数理解析研究所講究録 1348 巻 2003 年 95-100

4次元のLipsman予想の解決

東京大学・数理科学研究科　吉野 太郎 (Taro Yoshino)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

概要

Lipsmanは彼の論文([1])において, (CI)と固有の同値性に関するある予想をした. これはLipsman予想と呼ばれている. 今回の主結果はこの予想が$n=4$のときに正しいというものである.

Gをリー群, Hをその閉部分群とする. ΓをGの離散部分群とすると, ΓはG/Hに自然に作用する. このとき

Definition 1. $\Gamma \curvearrowright G/H$が固有不連続 **(properly discontinuous)** かつ自由 **(free)** であるとき$\Gamma\backslash G/H$をG/Hの **Clifford-Klein form** という.

Remark 作用にproperly discontinuosかつfreeの条件を課さないと, $\Gamma\backslash G/H$は一般には多様体にならない. 特にHが非コンパクトなとき, $\Gamma\backslash G/H$は一般にはHausdorffにすらならない.

この話の出発点となる動機は次のようなものである.

問題 1:	いつ$\Gamma\backslash G/H$はClifford-Klein formになるか?

ここでproperly discontinuousとfreeの定義をしておこう.

Definition 2. Mを多様体とし, 離散群ΓがMに作用しているとする. このとき$\Gamma \curvearrowright M$が **properly discontinuous** であるとは, Mの任意のコンパクト集合Sに対して

$$\Gamma_S := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(S) \cap S \neq \emptyset\}$$

が有限集合であることをいう.

Definition 3. Mを多様体とし, 離散群ΓがMに作用しているとする. このとき$\Gamma \curvearrowright M$が **free** であるとは, Mの任意の元xに対して

$$\gamma(x) = x \Rightarrow \gamma = id$$

が成り立つことをいう. これは$\Gamma_{\{x\}} = \{id\}$と言い替えることもできる.

ここで, いくつかの例を見てみよう.

<u>**Example 1.**</u> Hがコンパクトのとき

$$\Gamma\text{が torsion free} \Rightarrow \Gamma\backslash G/H\text{は Clifford-Klein form}$$

が成り立つ.

<u>**Example 2.**</u> **(1962: Calabi-Murkus 現象)** $G = SO(n,1), H = SO(n-1,1)$のとき

$$\Gamma\backslash G/H\text{が Clifford-Klein form} \Rightarrow \Gamma\text{は有限群}$$

が成り立つ.

<u>**Example 3.**</u> **(1964: Auslander 予想)** $G = GL(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n, \quad H = GL(n,\mathbb{R})$のとき

$$\Gamma\backslash G/H\text{が compact な Clifford-Klein form} \overset{?}{\Rightarrow} \Gamma\text{は virtually finite}$$

が成り立つか?

Remark Auslander 予想は compact の仮定がないと反例が存在する. また $n \leq 6$ に対しては正しいことが Abels, Margulis, Soifer らによって証明されている (1997).

Clifford-Klein form か否かの判定において free の判定は比較的容易である. 一方 properly discontinuous は (定義は簡単だが) 判定は難しい. その難しさの一つは Γ という離散群を扱うことに起因する. そこで, 次のようなアイディアによってその難しさを回避することにしよう.

<u>**Fact 4.**</u> **(1989; Kobayashi)** L を G の閉部分群とし Γ を cocompact に含むものとする (つまり $\Gamma \subset L$ であり, L/Γ が compact). このとき

$$L \curvearrowright G/H\text{ が proper} \Leftrightarrow \Gamma \curvearrowright G/H\text{ が properly discontinuous}$$

となる.

<u>**Definition 5.**</u> **(1961; Palais)** $L \curvearrowright M$ が <u>固有 **(proper)**</u> であるとは, M の任意のコンパクト集合 S に対して

$$L_S := \{\ell \in L \mid \ell(S) \cap S \neq \emptyset\}$$

がコンパクトであることをいう.

