数理解析研究所講究録 1348 巻 2003 年 44-60

G-Hilb($\mathbb{C}^3$) のフロップと Fourier-向井変換

京都大学・工学研究科・都市環境工学専攻　石井亮 (Akira Ishii)
Department of Urban and Environmental Engineering,
Kyoto University

1 Introduction

本稿においては, 3 次元商特異点に関する Alastair Craw 氏との共同研究 [CI02] について, 2 次元の場合との対比をしながら解説する.

2 次元の単純特異点 $\mathbb{C}^2/G$ ($G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は有限部分群) の研究は Klein により始まったと言えるが、今から 20 数年前にも McKay 対応と言う興味深い現象が発見され, それについていくつかの説明がなされてきた.

一方有限部分群 $G \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ による商特異点 $\mathbb{C}^3/G$ の「クレパント解消」の存在は 1990 年代の前半に証明された. 当時は場合分けに応じて個別に構成されたのであるが, 中村の導入したモデュライ空間 G-Hilb により, より理論的な扱いが可能となり, 実際 Bridgeland, King と Reid は G-Hilb($\mathbb{C}^3$) は $\mathbb{C}^3/G$ のクレパント解消であることを証明した. それと同時に彼等は普遍族による Fourier-向井変換が導来圏の同値としての McKay 対応を導くことを示した. 一方でこれは, 一般には複数個存在するクレパント解消の中から, G-Hilb($\mathbb{C}^3$) という特別なものを選ぶことができる, ということも意味する. そこで [CI02] においては, 全ての射影的クレパント解消が G-Hilb と類似のモデュライ空間として構成できないかと考え, G がアーベル群の場合にそのようなことを示すことができた (定理 9.3). その際, 幾何学的不変式論におけるパラメータの chamber 構造について調べ, それを普遍族による Fourier-向井変換を使って記述すると言うことを行った (定理 10.6). また, wall を挟んで隣り合った二つの chamber それぞれに対応するモデュライ空間および Fourier-向井変換 (McKay 対応) を考えると, 二つのモデュライ空間の導来圏の間の同値が得られるので, それがどのような同値 (函手) であるかを具体的に調べた (定理 11.6). 特に, 二つのモデュライ空間が同型な場合の導来圏の自己同値としては, Seidel-Thomas のツイストや Horja の EZ-変換と言うものの例が得られた. カラビ・ヤウ多様体の導来圏の非自明な自己同値として現在知られているものが (局所的なものだけであるが) 現れたと言うことになる.

2 2 次元 McKay 対応について

2 次元 McKay 対応の復習からはじめよう。$G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ を有限部分群とする. Klein によって分類されたように, G は巡回群, 二項二面体群, 二項多面体群のいずれかである. G の C^2 への作用に関する商特異点 $X = \mathbb{C}^2/G$ は単純特異点, Klein 特異点, Du Val 特異点, 有理二重点等多くの名前を持つ. これは 2 次元の特異点であるから, 極小解消

$$\tau : Y \to X$$

がただ一つ存在する. τ の例外集合は有限個の (-2)-曲線 (自己交点数が -2 である射影直線) の和集合であり, その双対グラフは (G の分類に応じて) A, D, E 型の Dynkin 図形となる. (Dynkin 図形が出てきたということで, Lie 環との関係に興味が持たれ, Brieskorn-Slodowy の理論ができた. これについては [Slo80], [松澤 02] を参照.) 一方 1970 年代後半になって, McKay は $G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ からその表現論だけを使って同じ Dynkin 図形が構成できることを見いだした:

定理 2.1 (McKay の発見, [McK80]). G の既約表現の全体を

$$\mathrm{Irr}(G) := \{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n\},$$

とおく．ただし ρ_0 が自明表現であるとする．$G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ から定まる *2* 次元表現を ρ_{nat} で表し，

$$\rho_i \otimes_{\mathbb{C}} \rho_{nat} = \sum_j a_{ij}\rho_j \tag{2.1}$$

と分解する．このとき，$2I - (a_{ij})$ は X と同じ型の拡大 *Dynkin* 図形に対応する *Cartan* 行列である．

これは群の指標表を元に計算してみたらこうなったという不思議な結果であり，本稿ではこれを「McKay の発見」と呼ぶことにする．このことから，G の非自明な既約表現と，極小解消の既約例外曲線の間に一対一の対応がつくとであろうと考えられた．(この段階ではまだグラフの自己同型の不定性があった.)

そのような対応を幾何学的な方法で実現したのが Gonzalez-Sprinberg と Verdier である [GSV83]. 彼等は，各既約表現 ρ_i に対応する，次のような Y 上のベクトル束 $\mathcal{R}_i$ を構成した．

- $\mathcal{R}_i$ は大域切断で生成される．
- $H^0(\mathcal{R}_i) \cong (\rho_i^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})^G$.

このような $\mathcal{R}_i$ はただ一つであり，次が成り立つ．

定理 2.2 ([GSV83]). $\tau : Y \to X$ の既約例外曲線に $\ell_1, \ldots, \ell_n$ と適当に番号をつけると，

$$c_1(\mathcal{R}_i) \cdot \ell_j = \delta_{ij}$$

が成り立つ．さらに，$\rho_i (i \neq 0)$ と ℓ_i を対応させることにより，(有限型) *Dynkin* 図形の同型が得られる．

このような $\mathcal{R}_i$ と ρ_i を対応させることにより，同型

$$K(Y) \cong R(G)$$

ができる．ここで，$K(Y)$ は Y 上の連接層の Grothendieck 群，$R(G)$ は G の表現環である．実際にはこの構成では $\mathbb{C}^2$ 上の G-同変連接層の Grothendieck 群 $K^G(\mathbb{C}^2)$ を考える．ρ_i を $\rho_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$ に対応させることにより $R(G) \cong K^G(\mathbb{C}^2)$ であり，上の同型は

$$K(Y) \cong K^G(\mathbb{C}^2)$$

から従う．なお，彼等の方法においても，$\mathcal{R}_i$ の構成は自然なものであったが，それらの性質を調べるのは，場合分けに応じた計算に基づいていた．$c_1(\mathcal{R}_i) \cdot \ell_j = \delta_{ij}$ であることの場合分けによらない証明は，Artin-Verdier [AV85] による．また ρ_{nat} とのテンソルの分解(2.1) の $\mathcal{R}_i$ による説明は Esnault-Knörrer [EK85] によりなされた．

3 G-同変連接層

この節では G-同変連接層について考え，それを使って McKay の発見が定式化できることを見よう．$\mathbb{C}^2$ 上の G-同変連接層とは，$\mathbb{C}^2$ 上の連接層であって，G の $\mathbb{C}^2$ への作用を持ち上げるような形で G が作用するものを言う．$\mathbb{C}^2 = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[x,y]$ はアフィン代数多様体であるから，連接層と言うのは有限生成 $\mathbb{C}[x,y]$-加群のことだと思ってよく，すると G-同変連接層と言うの

は $G\#\mathbb{C}[x,y]$-加群ということになる．なお，$G\#\mathbb{C}[x,y]$ というのは G の $\mathbb{C}[x,y]$ への作用から，半直積と同様な方法 (接合積) でできる非可換環である．

二つの G-同変連接層 E, F に対し，

$$G\text{-}\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(E,F) = \left(\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(E,F)\right)^G$$

と定義する．今 G-不変部分を取る，という函手は完全であるから，これは G-同変連接層の圏での Ext である．G の二つの既約表現 ρ_i, ρ_j に対して

$$G\text{-}\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(\rho_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0, \rho_j \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0)$$

を計算してみよう．ここで，$\mathcal{O}_0$ とは，$\mathbb{C}^2$ の原点 0 の上に $\mathbb{C}$ が載っている摩天楼層である．Ext を計算するのであるから，それには左側の加群の自由分解を取ればよく，次の Koszul 複体を使う．

$$0 \to \Omega^2_{\mathbb{C}^2} \to \Omega^1_{\mathbb{C}^2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \to \mathcal{O}_0 \to 0.$$

これは，G-不変ベクトル場 $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ による内部積から定まる完全列である．今 $G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ であるから，G-同変連接層として

$$\Omega^2_{\mathbb{C}^2} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$$

また，

$$\Omega^1_{\mathbb{C}^2} \cong \rho^*_{\mathrm{nat}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$$

