}$ の境界は有限個の $G_{\mathbb{R}}$- 軌道に分解される。$G_{\mathbb{R}}$ の実階数が2以上のときは無限個である。)

B を $G_{\mathbb{C}}$ に含まれる上半三角行列のなすボレル部分群とする。このとき full flag manifold $X = G_{\mathbb{C}}/B$ は旗 (ℓ, p) (ℓ は $\mathbb{C}^3$ の1次元部分空間、p は ℓ を含む $\mathbb{C}^3$ の2次元部分空間)の集合である。X は次のように6つの $K_{\mathbb{C}}$-軌道に分解される。

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell = V_-^0\}, \\ S_2 &= \{(\ell, p) \in X \mid p = V_+^0\}, \\ S_3 &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell \subset V_+^0,\ p \supset V_-^0\}, \\ S_4 &= \{(\ell, p) \in X \mid p \supset V_-^0\} - (S_1 \cup S_3), \\ S_5 &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell \subset V_+^0\} - (S_2 \cup S_3), \\ S_{\mathrm{op}} &= X - (S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5). \end{aligned}$$

軌道構造は次の図で表される。(記号の意味については [M2], [MO] 参照)

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[dr, "1"'] & & S_3 \arrow[dl, "1"] \arrow[dr, "2"'] & & S_2 \arrow[dl, "2"] \\
& S_4 \arrow[dr, "2"'] & & S_5 \arrow[dl, "1"] & \\
& & S_{\mathrm{op}} & &
\end{tikzcd}$$

一方、これらに対応する $G_{\mathbb{R}}$-軌道は次の通りである。

$$\begin{aligned}
S_1' &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell - \{0\} \subset C_-\}, \\
S_2' &= \{(\ell, p) \in X \mid p - \{0\} \subset C_+\}, \\
S_3' &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell - \{0\} \subset C_+,\ p \cap C_- \neq \phi\}, \\
S_4' &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell \subset C_0\} - S'_{\mathrm{op}}, \\
S_5' &= \{(\ell, p) \in X \mid p \text{ は } C_0 \text{ に接する }\} - S'_{\mathrm{op}}, \\
S'_{\mathrm{op}} &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell \subset C_0,\ p \text{ は } C_0 \text{ に接する }\}.
\end{aligned}$$

$xK_{\mathbb{C}} = (V_+, V_-) \in D_1 \cup D_3$ のとき、V_+ は C_0 に接する。よって、旗

$$(V_+ \cap C_0, V_+)$$

は $xS_2 \cap S'_{\mathrm{op}}$ に含まれる。一方、$yK_{\mathbb{C}} = (V_+, V_-) \in D_2 \cup D_3$ とすると、$V_- \subset C_0$ であるので、旗

$$(V_-, p)$$

(p は C_0 に接する) は $yS_1 \cap S'_{\mathrm{op}}$ に含まれる。従って、すべての D の境界の元 x に対し、

$$x(S_1 \cup S_2) \cap S'_{\mathrm{op}} \neq \phi$$

が成り立つ。

$G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群で B を含むものは B, $G_{\mathbb{C}}$ 以外に

$$P_1 = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid gV_+^0 = V_+^0\}, \quad P_2 = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid g\mathbb{C}e_1 = \mathbb{C}e_1\}$$

の 2 つである。$S_{\mathrm{op}}P_1 = S_5 \cup S_{\mathrm{op}}$, $S_{\mathrm{op}}P_2 = S_4 \cup S_{\mathrm{op}}$ であるから、

$$(S_1 \cup S_2) \cap S_{\mathrm{op}}P = \phi \quad \text{for } P = B, P_1, P_2$$

である。よって、$G_{\mathbb{R}} = SU(2,1)$ のとき、$\widetilde{S} = S_1 \cup S_2$ について、定理 1.3 が確かめられた。

注意 2.2 次の statement は誤りである ([HN] にはこれが成り立つと書いてあるが)。

$$S \text{ is not open}, \ x \in \partial(C(S)_0) \Longrightarrow xS^{cl} \cap \partial S' \neq \phi$$

実際、$G_{\mathbb{R}} = SU(2,1)$ のときに次の反例がある。上の例において $xK_{\mathbb{C}} = (V_+, V_-) \in D_1$ とする。このとき V_+ は C_0 に接し、$V_- - \{0\} \subset C_-$ である。$K_{\mathbb{C}}$-軌道 S_4 について、$xS_4 \cap S_4'$ は次の条件を満たす旗 (ℓ, p) の集合である。

$$\ell \subset C_0, \ \ell \notin V_+, \ p \supset V_-$$

よって $xS_4 \cap S_4'$ は $G_{\mathbb{C}}$ の閉部分集合ではないので、$x \in \partial(C(S_4)_0)$ である。他方、xS_4^{cl} は $p \supset V_-$ を満たす旗の集合であるので $\partial S_4' = S_{\mathrm{op}}'$ とは交わらない。

References

[AG] D. N. Akhiezer and S. G. Gindikin. On Stein extensions of real symmetric spaces. *Math. Ann.*, 286:1–12, 1990.

[B] L. Barchini. Stein extensions of real symmetric spaces and the geometry of the flag manifold. preprint

[FH] G. Fels and A. Huckleberry. Characterization of cycle domains via Kobayashi hyperbolicity. preprint (AG/0204341)

[GM1] S. Gindikin and T. Matsuki. Stein extensions of Riemann symmetric spaces and dualities of orbits on flag manifolds. preprint (MSRI-Preprint 2001-028)

[GM2] S. Gindikin and T. Matsuki. A remark on Schubert cells and duality of orbits on flag manifolds. preprint (RT/0208071)

[H] A. Huckleberry. On certain domains in cycle spaces of flag manifolds. *Math. Annalen*, 323:797–810, 2002.

[HN] A. Huckleberry and B. Ntatin. Cycle spaces of G-orbits in $G^{\mathbb{C}}$-flag manifolds. preprint (RT/0212327)

[HW] A. Huckleberry and J. A. Wolf. Schubert varieties and cycle spaces. preprint (AG/0204033)

[M1] T. Matsuki. Closure relations for orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups. Intersections of associated orbits. *Hiroshima Math. J.*, 18:59–67, 1988.

[M2] T. Matsuki. Schubert cell と旗多様体上の軌道対応. 数理解析研究所講究録 1294:35–43, 2002.

[M3] T. Matsuki. Stein extensions of Riemann symmetric spaces and some generalization. *J. of Lie Theory*, 13:563–570, 2003.

[M4] T. Matsuki. Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds. preprint (RT/0309314)

[M5] T. Matsuki. Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds II. preprint (RT/0309469)

[MO] T. Matsuki and T. Oshima. Embeddings of discrete series into principal series. In *The Orbit Method in Representation Theory*, 147–175. Birkhäuser, 1990.

[WW] R. O. Wells and J. A. Wolf. Poincaré series and automorphic cohomology on flag domains. *Annals of Math.*, 105:397–448, 1977.

[WZ1] J. A. Wolf and R. Zierau. Linear cycle spaces in flag domains. *Math. Ann.*, 316:529–545, 2000.

[WZ2] J. A. Wolf and R. Zierau. A note on the linear cycle spaces for groups of Hermitian type. *J. of Lie Theory*, 13:189 191, 2003.