Remark コンパクトかつ離散な集合は有限集合であるから, 離散群にのみ定義された properly discontinuous という概念を一般の群に自然に拡張したものが proper であると言える.

Remark M が特に等質空間 G/H のとき, $L \curvearrowright G/H$ が proper であることは,

G の任意のコンパクト集合 S に対し, $L \cap SHS^{-1}$ がコンパクト

と同値である. これを (L, G, H) が **proper** であるという.

Fact 4 により, 離散群 Γ ではなく, それを cocompact に含む連結な群 L を扱えばよいことが分かる. 従って最初に掲げた問題は, 次のような, もう少し簡単な問題へと降りてくる.

問題 2:	いつ (L, G, H) は proper になるか?

これについて既に知られている例を挙げてみよう.

Example 4. (1989; Kobayashi) G を reductive リー群, L, H を G の reductive な部分群としたとき

$$(L, G, H) \text{ が(CI)} \Leftrightarrow (L, G, H) \text{ が proper}$$

である.

ここで, (CI) は次のように定義される.

Definition 6. (1992; Kobayashi) G をリー群, L, H をその閉部分群としたとき, (L, G, H) が **(CI)** であるとは

G の任意の元 g に対して $L \cap gHg^{-1}$ がコンパクト

であることをいう.

Remark (CI) の定義は proper の定義において S を一点からなるコンパクト集合 $\{g\}$ としたものに他ならない. 従って「proper⇒(CI)」は常に成り立つ.

Example 5. (2001; Nasrin) G を単連結かつ連結な 2-step 巾ゼロリー群とし, L, H を G の連結閉部分群としたとき

$$\text{(CI)} \Leftrightarrow \text{proper} \qquad \text{for } (L, G, H)$$

である.

Example 6. (1992; Kobayashi) $G = GL(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$, $H = GL(2,\mathbb{R})$ とし, L を G の閉部分群としたとき,

$$\text{(CI)} \Leftrightarrow \text{proper} \qquad \text{for } (L, G, H)$$

である.

Auslander 予想 (Example 3) は, $G = GL(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$, $H = GL(n,\mathbb{R})$ のとき $\Gamma\backslash G/H$ が (compact な)Clifford-Klein form になる条件を調べる, という問題であった. そして Example 6 は, その" 連続版" の判定条件を $n = 2$ のときに与えたと言うことができる. この結果を拡張し, 一般の n に対して次のように予想するのは自然なことである.

$H = GL(n,\mathbb{R})$, $G = H \ltimes \mathbb{R}^n$, $L \subset G$ に対して「(CI)$\Leftrightarrow$ proper」か?

Lipsman はこの命題にさらに「L が代数的である」という条件を加えると, 次の命題と同値になることを証明した ([1]).

Example 7. (1995; Lipsman 予想) N を n 次元上三角行列全体 $N(n)$ とし, $G = N \ltimes \mathbb{R}^n$ とする. L を G の連結閉部分群とすると,

$$\text{(CI)} \Leftrightarrow \text{proper} \qquad \text{for } (L, G, H)$$

となるか?

一般に「(CI)$\Leftarrow$proper」は自明であるから, Lipsman 予想においては「(CI)$\Rightarrow$proper」の部分が重要である. この予想は, $n = 2$ のときは Example 6 から簡単な議論により分かる. $n = 3$ のときは Lipsman によって証明された ([1]). $n = 4$ のときに成り立つというのが今回の結果である.

proper という条件が(CI) という条件に帰着されることで, どれくらい判定が簡単になるのかを見るために例を挙げよう.