である．これを Koszul 複体に代入し，(2.1) を使って G-Ext を計算すると，

$$\begin{aligned}
&\dim G\text{-}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(\rho_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0, \rho_j \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0) = a_{ij} \\
&\dim G\text{-}\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(\rho_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0, \rho_j \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0) = \dim G\text{-}\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(\rho_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0, \rho_j \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0) = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

となる．この結果から，G-Ext の次元の交代和を

$$\chi^G(E,F) := \sum_i (-1)^i \dim G\text{-}\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(E,F)$$

とおけば，McKay の発見は，

定理 3.1. 行列 $(\chi^G(\rho_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0, \rho_j \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0))$ はアフィン型の *Cartan* 行列である

というように言い換えることができる．一方，極小解消 Y の上で，通常の $\mathrm{Ext}(-,-)$ の交代和 $\chi(-,-)$ を考えると，$(\chi(\mathcal{O}_{\ell_i}, \mathcal{O}_{\ell_j}))$ が有限型の Cartan 行列であることがわかり，こうすると，$\rho_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_0$ と既約例外曲線 ℓ_i の間に対応を付けたくなるが，前節の Gonzalez-Sprinberg と Verdier による対応との関係はどうなっているのであろうか？それには前節とは双対になる K 群を考えるとよい．すなわち，Y 上の連接層で，原点のファイバー $\tau^{-1}(0)$ にのみ台を持つものからできる K 群を $K_{\tau^{-1}(0)}(Y)$, $\mathbb{C}^2$ 上の連接層で原点 $\{0\}$ にのみ台を持つものからできる K 群を $K^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^2)$ とする．重要なことは，

補題 3.2. $\chi(-,-)$ により $K(Y)$ と $K_{\tau^{-1}(0)}(Y)$ は互いに双対，$\chi^G(-,-)$ により $K^G(\mathbb{C}^2)$ と $K^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^2)$ は互いに双対である．

注 *3.3.* 自然な写像 $K_{\tau^{-1}(0)}(Y) \to K(Y)$ および $K^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^2) \to K^G(\mathbb{C}^2)$ は単射ではない。実際、以下の双対基底に関して、これらの写像はアフィン形の Cartan 行列で表される。

$K^G(\mathbb{C}^2)$ の基底 $\{\rho_i \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}\}$ の双対基底は $\{\rho_i \otimes_0\}$ である．一方 Gonzalez-Sprinberg と Verdier により対応する $K(Y)$ の基底 $\{\mathcal{R}_i\}$ の双対基底は何であろうか？定理 2.2 を見れば，だいたい $\mathcal{O}_{\ell_i}$ になると思われるが，$\chi(,)$ と交点数とは，符号がちょうど逆になる．そこで後の都合もあり我々としては $K(Y)$ の基底として，ベクトル束としての双対 $\{\mathcal{R}^*_i\}$ を取ることにする．すると定理 2.2 を用いて計算すれば

補題 3.4. $\{\mathcal{R}_i^*\}$ の双対基底は，$\{-\omega_{\tau^{-1}(0)}, \mathcal{O}_{\ell_i}(-1)\}$ である．*($\mathcal{O}_{\ell_i}(-1)$ は $\ell_i \cong \mathbb{P}^1$ 上の次数 -1 の直線束，$\omega_{\tau^{-1}(0)}$ は Y の部分スキーム $\tau^{-1}(0)$ の dualising sheaf である．)*

ということがわかる．そこで，$K^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^2)$ と $K_{\tau^{-1}(0)(Y)}$ の対応は基底 $\rho_0 \otimes \mathcal{O}_0, \rho_1 \otimes \mathcal{O}_0, \dots, \rho_n \otimes \mathcal{O}_0$ を，$\omega_{\tau^{-1}(0)}, \mathcal{O}_{\ell_1}(-1), \dots, \mathcal{O}_{\ell_n}(-1)$ に対応させればよい，ということになる．

しかし，この対応はもっと直接的に付けられないだろうか．特に，先の計算で，上の基底の間には交代和をとった $\chi^G(-,-)$ と $\chi(-,-)$ だけでなく各 G-Ext^i と Ext^i が一致していることがわかるであろう．従ってそのような対応は K 群の間だけでなく，導来圏の間に実現されるべきものである．そこで，G-軌道の Hilbert スキームというものを登場させる．

4 G-軌道の Hilbert スキーム

一般に，Hilbert スキームというのは，代数多様体の（射影的な）部分スキームのモデュライ空間であり，Grothendieck により構成されたものである．従って部分スキームの次元に応じて，（固定された代数多様体内の）曲線の Hilbert スキーム，曲面の Hilbert スキーム等を考えることができるが，ここでは,「点の Hilbert スキーム」すなわち,「0 次元部分スキームのモデュライ空間」を考える．M を代数多様体とし，Z をその 0 次元部分スキームとする．0 次元なので Z はアフィンかつ射影的であり，そのアフィン座標環 $H^0(\mathcal{O}_Z)$ は有限次元ベクトル空間である．$H^0(\mathcal{O}_Z)$ の次元を $l(Z)$ で表し Z の長さと言う．M の n 点の Hilbert スキームとは，$l(Z) = n$ であるような 0 次元部分スキーム Z をパラメトライズするモデュライ空間であり，これを $\mathrm{Hilb}^n(M)$ と書く．

M 上の異なる n 点からなる集合を被約な部分スキームと思ったものは $\mathrm{Hilb}^n(M)$ の点を定め，それらは $\mathrm{Hilb}^n(M)$ の Zariski 開集合をなす．$\mathrm{Hilb}^n(M)$ のその他の点は，M の $n-1$ 個以下の点からなる集合に，長さが n であるような（被約でない）部分スキームの構造を入れたものに対応している．$\mathrm{Hilb}^n(M)$ の点 Z に対して Z のスキーム構造は忘れて各点ごとの長さのみを考えると，M の対称積 $S^n(M)$ の点が定まる．このようにして，Hilbert-Chow 射

$$\mathrm{Hilb}^n(M) \to S^n(M)$$

が定義できる．これは n 点が互いに異なるような開集合上では同型である．

例 4.1. 2 点の Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^2(M)$ を考える．$\mathrm{Hilb}^2(M)$ の中で M の異なる 2 点をパラメトライズする開集合を U とする．$\mathrm{Hilb}^2(M) \setminus U$ の各点は，1 点に長さ 2 であるような部分スキームの構造を入れたものに対応している．これは，1 点とその点における接空間の一次元部分空間との組みであるとみなすことができる．この一次元部分空間は異なる 2 点が衝突して 1 点になったときに，どの方向から衝突したかというようなことを表している．

実際，Hilbert-Chow 射 $\mathrm{Hilb}^2(M) \to S^2(M)$ は $S^2(M)$ の対角線によるブローアップになっている．

M が非特異曲面であるとき，任意の n に対して $\mathrm{Hilb}^n(M)$ は非特異であり，特に $S^n(M)$ の特異点解消である [Fog68]．一方 3 次元以上のときはそうではなく，n が大きいときには $\mathrm{Hilb}^n(M)$ は既約ですらない [Iar72]．

このように，点の Hilbert スキームは，重複を込めた n 点に「部分スキーム」という余分な構造を加えると，そのモデュライ空間として得られる空間という様に捉えることができる．G-軌道の Hilbert スキームは，同様のアイデアにより，有限群 G による商多様体を考える際に伊藤-中村により導入されたものである．作用が自由でないような軌道にたいして，やはり「同変部分スキーム」（で正則表現に対応する）という構造を加えればやはり良いモデュライ空間が得られことが期待されるのである．

定義 4.2. 有限群 G が代数多様体 M に作用するとする．M の G-不変な 0-次元部分スキーム Z について，G の表現 $H^0(\mathcal{O}_Z)$ が正則表現であるとき，Z を G-cluster という．とくに G-cluster の長さは G の位数 $\#G$ に一致する．

G-cluster の例としては，自由 G-軌道が挙げられる．それ以外の G-cluster は，G-軌道に被約でないスキームの構造が入ったものである．

定義 4.3. G-cluster のモデュライ空間を G-軌道の Hilbert scheme といい，$G\text{-Hilb}(M)$ と書く．(これは，$\mathrm{Hilb}^{\#G}(M)$ の部分スキームとして構成される.)

正則表現における自明な表現の重複度は 1 なので，G-cluster Z の台 $Supp(Z)$ は一つの G-軌道である．従って Z に $\mathrm{Supp}(Z)$ を対応させることにより Hilbert-Chow 射

$$G\text{-Hilb}(M) \to M/G$$

が得られる．一般には $G\text{-Hilb}(M)$ はやはり非特異とも既約とも限らない．

定理 4.4 (伊藤-中村 [IN99]). $G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は有限群とする．このとき，

- $\tau : G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2) \to X = \mathbb{C}^2/G$ は極小解消である．
- $y \in \tau^{-1}(0)$ に対応する *G-cluster* Z_y の定義イデアルを I_y とする．$0 \in \mathbb{C}^2$ の極大イデアルを m とおき，I_y/mI_y を G の表現と見ると，この表現（から自明な直和因子を取り除いたもの）が y の属する既約成分を決定し，既約表現と既約例外曲線の対応としての *McKay* 対応を与える．(正確には *[IN99]* を参照されたい.)

一つ目の結果は曲面上の点の Hilbert スキームが非特異であることなどから比較的自動的に従う．二つ目の結果は，計算によるものではあったが，McKay 対応について新しい視点を提供するものであった．次節ではこれが Fourier-向井変換から従うことを見る．

5 Fourier-向井変換

Fourier-向井変換は，もともと Abel 多様体とその双対 (= 直線束のモデュライ，これはまた Abel 多様体) の導来圏の間に，Poincare 束 (= 普遍族) を「積分核」とする積分函手として向井により導入された [Muk81]．これは Abel 多様体に群構造があることなどから，通常の Fourier 変換と良く似た性質を持っていた．その後代数多様体とその上の層のモデュライ空間の間の，普遍族を用いた積分函手は非常に有効に使われるようになり，それが導来圏の同値を導くとき Fourier-向井変換と呼ばれるようになった．

この節では G-Hilb の普遍族を用いた Fourier-向井変換を導入する．$Y = G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ とおく．$D(Y)$ を Y 上の連接層の (有界複体のなす) 導来圏，$D^G(\mathbb{C}^2)$ を $\mathbb{C}^2$ 上の G-同変な連接層の導来圏とする．

$$\mathcal{Z} \subset Y \times \mathbb{C}^2$$

を普遍部分スキーム，p, q を $\mathcal{Z}$ から $Y, \mathbb{C}^2$ への射影，τ, π を下の図式のようであるとする．

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Z} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ Y \arrow[dr, "\tau"'] & & \mathbb{C}^2 \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

函手 (Fourier-向井変換)

$$\Phi : D(Y) \to D^G(\mathbb{C}^2)$$

を

$$\Phi(-) = \mathbf{R}q_* p^*(-)$$

により定義する．ここでは，積分核にあたるものは，$\mathcal{Z}$ の構造層 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ である．Kapranov-Vasserot は，次のことを示した：

定理 5.1 (Kapranov-Vasserot [KV00]). Φ は三角圏の同値である.

実際には [KV00] では少し違う (同じ積分核で逆向きの) 函手を考えているが，本質的には変わらない.

この節の残りでは Φ を Gonzalez-Sprinberg と Verdier の $\mathcal{R}_i$ 使って計算し，§3 の最後の対応が Φ により実現できることを見る．そのために，ここで $\mathcal{R}_i$ の構成法を述べよう．$p_*\mathcal{O}_Z$ を G の作用で分解する：

$$p_*(\mathcal{O}_Z) = \bigoplus_i \mathcal{R}_i \otimes_{\mathbb{C}} \rho_i$$

このように ρ_i の係数として出てくるのが $\mathcal{R}_i$ である.（実際には Z はファイバー積 $Y \times_X \mathbb{C}^2$ の被約部分であるから，G-Hilb$(\mathbb{C}^2)$ という言い方をしなくても定義できるのである.）Φ^i は次の式により計算できる：

$$\pi_*\Phi^i(-) = R^i\tau_*(- \otimes p_*\mathcal{O}_Z) = \bigoplus_i H^i(- \otimes \mathcal{R}_i) \otimes \rho_i \tag{5.1}$$

従って，例えば $\Phi(\mathcal{O}_{\ell_i}(-1))$ の計算は，$\mathcal{O}_{\ell_i}(-1) \otimes \mathcal{R}_j$ のコホモロジーの計算に帰着される．実際，

$$\mathcal{R}_j|_{\ell_i} \cong \begin{cases} \mathcal{O}_{\ell_i}^{\oplus \dim \rho_j} & j \neq i \\ \mathcal{O}_{\ell_i}(1) \oplus \mathcal{O}_{\ell_i}^{\oplus \dim \rho_j - 1} & j = i \end{cases}$$

であるから上のコホモロジーはほとんど消えて，

$$\Phi(\mathcal{O}_{\ell_i}(-1)) \cong \rho_i \otimes \mathcal{O}_0, \tag{5.2}$$

また同様に計算すると

$$\Phi(\omega_{\tau^{-1}(0)}) \cong \rho_0 \otimes \mathcal{O}_0[-1] \tag{5.3}$$

がわかる．これで §3 の最後に述べた対応が Φ により実現できた.（なお，Φ による $\mathcal{R}_i^*$ の像が $\rho_i \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$ であることは，Φ の随伴函手を具体的に書いてみればわかる.）

この節の最後に，上の結果から伊藤-中村型の定理がただちに導かれることを説明する．$\Phi(\mathcal{O}_{\ell_i}(-1)) = \rho_i \otimes \mathcal{O}_0$ と Φ は圏同値であることから，$y \in Y$ に対して，$\mathcal{O}_y$ を y 上に $\mathbb{C}$ を置く摩天楼層とすると，$i \neq 0$ のとき

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\ell_i}(-1), \mathcal{O}_y) = \mathrm{Hom}(\rho_i \otimes \mathcal{O}_0, \Phi(\mathcal{O}_y)).$$

ここで，左辺が 0 であるための必要十分条件は $y \notin \ell_i$ であることである．一方，$\Phi(\mathcal{O}_y)$ は y に対応する G-cluster Z_y の構造層 $\mathcal{O}_{Z_y}$ である．従って右辺が 0 でないための必要十分条件は，G-同変連接層として $\rho_i \otimes \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}_{Z_i}$ となることである．

定理 5.2. $y \in \ell_i$ となる必要十分条件は $\rho_i \otimes \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}_{Z_i}$ であり，これは重複度 1 で含まれている．

これを踏まえて (5.2) の次のような解釈ができる：ℓ_i 上 $\mathcal{O}_{\ell_i}(-1)$ という重みをつけて $\mathcal{O}_{Z_y}$ たちの族を「積分」すると，共通の部分層 $\rho_i \otimes \mathcal{O}_0$ となる．また，(5.3) は，$\Phi^1(\omega_{\tau^{-1}(0)})$ として，$\tau^{-1}(0)$ 上で共通の商 $\rho_0 \otimes \mathcal{O}_0$ が出てきた，ということである．これらの観察は，後で安定性の chamber を考える際に重要である．

上では二つの三角圏における Hom の間の同型を使ったが，代わりに Ext^1 を用いると，伊藤-中村の定理が得られる ([Ish02] 参照).

6 G-Hilb($\mathbb{C}^3$) と 3 次元 McKay 対応

3 次元の McKay 対応について知られていることを述べよう．2 次元のときは，代数曲面の唯一の極小モデルというのが非特異であり，従って商特異点 $\mathbb{C}^2/G$ の極小解消というのがただ一つに定まった．3 次元代数多様体については，極小モデルというのは一般には非特異ではなくかつ唯一でもない．有限部分群 $G \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ について，商特異点 $X = \mathbb{C}^3/G$（これは標準特異点というクラスの特異点である）の上の相対極小モデルが非特異であるとすれば，それは次に定義するクレパント解消になっている．

定義 6.1. 特異点解消 $Y \to X$ がクレパントであるとは，Y の標準直線束 $K_Y(= \Omega^3_Y)$ が自明直線束 $\mathcal{O}_Y$ に同型であることをいう．

crepant とは，discrepancy(K_Y と K_X の引き戻しとの差) がないという意味の Reid による造語である．一般に 3 次元の標準特異点については，クレパントな端末化が存在することが Reid により証明されているが，それは非特異とは限らない．