Example 8. $N = N(3)$, $G = N \ltimes \mathbb{R}^3$ として $X, Y \in \mathfrak{g}$ を次のように定める.

$$X = \left(\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & a \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad Y = \left(\begin{pmatrix} 0 & & b \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

ただし, ここで a, b は実数である. このとき $[X, Y] = 0$ である. さらに,

$$\Gamma = \Gamma_{a,b} := \{\exp(nX + mY) \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$
$$L = L_{a,b} := \{\exp(pX + qY) \mid p, q \in \mathbb{R}\}$$

とおくと, 次のような同値関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\Gamma\backslash G/H\text{が Clifford-Klein form になる} &\Leftrightarrow \Gamma \curvearrowright G/H \text{ が properly discontinuous}\\
&\Leftrightarrow L \curvearrowright G/H \text{ が proper}\\
&\Leftrightarrow (L,G,H) \text{ が proper}\\
&\Leftrightarrow (L,G,H) \text{ が(CI)}\\
&\Leftrightarrow ab<0
\end{aligned}$$

$n=4$ のときの Lipsman 予想の証明には次の 3 つの補題が使われる.

補題 1 は, ある"primitive" な L について示せば十分である事を主張する.

補題 2 は, (CI) のリー環での表現を与える.

補題 3 は, proper のリー環での表現を与える.

これらの補題は全て一般の n について証明されている. さらに $n=4$ のときは"primitive" かつ(CI) なものは 3 通りに場合分けされ, それらは全て proper であることが示される. 最後に primitive の定義と, 補題 2,3 のステートメントを述べて終わりにしよう.

Definition 7. $G(:=N\ltimes\mathbb{R}^n)$ の連結閉部分群 L が **primitive** であるとは, $\mathfrak{l}$ を L のリー環としたとき,

$$\text{任意の } (X,a)\in\mathfrak{l} \text{ に対し } a\in I_{\mathfrak{l}}$$

が成り立つことをいう. ただし, ここで $I_{\mathfrak{l}}$ は

$$I_{\mathfrak{l}} := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \bigcup_{(X,a)\in\mathfrak{l}} \mathrm{Image}(X:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n)$$

で定まる $\mathbb{R}^n$ の部分空間である.

Lemma 2. $\mathfrak{l}$ を L のリー環としたとき次は同値.

(i) (L,G,N) は(CI)

(ii) $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $V_{\mathfrak{l}}$ と線型写像 $\Phi : V_{\mathfrak{l}}\to\mathfrak{n}$ が存在して

$$\mathfrak{l}=\{(\Phi(a),a)\mid a\in V_{\mathfrak{l}}\}$$

とかける. さらに任意の $a\in V_{\mathfrak{l}}\setminus 0$ に対して

$$a\notin \mathrm{Image}(\Phi(a))$$

となる.

Lemma 3. $\mathfrak{l}$ を L のリー環とし, (L, G, N) が(CI)であったとする. さらに $\mathbb{R}^n$ の任意のコンパクト集合 S に対し $V_{(S)}$ がコンパクトならば (L, G, N) は固有である.

ここで, $V_{(S)}$ は

$$\begin{aligned}
V_{(S)} &:= \bigcup_{s_1, s_2 \in S} V_{(s_1, s_2)} \\
V_{(s_1, s_2)} &:= \{v \in V_{\mathfrak{l}} | s_1 + e_1(\Phi(v))v + e_0(\Phi(v))s_2 = 0\} \\
e_0(X) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \exp(X) \\
e_1(X) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

で定義される. ただし, $V_{\mathfrak{l}}, \Phi$ は Lemma 2 によって定められたものとする.

参考文献

[1] LIPSMAN, R., *Proper actions and a compactness condition*, J. Lie Theory. **5** (1995), 25-39.

[2] KOBAYASHI, T., *Discontinuous groups acting on h omogeneous spaces of reductive type*, Proceedings of the Conference on Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras held in 1990 August-September at Fuji- Kawaguchiko (ICM-90 Satellite Conference) (1992), World Scientific, Singapore/ New Jersey/London, 59-75.

[3] T.Kobayashi, H. Alikawa and S.Nasrin, Proper actions of $\mathbb{R}^k$ on a $(k+1)$-dimensional nilpotent homogeneous manifold (in preparation).

[4] Nasrin, Salma, Criterion of proper actions for 2-step nilpotent Lie groups, Tokyo J. Math. 24 (2001), 535–543.

[5] Kobayashi, Toshiyuki, Proper action on a homogeneous space of reductive type, Math. Ann. 285 (1989), 249–263.