1985 年頃，弦理論における考察から Dixon-Harvey-Vafa-Witten は次の予想を立てた [DHVW85], [DHVW86]：

- クレパント解消 $Y \to X$ が存在する．
- Y の Euler 数 $e(Y)$ は，G の既約表現の同型類の個数に一致する．

2 つめの予想は，3 次元においても何らかの形で McKay 対応が成立するということを示唆している．

クレパント解消の存在は，1990 年代の半ばまでに，伊藤，Markushevich, Roan らによって示された．それは，$G \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ の分類 (A から L までの系列が存在する [YY93]) に応じて個別に構成されたものであった．2 つめの予想については，伊藤-Reid によって Y のコホモロジーの基底と G の共役類に対応をつけるという形で示された．

一方中村 [Nak00] は G が可換であれば，G-Hilb($\mathbb{C}^3$) はクレパント解消である，ということを示した．前述したように 3 次元（非特異）代数多様体の点の Hilbert スキームは一般に非特異ではなく，これはあまり予想されていなかった驚くべき結果であった．さらに，伊藤-中島 [IN00] はこれを使って Grothendieck 群の同型 $K(Y) \cong K^G(\mathbb{C}^3)$ を導きこれを 3 次元の McKay 対応とした．

G が非可換の場合への拡張は難しいように（筆者には）思えたが，Bridgeland-King-Reid によりなされた．

定理 6.2 (Bridgeland-King-Reid, [BKR01]). $G \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ を有限部分群とすると，

- $Y = G$-Hilb($\mathbb{C}^3$) は $X = \mathbb{C}^3/G$ の一つのクレパント解消である．
- 普遍族による *Fourier*-向井変換 $\Phi : D(Y) \to D^G(\mathbb{C}^3)$ は三角圏の同値である．

この証明の特筆すべき点は，Y が非特異であることを示すのにも導来圏や Fourier-向井変換が本質的な役割を果たすことである．(この論文の最初のタイトルは "Mukai implies McKay" であった.)

これらの結果によって $\mathbb{C}^3/G$ のクレパント解消の統一的構成が可能になったわけであるが，また一方で一般には複数個あるクレパント解消の中に G-Hilb($\mathbb{C}^3$) という特別なものが存在するということも意味する．そこで我々が問題にするのは，他のクレパント解消についても同様の構成ができないか？ということである．

7 フロップと ムーバブルコーン

ここでは，複数存在するクレパント解消の間の関係について，良く知られていることを説明する．詳しくは [K 森 98] や [Mat02] を見られたい．

3 次元代数多様体の極小モデルは一意には定まらないと述べたが，2 つの極小モデルはフロップという操作の列で移りあう．ここでは，フロップの一般的な定義は述べずに，最も簡単なものを例として挙げる．実際，$\mathbb{C}^3/G$ のクレパント解消は，G がアーベル群のときにはトーリック多様体となり，次のフロップだけを考えればよい．

例 *7.1 (Atiya のフロップ)*. Y を 3 次元非特異代数多様体，$\ell \cong \mathbb{P}^1$ をその中に埋め込まれた射影直線とする．ℓ の Y における法束 $N_{\ell/Y}$ が $\mathcal{O}_\ell(-1) \oplus \mathcal{O}_\ell(-1)$ に同型であるとき，ℓ を $(-1,-1)$-曲線と言う．Y の ℓ によるブローアップを $f : \tilde{Y} \to Y$ とすると，その例外因子 $E := f^{-1}(\ell)$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に同型，法束 $N_{E/\tilde{Y}}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)$ である．すると，E の $\mathbb{P}^1$ へのもう一つの射影に対応して $\tilde{Y}$ を別の方向につぶすことができて，非特異多様体 Y' を得る．E の像 $\ell' \subset Y'$ は再び $(-1,-1)$-曲線である．このようにできる双有理写像 $Y \dashrightarrow Y'$（定義域は $Y \setminus \ell$）はフロップの古典的な例である．

Y において ℓ を一点につぶすことができて，多様体 W を得る．W は ℓ の像で特異点を持ち，それは解析的には 4 変数の非退化 2 次型式で定義される超曲面の特異点である．$\varphi : Y \to W$ も $\varphi' : Y' \to W$ もともに W の (スモールな=例外集合の余次元が 2 以上の) 特異点解消であるが，重要なことは,「φ-豊富な直線束はフロップにより φ'-豊富な直線束の逆直線束にうつる」ことである．

我々は $X = \mathbb{C}^3/G$ 上射影的なクレパント解消 $\tau : Y \to X$ のみを考えるが，実際フロップと言うときは Y' も X 上射影的であることを要請する．(単純に $(-1,-1)$-曲線を取り替えると言う操作では射影性は必ずしも保たれない.) そうすると Y の上に豊富な直線束を考えることが重要である．直線束を使って，異なる射影的クレパント解消の間の関係を多面錐のことばで記述しよう．この部分について詳細は，例えば [Mat02, Chapter 12] を参照されたい．

$\mathrm{Pic}(Y)$ は Y 上の直線束（の同型類）がテンソル積についてなす群，$Z_1(Y/X)$ は τ によって一点にうつるような Y の既約曲線を基底とする自由加群を表す．これらの間には，直線束の次数を計ることで交点数

$$\mathrm{Pic}(Y) \times Z_1(Y/X) \to \mathbb{Z}$$

が定義できる．そこで，

$$N^1(Y/X) := (Pic(Y)/\equiv_X) \otimes \mathbb{R},$$

そして

$$N_1(Y/X) := (Z_1(Y/X)/\equiv_X) \otimes \mathbb{R},$$

と定義する．ここで，$\equiv_X$ は上の交点数に関する数値的同値を表す．これらは有限次元ベクトル空間となる．$N_1(Y/X)$ の中で，正係数のサイクルで生成される錐を $NE(Y/X)$，その閉包を $\overline{NE}(Y/X)$ と書く．一方 $N^1(Y/X)$ の中で豊富な直線束のクラスで生成される錐を $\mathrm{Amp}(Y/X)$ その閉包を $\overline{\mathrm{Amp}}(Y/X)$ と書く．$\overline{NE}(Y/X)$ と $\overline{\mathrm{Amp}}(Y/X)$ は互いに双対な錐である．$(-1,-1)$-曲線 ℓ が別の射影的クレパント解消 Y' へのフロップを定めるのは ℓ が $\overline{NE}(Y/X)$ の端射線であるときである．このとき，$N^1(Y/X)$ と $N^1(Y'/X)$ は自然に同一視でき，その中で $\overline{\mathrm{Amp}}(Y/X)$ と $\overline{\mathrm{Amp}}(Y'/X)$ とは余次元 1 の面を境界に隣接する．すべての射影的クレパント解消 Y を考えて，

$$\overline{\mathrm{Mov}} := \bigcup_Y \overline{\mathrm{Amp}}(Y/X)$$

とおく (一般にはさらに閉包をとる)．この錐 $\overline{\mathrm{Mov}}$ の $\overline{\mathrm{Amp}}(Y/X)$ への分解が，射影的クレパント解消の間の関係を記述している．我々の場合は Y は X と双有理であるので，上に出てきた錐は全て有限多面錐であり，射影的クレパント解消も有限である（[Mat02, 12.3] 参照)．特に G がアーベル群のとき，X や Y は全てトーリック多様体であり，クレパント解消は三角形分割のことばで記述できる．特に，$\overline{\mathrm{Mov}}$ は Gel'fand-Kapranov-Zelevinski [GKZ94] により secondary fan と呼ばれるものの一部である．

8 G-constellation とそのモデュライ

[IN00] で指摘されているのは，G-Hilb は Kronheimer [Kro89] や Sardo-Infirri [SI96] の考察した McKay 箙の表現のモデュライ空間のうち，特別なパラメータに対応する場合とみなすことができる，ということである．そこで，他のパラメータに対応するモデュライ空間が他のクレパント解消を与えると期待できる．本稿では，McKay 箙の表現という代わりに，G-cluster を直接一般化した G-constellation という概念を定義して，そちらの言葉でモデュライ空間を調べることにする．

定義 8.1. $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ を有限部分群とする．G-constellation とは $\mathbb{C}^n$ 上の（有限個の点に台をもつ）G-同変連接層 F であって，G の表現 $H^0(F)$ が正則表現であるもののことである．

なお，cluster of stars といえば星団であり，Reid は cluster を日本語では点団と呼ぶことを提唱している．一方，constellation は星座のことである．G-constellation F は，G の正則表現に n 変数多項式環の同変な作用を与えれば定まり，[IN00] にあるように McKay 箙の表現（の同値類）とみなすことができる．箙の表現のモデュライは King ([Kin94]) により幾何学的不変式論 (GIT) を使って構成されており，それはそのまま G-constellation のモデュライとなる．GIT による構成であるから，モデュライは安定性の条件に依存する．そこで G-constellation の安定性の定義を述べよう．$R(G)$ で G の表現環（すなわち G の表現の Grothendieck 群）を表し，$R \in R(G)$ を正則表現として，

$$\Theta := \{\, \theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R(G), \mathbb{Q}) \mid \theta(R) = 0 \,\},$$

とおく．ただし，$R(G)$ は環ではなくただの加群とみなしている．E が $\mathbb{C}^n$ 上の G-同変な有限連接層であるとき，$H^0(E)$ は $R(G)$ の元を定めることに注意して $\theta(E)$ により $\theta(H^0(E))$ を表す．[Kin94] における安定性の定義は，我々の場合には次のように表現される．

定義 8.2. $\theta \in \Theta$ と G-constellation F について，F が θ-安定とは，任意の非自明同変部分層 $E \subset F$ について，$\theta(E) > 0 (= \theta(F))$ であることを言う．不等号を等号付きのものに変えたとき，θ-半安定という．

$\mathrm{Irr}(G)$ で G の既約表現全体の集合を表し，$\rho_0 \in \mathrm{Irr}(G)$ を自明な表現とする．$\mathrm{Irr}(G)$ は $R(G)$ の自由基底である．

例 *8.3.* 安定性の例を挙げる．

1. $\theta \in \Theta$ が ρ_0 以外の $\rho \in \mathrm{Irr}(G)$ については $\theta(\rho) > 0$ を満たすと仮定する．（すると $\theta(R) = 0$ の仮定から $\theta(\rho_0) < 0$ となる．）このとき，G-constellation F が θ-安定であること，θ-半安定であること，そして G-cluster Z が存在して $F \cong \mathcal{O}_Z$ となることは，互いに同値である．

2. $0 \in \Theta$ について考える．G-constellation F が 0-安定であることは，F が非自明な同変部分層をもたない，すなわち自由 G-軌道 Z が存在して $F \cong \mathcal{O}_Z$ となることと同値である．一方 任意の G-constellation は 0-半安定である．

定理 8.4 (本質的に [Kin94]). *θ-安定な G-constellation の同型類のモデュライ $\mathcal{M}_\theta$ および θ-半安定な G-constellation の S-同値類のモデュライ $\overline{\mathcal{M}_\theta}$ が存在する．(S-同値については，例えば [HL97] を参照.)*

モデュライ空間と商特異点 $X = \mathbb{C}^n/G$ とは次のように関係付けられる．θ-半安定なものがみな θ-安定である時，θ を generic であるという．

命題 8.5. *1.* 軌道 $G \cdot x$ に対し，$G \cdot x$ を台とするような *G-constellation* の同値類を対応させることにより，*closed immersion* $X \to \overline{\mathcal{M}_0}$ が得られる．これにより X は $\overline{\mathcal{M}_0}$ の既約成分になる．

2. θ-安定 G-constellation をその台に対応させることにより，射 $\tau\colon \mathcal{M}_\theta \to X$ が得られる．もし θ が *generic* ならば，この射は射影的である．

上の命題は次の図式で理解される．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\theta & \xrightarrow{\text{open immersion}} & \overline{\mathcal{M}_\theta} \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{projective}} \\ X & \xrightarrow{\text{closed immersion}} & \overline{\mathcal{M}_0} \end{array}$$

9 普遍族と Fourier-向井変換

モデュライ空間の構成法と $H^0(F)$ が正則表現であるということから，連接層の descent theory を使って，$\mathcal{M}_\theta \times \mathbb{C}^n$ の上には θ-安定 G-constellation の普遍族 $\mathcal{U}_\theta$ が存在することがわかる．$\mathcal{U}_\theta$ の $\mathcal{M}_\theta$ への順像を

$$\mathcal{R} := \pi_{\mathcal{M}_\theta *}\mathcal{U}_\theta$$

とおくと，これには G の作用があるので，

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} \mathcal{R}_\rho \otimes_{\mathbb{C}} \rho$$

と分解する．この $\mathcal{R}_\rho$ たちを，tautological bundle という．普遍族には $\mathcal{M}_\theta$ 上の直線束のテンソルによる不定性があるが，自明な表現 ρ_0 に対応する tautological bundle $\mathcal{R}_{\rho_0}$ が自明な直線束 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_\theta}$ であるように正規化しておく．そうすれば，$\mathcal{U}_\theta$ も $\mathcal{R}_\rho$ も一意に定まる．

普遍族 $\mathcal{U}_\theta$ は $\mathcal{R}$ への多項式環の (G-同変な) 作用により定まっているので，しばしば $\mathcal{R}$ と $\mathcal{U}_\theta$ を混同する．($\mathcal{R}, \mathcal{R}_\rho$ も当然 θ に依存するのであるが，添字を二つ書くのは面倒であったので省略した．)

注 *9.1.* θ が例 8.3 の 1 の条件をみたすとき，$\mathcal{M}_\theta$ は G-Hilb($\mathbb{C}^n$) と（モデュライ空間として）一致する．すなわち，これらはスキームとして同型でありかつその上の普遍族も同型である．G-Hilb($\mathbb{C}^n$) は，tautological bundle $\mathcal{R}_\rho$ がすべて大域切断で生成されるということにより特徴付けられる．

普遍族によってやはり導来圏の間の積分函手を考えることができる．$D(\mathcal{M}_\theta)$ で $\mathcal{M}_\theta$ 上の連接層の有界導来圏を表し，$D^G(\mathbb{C}^n)$ により $\mathbb{C}^n$ 上の G-同変連接層の有界導来圏を表す．次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M}_\theta \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\pi_{\mathcal{M}_\theta}"'] \arrow[dr, "\pi_{\mathbb{C}^n}"] & \\ \mathcal{M}_\theta \arrow[dr, "\tau"'] & & \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

函手 $\Phi_\theta\colon D(\mathcal{M}_\theta) \to D^G(\mathbb{C}^n)$ を次のように定義する．

$$\Phi_\theta(-) = \mathbf{R}\pi_{\mathbb{C}^n *}(\mathcal{U}_\theta \otimes \pi_{\mathcal{M}_\theta}{}^*(-)).$$

G-constellation のモデュライについても，G-cluster に対する Bridgeland, King と Reid の議論をそのまま適用することにより，次が得られる．

定理 9.2. $G \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ を有限部分群とする．θ が *generic* であれば，$\tau\colon \mathcal{M}_\theta \to X$ はクレパント解消であり，Φ_θ は三角圏の同値である．

これをふまえて，我々は次のことを問題にする．

- $\mathcal{M}_\theta$ や Φ_θ は θ とともにどのように変化するか？
- 特に任意の射影的クレパント解消 $Y \to X$ に対し，$Y \cong \mathcal{M}_\theta$ となる generic な θ は存在するか？

一つ目の問題に対しては，chamber 構造を考えることになるので，次節以降で解説する．二つ目の問題に対する我々の結果は次のようになる．

定理 9.3. $G \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ を有限アーベル群とする．このとき，任意の射影的クレパント解消 $Y \to X$ に対し，$Y \cong \mathcal{M}_\theta$ となる *generic* な $\theta \in \Theta$ が存在する．

これは一つ目の問題に対する結果を使って示すことになる．一つ目の問題が非アーベル群のときにはよくわかっていないため，上の定理もアーベル群に限定されている．

10 Chamber 構造と Fourier-向井変換

一般に GIT による商空間がパラメータ (一般には，線形化された直線束) に応じて変化する様子は，パラメータ空間の chamber 構造で記述される ([Tha96], [DH98])．(我々の場合には) generic なパラメータの全体 $\Theta^{\mathrm{gen}} \subset \Theta$ は open dense であり，有限個の狭義凸 (有限) 開多面錐の disjoint union である．一つの多面錐は，同じ安定性を定める generic なパラメータ θ の同値類である．

定義 10.1. 上の開多面錐 C を chamber という．$\overline{C}$ の余次元 1 の面を，C の wall という．

$\theta \in C$ であるとき，$\mathcal{M}_\theta, \mathcal{U}_\theta, \Phi_\theta$ 等は C のみに依存するので，$\mathcal{M}_C, \mathcal{U}_C, \Phi_C$ 等と書くことにする．

chamber 構造を調べるために，Θ の定義を思い出そう．Θ は，$\theta : R(G) \to \mathbb{Q}$ であって $\theta(R) = 0$ となるものの集合であった．ここで，$R(G)$ は Grothendieck 群 $K^G_{\tau^{-1}(0)}(\mathbb{C}^n)$ と同型であり，安定性の定義の仕方からむしろ後者だと思った方が良いので，これらを同一視することにする．すると，$\chi^G(-,-)$ から $R(G)$ にも内積が導入される．

すると，2 次元のときには定理 3.1 により，$R(G)/\mathbb{Z}R$ は有限型ルート格子だと思うことができ，$\Theta = \mathrm{Hom}(R(G)/\mathbb{Z}R, \mathbb{Q})$ には Weyl 群の作用による chamber 構造が入る．これは本質的には Kronheimer により調べられたものである．

定理 10.2 ([Kro89], [CS98] も見よ). $G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ とする．このとき，

1. $\theta \in \Theta$ を *generic* とすると，$\mathcal{M}_\theta$ は X の極小解消である．
2. $\theta \in \Theta$ が *generic* であるための必要十分条件は θ への *Weyl* 群の作用が自由であることである．
3. 安定性から決まる *chamber* は，*Weyl chamber* である．

例 *10.3.* G-$\mathrm{Hilb}(\mathbb{C}^2)$ を定める chamber C は

$$C = \{\, \theta \in \Theta \mid \theta(\rho_i) > 0 \quad (i \neq 0) \,\}$$

である．

Proof. この例の証明をしてみよう．C が右辺を含むことは例 8.3 で見たので，逆の包含関係を示せば良い．定理 5.2 によれば，

$$\Phi_C(\mathcal{O}_{\ell_i}(-1)) = \rho_i \otimes \mathcal{O}_0$$

は，ℓ_i 上の点に対応する G-constellation に共通の部分層である．従って，安定性の定義から $\theta \in C$ ならば $\theta(\rho_i) > 0$ でなければならない． □

注 *10.4.* 3次元のときは，G-Hilb$(\mathbb{C}^3)$ を定める chamber は一般に上のようなものより大きい．

このように，G-Hilb$(\mathbb{C}^2)$ に対応する chamber は，

$$\Phi_C(\mathcal{O}_{\ell_1}(-1)), \dots, \Phi_C(\mathcal{O}_{\ell_n}(-1))$$

の値が正になるという条件で定まることがわかった．より一般に ℓ を $Y = \mathcal{M}_\theta$ 内の例外曲線，$\mathcal{O}_\ell(d)$ をその上の直線束とすると，$\Phi^0_\theta(\mathcal{O}_\ell(d))$ は ℓ のパラメトライズする G-constellation の部分層に重み $\mathcal{O}_\ell(d)$ を付けて「積分」したようなものであって，すると安定性の定義から $\theta([\Phi^0_\theta(\mathcal{O}_\ell(d))]) \geq 0$ が成り立つことがわかる．さらに ℓ 上の Serre 双対性を使うと，$\Phi^1_\theta(\mathcal{O}_\ell(d))$ は ℓ のパラメトライズする G-consellation の商に重みをつけて「積分」したようなものであり，$\theta([\Phi^1_\theta(\mathcal{O}_\ell(d))]) \leq 0$ が成り立つ．Grothendieck 群 $K_{\{0\}}(\mathbb{C}^n)$ において

$$[\Phi_\theta(\mathcal{O}_\ell(d))] = [\Phi^0_\theta(\mathcal{O}_\ell(d))] - [\Phi^1_\theta(\mathcal{O}_\ell(d))]$$

であるから，結局

$$\theta([\Phi_\theta(\mathcal{O}_\ell(d))]) \geq 0$$

という式がいつでも成り立たなければならない (しかも等号は成立しない)．実際，定理 10.2 の 3 は次のように表現することができる．

定理 10.5. $G \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ と仮定し，$C \subset \Theta$ は *chamber* とする．このとき，$\theta \in C$ となる必要十分条件は，$\theta([\Phi_C(\mathcal{O}_{\ell_i})]) > 0$ *(*$i = 1, \dots, n$*)* である．

以下 chamber についてのこの形の記述を 3 次元の場合に拡張する．実質的にはこれがこの研究の主要な部分であり，技術的な理由からアーベル群の場合に限定されている．

$D_{\tau^{-1}(0)}(\mathcal{M}_\theta)$ により $\tau^{-1}(0)$ に台を持つ対象からなる $D(\mathcal{M}_\theta)$ の充満部分圏，$D^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^3)$ により原点 $\{0\}$ に台を持つ対象からなる $D^G(\mathbb{C}^3)$ の充満部分圏を表すことにする．これらの三角圏の Grothendieck 群がそれぞれ，$K_{\tau^{-1}(0)}(\mathcal{M}_C)$, $K^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^3)$ である．Φ_C は $D^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^3)$ と $D^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^3)$ の同値を導き，従って同型

$$\varphi_C : K_{\tau^{-1}(0)}(\mathcal{M}_C) \xrightarrow{\sim} K^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^3)$$

を導く．大域切断をとることにより，$K^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^3) \cong R(G)$ であるから，$\theta \in \Theta$ に $K^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^3)$ の元を代入することができる．すると chamber は次のように記述できる．

定理 10.6. $G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ を有限アーベル群，C を *chamber* とする．このとき，$\theta \in C$ であるための必要十分条件は，θ が次の不等式を満たすことである．

- すべての例外直線 ℓ について，$\theta(\varphi_C(\mathcal{O}_\ell)) > 0$.
- すべてのコンパクト被約 *(*例外*)* 因子 D と全ての既約表現 ρ について，

$$\theta(\varphi_C(\mathcal{R}^*_\rho \otimes \omega_D)) < 0 \quad \text{かつ} \quad \theta(\varphi_C(\mathcal{R}^*_\rho|_D)) > 0.$$

上で，$\mathcal{R}_\rho$ は tautological bundle (従って C に依存する) であり，$\mathcal{R}^*_\rho$ はその双対である．$\mathcal{R}^*_\rho \cong \Phi_C^{-1}(\rho \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3})$ であることに注意すれば，C は Φ_C により決定されると言うことになる．以下で上の定理の解説をする．

一つ目の不等式 $\theta(\varphi_C(\mathcal{O}_\ell)) > 0$ は G がアーベル群でなくとも成立する．その一つの解釈についてはすでに述べたが，ここではより大域的な見方をしよう．この不等式は，GIT により構成される $\mathcal{M}_\theta$ 上の自然な直線束 (polarisation) は必ず豊富である，ということを表す式なのである．じっさい，$\theta \in C$ の定める $\mathcal{M}_C$ の polarisation は，

$$L_C(\theta) := \bigotimes_{\rho \in \mathrm{Irr}(G)} (\det \mathcal{R}_\rho)^{\theta(\rho)} \tag{10.1}$$

により与えられ，一方

$$\mathbb{R}\Gamma(\Phi_C(\mathcal{O}_\ell)) \cong \bigoplus_{\rho\in \mathrm{Irr}(G)} \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{R}_\rho \otimes \mathcal{O}_\ell) \otimes_{\mathbb{C}} \rho$$

である (Γ は大域切断をとる函手) から，

$$\theta(\varphi_C(\mathcal{O}_\ell)) = \sum_\rho \chi(\mathcal{R}_\rho \otimes \mathcal{O}_\ell)\theta(\rho) = \deg(L_C(\theta)|_\ell)$$

となる．

そこで，写像 $\theta \mapsto L_C(\theta)$ を考えると，定理の主張は，$\overline{\mathrm{Amp}}(\mathcal{M}_\theta)$ の境界の引き戻しにはなっていない C の wall が二つ目の形の不等式で書け (逆に二つ目の形の不等式は全て成立す) る，ということになる．そのような wall W から一般の元 θ_0 を選ぶ．G がアーベル群との仮定のもと，

- $\mathcal{M}_C$ のうち，θ_0-安定でない G-constellation の locus は コンパクトかつ連結な被約因子 D になる．
- D 上の G-constellation の θ_0-安定性 に関する Jordan-Hölder フィルトレーションの長さは 2 である．
- 上のフィルトレーションの定める部分層または商層のどちらか一方 (のみ) は D 上すべて共通である．
- 部分層が共通の場合はそれは $\Phi_C(\mathcal{R}_\rho^* \otimes \mathcal{O}_D) = \Phi_C^0(\mathcal{R}_\rho^* \otimes \mathcal{O}_D)$ で与えられ,，商層が共通の場合はそれは $\Phi_C(\mathcal{R}_\rho^* \otimes \omega_D)[2] = \Phi_C^2(\mathcal{R}_\rho^* \otimes \omega_D)$ で与えられる．(ρ は部分層，または商層の大域切断に含まれる既約表現ならどれでもよい．)

ということを示すことができる．従って W の定める不等式は $\theta(\varphi_C(\mathcal{R}_\rho^* \otimes \omega_D)) < 0$ あるいは $\theta(\varphi_C(\mathcal{R}_\rho^*|_D)) > 0$ の形に表され，逆にこのような不等式は全て成立することも示すことができる．このように，定理 10.6 の二つ目の不等式が最もテクニカルな部分であり，詳しくは [CI02] を見ていただきたい．

なお，G-Hilb($\mathbb{C}^3$) を定める chamber については，余分な不等式を減らし，より簡明な表示を得ることができる [CI02, §9].

11 Wall-crossing と $(\mathcal{M}_\theta, \Phi_\theta)$ の変化

前節の結果を元に，パラメータ θ が wall を越えたときに，$\mathcal{M}_\theta$ や Φ_θ がどう変わるか述べよう．

まず，2 次元のときを考える．2 次元のときはすべての $\mathcal{M}_C$ は唯一の極小解消に同型であるので，Φ_C が C によってどう変わるかということが問題になる．C, C' を wall W で隔てられた二つの chamber とする．このとき W が $\theta(\varphi_C(\mathcal{O}_{\ell_i})) = 0$ で定義されるような (−2)-曲線 ℓ_i がとれる．これは，$\theta(\varphi_{C'}(\mathcal{O}_{\ell_i})) = 0$ と同じであり，K 群のレベルでは $\varphi_{C'}^{-1} \circ \varphi_C$ は $\mathcal{O}_{\ell_i}(-1)$ に関する鏡映である．導来圏のレベルでは，$\Phi_{C'}^{-1} \circ \Phi_C$ は $\mathcal{O}_{\ell_i}(-1)$ に関する Seidel-Thomas のツイスト $T_{\mathcal{O}_{\ell_i}(-1)}$ または その逆 $T'_{\mathcal{O}_{\ell_i}(-1)}$ であることがわかる．

ここで Seidel-Thomas のツイストの定義をしよう．Y を非特異多様体，$D(Y)$ をその上の連接層の導来圏，$D_c(Y)$ を台がコンパクトである連接層の導来圏とする．$\mathcal{E} \in D_c(Y)$ に対し，ツイスト函手 $T_\mathcal{E} : D(Y) \to D(Y)$ を distinguished triangle

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}, \alpha) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{E} \xrightarrow{\mathrm{ev}} \alpha \longrightarrow T_\mathcal{E}(\alpha)$$

により定義する．

定理 11.1 ([ST01]). $\mathcal{E} \in D_c(Y)$ を *spherical object* であるとする．すなわち，$\dim \mathit{Hom}^i(E,E) = 0$ $(i \neq 0, \dim Y)$, $\dim \mathit{Hom}^0(E,E) \cong \mathit{Hom}^{\dim Y}(E,E) \cong \mathbb{C}$ かつ $\mathcal{E} \otimes \omega_Y \cong \mathcal{E}$ であるとする．このとき，函手 $T_{\mathcal{E}}$ は三角圏としての同値である．

例 *11.2.* 曲面上の (-2)-曲線の構造層（又はその上の直線束）は spherical である．3 次元多様体の $(-1,-1)$ 曲線上の直線束も spherical である．K_Y が自明な 3 次元多様体 Y に埋め込まれた射影的有理曲面 S 上の直線束も spherical である．

$T_{\mathcal{E}}$ は K 群には次のように作用する．

$$(T_{\mathcal{E}})_*(\alpha) = \alpha - \chi(\mathcal{E}, \alpha)[\mathcal{E}]$$

ただし，$\chi(-,-)$ は $\chi(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ で定義される，双線形型式である．K_Y が自明であるとしよう．Y が偶数次元であるとき，双線形形式 $\chi(-,-)$ は対称であり，K 群でのツイスト $(T_{\mathcal{E}})_*$ は鏡映である．一方，$\dim Y$ が奇数のとき，$\chi(-,-)$ は歪対称であり，$(T_{\mathcal{E}})_*$ は $\chi(-,-)$ に関する $[\mathcal{E}]$ の直交補空間 $[\mathcal{E}]^\perp$ を境界とする二つの半空間を入れ替えない．このことは定理 9.3 を示す際に重要である．

注 *11.3.* 2 次元の場合，ツイスト $T_{\mathcal{O}_{\ell_i}(-1)}$ は K 群には鏡映として作用するが，導来圏のレベルではこれは無限位数の自己同値である．実際，Seidel-Thomas は $\{T_{\mathcal{O}_{\ell_i}(-1)}\}$ はブレイド群の導来圏への忠実な作用を導くことを証明している．

いよいよ 3 次元の場合の wall-crossing を考える．まず，前節の考察に基づき wall を次のように分類しよう．W を chamber C の wall, $\theta_0 \in W$ を一般の元とする．同型類を (θ_0-安定性についての)S-同値類につぶす双有理射

$$\mathrm{cont}_W : \mathcal{M}_C \longrightarrow \overline{\mathcal{M}_{\theta_0}}$$

を考える．(厳密には $\overline{\mathcal{M}_{\theta_0}}$ は既約でなかったりするので少し違う定義をすべきである．) すると $L_C(\theta_0)$ は $\overline{\mathcal{M}_{\theta_0}}$ 上の豊富な直線束の $\mathcal{M}_C$ への引き戻しであり，cont_W は $L_C(\theta_0)$ から定まる primitive contraction ([Wil92]: 相対 Picard 数が 1) 又は同型射である．

定義 11.4. W の型を，Wilson [Wil92] に倣って次のように定義する．

- cont_W が同型 ($L_C(\theta_0)$ が豊富) のとき，W を 0 型という．
- cont_W が曲線を点につぶすとき，I 型という．
- cont_W が曲面を点につぶすとき，II 型という．
- cont_W が曲面を曲線につぶすとき，III 型という．

定理 10.6 の一つ目の不等式を与えるのが I, II, III 型，二つ目の不等式を与えるのが 0 型ということになる．このように定義したが，

命題 11.5. G がアーベル群とすると，II 型の *wall* は存在しない．

ことを示すことができる．

定理 11.6. C, C' を *wall* W で隔てられた *chamber* とする．このとき，$\mathcal{M}_C$ と $\mathcal{M}_{C'}$ の関係，および導来圏の同値 $\Phi_{C'}^{-1} \circ \Phi_C \colon D(\mathcal{M}_C) \xrightarrow{\sim} D(\mathcal{M}_{C'})$ は次のようになる．

0 型: $\mathcal{M}_C$ と $\mathcal{M}_{C'}$ は同型であり，$\Phi_{C'}^{-1} \circ \Phi_C$ は $\mathcal{R}_\rho^* \otimes \mathcal{O}_D$ または $\mathcal{R}_\rho^* \otimes \omega_D$ についての，*Seidel-Thomas* のツイストである．(直線束によるテンソルを除いて)．

I 型: $\mathcal{M}_C$ は $\mathcal{M}_{C'}$ のフロップであり $\Phi_{C'}^{-1} \circ \Phi_C$ は *Bondal-Orlov [BO95, §3]* の考察した，*Atiya* のフロップの導く同値である．

III 型: $\mathcal{M}_C$ は $\mathcal{M}_{C'}$ に同型であり $\Phi_{C'}^{-1} \circ \Phi_C$ は，III 型の縮約についての，*Horja* や *Szendrői [Hor01, Sze01]* の考えた *EZ*-変換である．(これも直線束によるテンソルを除く)．

12 定理9.3の証明について

以上の準備のもと，定理 9.3 の証明の概略を述べよう．X の任意の射影的クレパント解消は G-Hilb からフロップの列により得られるので，次のことを示せばよい：$Y := \mathcal{M}_C$ のフロップ Y' に対し，$Y' \cong \mathcal{M}_{C'}$ となる chamber C' が存在する．これは，フロップ $Y \dashrightarrow Y'$ を引き起こす I 型の wall が C にあるときは，定理 11.6 により成り立つが，一般にはそうではなく，その前に 0 型の wall をいくつか越えなければならない．では，どのように 0 型の wall を越えて行けばよいか，説明しよう．

Grothendieck 群 $K(Y)_{\mathbb{Q}}$ の topological filtration

$$K(Y)_{\mathbb{Q}} = F^0 \supset F^1 \supset F^2 \supset F^3 = 0$$

を考える．すなわち，F^i は台の余次元が i 以上である連接層で生成される $K(Y)$ の部分空間である．一方 $\tau^{-1}(0)$ に台を持つ連接層の Grothendieck 群 $K_{\{0\}}(Y)_{\mathbb{Q}}$ にも台の次元によるフィルトレーション

$$0 = F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset F_2 = K_{\{0\}}(Y)_{\mathbb{Q}}$$

をがある．$\chi(-,-)$ により $K(Y)_{\mathbb{Q}}$ と $K_{\{0\}}(Y)_{\mathbb{Q}}$ は互いに双対であり，$F^i = F_{i-1}^{\perp}$ が成り立つ．コンパクトな台を持つ Grothendieck 群の間の Fourier-向井変換 $\varphi_C : K_{\tau^{-1}(0)}(Y) \xrightarrow{\sim} K^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^3)$ を思い出そう．$K^G_{\{0\}}(\mathbb{C}^3)$ を $R(G)$ と同一視すると，φ_C の随伴として

$$\varphi_C^* : \mathrm{Hom}(R(G), \mathbb{Q}) \to K(Y)_{\mathbb{Q}}$$

が定まる．$\Theta = R^{\perp}$ であったから，$\varphi_C^*(\Theta) = F_0^{\perp} = F^1$ である．そこで次のような可換図式を考えることができる．

$$\begin{tikzcd} \Theta \arrow[r, "\varphi_C^*"] \arrow[d, "L_C"'] & F^1 \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{Pic}(Y)_{\mathbb{Q}} & F^1/F^2 \arrow[l, "\sim", "\det^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

ここで，L_C は定理 10.6 で考えたものである．

さて，フロップ $Y \dashrightarrow Y'$ を起こすことを考えよう．$\overline{\mathrm{Amp}}(Y/X) \cap \overline{\mathrm{Amp}}(Y'/X)$ の L_C による引き戻しが C の wall W を含むときは，W で C と接する chamber C' を取ればよい．そうでないときは，0 型の wall に阻まれているので，0 型の wall を越える必要がある．目標は $\mathrm{Amp}(Y')$ (の引き戻し) に辿り着くことであるので，wall-crossing により L_C がどのように変化するのかということが重要である．上の図式にあるように $L_C = p \circ \varphi_C^*$ であり p は C に依らないから結局 φ_C^* がどう変わるか，ということになる．これは定理 11.6 で述べたように Seidel-Thomas のツイストと直線束のテンソルによって表される．そしてツイストは奇数次元では「向きを変えない」ので，$\varphi_C^*(C)$ は $p^{-1}(\overline{\mathrm{Amp}}(Y'/X))$ に近付いて行くことができる．直線束のテンソルの作用 (これは p のファイバー方向に作用する) に関する若干の考察をすれば，有限個の 0 型の wall を越えた後，Y' にフロップする I 型の wall を持つ chamber にたどりつくことがわかる．

このように定理 9.3 は証明される．$\theta \in \overline{C}$ に $L_C(\theta)$ を対応させる写像は全体で貼り合って，区分的線形写像

$$\Theta \longrightarrow \overline{\mathrm{Mov}}$$

ができるが，この証明ではこれが全射になると言うこともわかる．

References

[AV85] M. Artin and J. Verdier. Reflexive modules over rational double points. *Math. Ann.* **270**, pp. 79–82, 1985.

[BKR01] T. Bridgeland, A. King, and M. Reid. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories. *J. Amer. Math. Soc.* **14**, pp. 535–554, (2001).

[BO95] A. Bondal and D. Orlov. *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties.* Preprint math.AG/9506012, (1995).

[CI02] A. Craw and A. Ishii. *Flops of G-*Hilb *and equivalences of derived categories by variation of GIT quotient.* Preprint math.AG/0103231, to appear in Duke Math. J., (2002).

[CS98] H. Cassens and P. Slodowy. On Kleinian singularities and quivers. In *Progr. Math.* **162**. Birkhäuser, Basel, pages 263–288, (1998).

[DH98] I. Dolgachev and Y. Hu. Variation of geometric invariant theory quotients. *Publ. Math. IHES* **87**, pp. 5–56, (1998).

[DHVW85] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, and E. Witten. Strings on Orbifolds I. *Nuclear Physics B* **261**, pp. 678–686, (1985).

[DHVW86] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, and E. Witten. Strings on Orbifolds II. *Nuclear Physics B* **274**, pp. 285–314, (1986).

[EK85] H. Esnault and H. Knörrer. Reflexive modules over rational double points. *Math. Ann.* **272**, pp. 545–548, 1985.

[Fog68] J. Fogarty. Algebraic families on an algebraic surface. *Amer. J. Math.* **90**, pp. 511–521, 1968.

[GKZ94] I. Gel'fand, M. Kapranov, and A. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.* Birkhäuser, (1994).

[GSV83] G. Gonzalez-Sprinberg and J. Verdier. Construction géométrique de la correspondance de McKay. *An. Sci. École Norm. Sup.* **16**, pp. 409–449, (1983).

[HL97] D. Huybrechts and M. Lehn. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves.* Vieweg, (1997).

[Hor01] R. P. Horja. *Derived category automorphisms from mirror symmetry.* math.AG/0103231, (2001).

[Iar72] A. Iarrobino. Reducibility of the families of 0-dimensional schemes on a variety. *Invent. Math.* **15**, pp. 72–77, (1972).

[IN99] Y. Ito and I. Nakamura. Hilbert schemes and simple singularities. In *New trends in algebraic geometry.* Klaus Hulek et al. (editors), CUP, pages 155–233, (1999).

[IN00] Y. Ito and H. Nakajima. The McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension three. *Topology* **39**, pp. 1155–1191, (2000).

[Ish02] A. Ishii. On the Mckay correspondence for a finite small subgroup of $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. *J. Reine Angew. Math.* **549**, pp. 221–233, (2002).

[Kin94] A. King. Moduli of representations of finite dimensional algebras. *Quart. J. Math. Oxford* **45**, pp. 515–530, (1994).

[Kro89] P. Kronheimer. The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients. *J. Diff. Geom* **29**, pp. 665–683, (1989).

[KV00] M. Kapranov and E. Vasserot. Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras. *Math. Ann.* **316**, pp. 565–576, (2000).

[K 森 98] J. Kollár, 森重文. 双有理幾何学. 岩波書店, (1998).

[Mat02] K. Matsuki. *Introduction to the Mori Program.* Springer–Verlag, (2002).

[McK80] J. McKay. Graphs, singularities and finite groups. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **37**, pp. 183–186, (1980).

[Muk81] S. Mukai. Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves. *Nagoya Math. J.* ***81***, pp. 153–175, (1981).

[Nak00] I. Nakamura. Hilbert schemes of Abelian group orbits. *J. Alg. Geom.* **10**, pp. 757–779, (2000).

[SI96] A. Sardo-Infirri. *Resolutions of orbifold singularities and the transportation problem on the McKay quiver.* Preprint math.AG/-9610005, (1996).

[Slo80] P. Slodowy. Simple singularities and simple algebraic groups. *Lecture Notes in Mathematics* **815**, (1980).

[ST01] P. Seidel and R. Thomas. Braid group actions on derived categories of coherent sheaves. *Duke Math. J.* **108**, pp. 37–108, (2001).

[Sze01] B. Szendrői. Diffeomorphisms and families of Fourier–Mukai transforms in mirror symmetry. In *Applications of algebraic geometry to coding theory, physics and computation (Eilat, 2001)*, pp. 317–337. NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 36, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht., (2001).

[Tha96] M. Thaddeus. Geometric invariant theory and flips. *J. Amer. Math. Soc.* **9**, pp. 691–723, (1996).

[Wil92] P. Wilson. The Kähler cone on Calabi–Yau threefolds. Invent. Math. ***108***, pp. 561–584, (1992).

[YY93] S. S. T. Yau and Y. Yung. Gorenstein quotient singularities in dimension three. *Mem. Amer. Math. Soc.* **105**, (1993).

[松澤 02] 松澤淳一. 特異点とルート系. 朝倉書店, (2002).

京都大学工学研究科都市環境工学専攻
E-MAIL: akira@kusm.kyoto-u.ac.jp