

周期的 Stokes 流問題に対する基本解法

A Fundamental Solution Method for Periodic Stokes Flow Problems

愛媛大学工学部 緒方秀教 (Hidenori Ogata)

天野要 (Kaname Amano)

岡野大 (Dai Okano)

安田雄二 (Yuji Yasuda)

Faculty of Engineering, Ehime University

名古屋大学大学院工学研究科 杉原正顯 (Masaaki Sugihara)

Graduate School of Engineering, Nagoya University

概要

本論文では、周期的に並んだ障害物を過ぎる 3 次元 Stokes 流の問題に対する基本解法を提案する。この問題は数学的には Stokes 方程式の境界値問題として与えられるが、従来の基本解法でこの問題の近似解を与えるのは難しい。そこで本論文では、Hasimoto により提案された周期的基本解の 1 次結合を用いることにより、この問題の近似解を与える。さらに、障害物に働く力を基本解法のデータを用いて計算できることも示す。数値例では、球列を過ぎる流れに対する計算結果を示し、本論文で提案する方法が有効であることを示す。

1 はじめに

基本解法 (代用電荷法) [8, 9, 14] は偏微分方程式問題の数値解法のひとつである。この方法は、問題の近似解を偏微分作用素の基本解の 1 次結合を用いて表わすという方法であり、(i) プログラミングが簡単、(ii) 計算量が少ない、(iii) ある条件の下では高い精度を達成するという理由から、科学技術計算で広く用いられている。

本論文では、3 次元周期的に配置された障害物 (図 1) を過ぎる 3 次元 Stokes 流の問題を考え、この問題に対する基本解法を提案する。周期的に配置された障害物を過ぎる粘性流の問題は理論・応用の両面から重要であり、多くの研究がなされている。Hasimoto は Stokes 方程式の周期的基本解を提示し、周期的な球列を過ぎる Stokes 流の解析にそれを応用している [3]。また、その解析に対し Sangani と Acrivos が改良を行っている [13]。さらに、Zick と Homsy は Hasimoto の周期的基本解に基づき、周期的な球列を過ぎる Stokes 流の問題に対する積分方程式による解法を提案している [16]。Tamada と Fujikawa は円柱列を過ぎる 2 次元定常 Oseen 流の解析を行っている [15]。Liron は平板に平行な Stokes 源列、あるいは、管内の Stokes 源列による Stokes 流の解析を行い、鞭毛をもつ生物によって引き起こされる流れの解析に応用している [5, 6, 7]。

本論文で考える問題では、定常、非圧縮性の遅い (すなわち、Reynolds 数が低い) 流れを仮定し、流体全体に一様な力が働いているとする。したがって、流れは Stokes 方程式 (Navier-Stokes 方程式の線形近似のひとつ)

$$\mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (1)$$

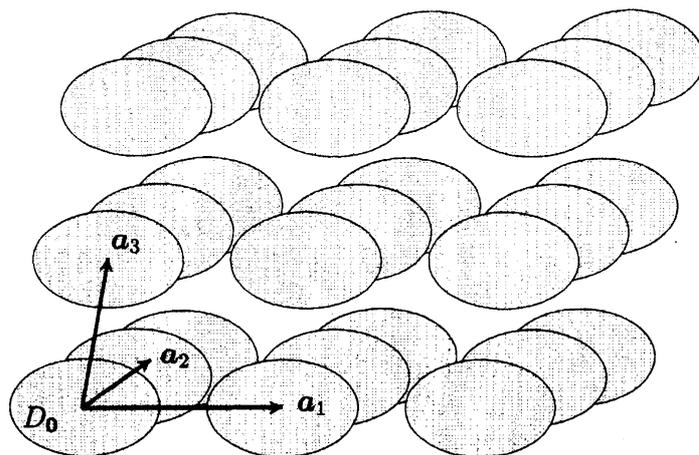


図 1: 3次元周期的に配置された障害物. ここで, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は障害物がなす格子の基本格子ベクトルである.

および連続方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

に従う. ここで, $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ は流速, $\mathbf{K}(K_1, K_2, K_3)$ は流体の単位体積あたりに働く力, μ は粘性係数である. 上の方程式の問題に基本解法を適用する場合, もっとも自然な方法は, Stokes 源 ([4] の §69 を参照) を用いる方法である. Stokes 源とは, 方程式

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p &= 4\pi\mu \mathbf{Q} \delta(\mathbf{x}), \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

($\mathbf{Q}(Q_1, Q_2, Q_3)$ は定数ベクトル) の解として与えられる流れであり, 具体的には

$$v_i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q_i}{|\mathbf{x}|} + \sum_{j=1}^3 Q_j \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^3} \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

$$p(\mathbf{x}) = -\mu \sum_{j=1}^3 \frac{Q_j x_j}{|\mathbf{x}|^3} \quad (4)$$

で与えられる. この Stokes 源の表式は, 3×3 行列

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} T_{11}(\mathbf{x}) & T_{12}(\mathbf{x}) & T_{13}(\mathbf{x}) \\ T_{21}(\mathbf{x}) & T_{22}(\mathbf{x}) & T_{23}(\mathbf{x}) \\ T_{31}(\mathbf{x}) & T_{32}(\mathbf{x}) & T_{33}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ T_{ij}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}|} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

(ここで, δ_{ij} は Kronecker のデルタ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ である), および, ベクトル

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mu \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

を用いると,

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Q}, \quad (5)$$

$$p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{Q} \quad (6)$$

と簡潔に表わされる. 物理的には, Stokes 源 (3), (4) あるいは (5), (6) は, 点 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ に働く点荷重 $-4\pi\mu\boldsymbol{Q}$ により引き起こされる流れを表わしている. この Stokes 源を基本解法に用いると, 問題の解は Stokes 源の 1 次結合, すなわち,

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{v}_N(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_0 + \sum_{j=1}^N \mathbf{T}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_j)\boldsymbol{Q}_j, \quad (7)$$

$$p(\boldsymbol{x}) \approx p_N(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}_j) \cdot \boldsymbol{Q}_j \quad (8)$$

で近似される. ここで, $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{Q}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) は後で適切に定められる定数ベクトル, $\boldsymbol{\xi}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) はユーザにより問題領域外部に与えられる点である. 物理的には, 近似解 (7), (8) は, 流れ \boldsymbol{v}_0 に点 $\boldsymbol{\xi}_j$ における点荷重 $-4\pi\mu\boldsymbol{Q}_j$ により引き起こされる流れを重ね合わせたものである. ここで, 近似解 $\boldsymbol{v}_N(\boldsymbol{x}), p(\boldsymbol{x})$ は問題領域で方程式 (1), (2) を厳密に満たすことに注意する. 境界条件は, 与えられた点 $\boldsymbol{\xi}_j$ に対し係数ベクトル \boldsymbol{Q}_j を適切に選ぶことにより, 近似的に満たされるようにする.

Stokes 源を用いた上記の近似は, 障害物が有限個であるような流れの問題に対して適用可能である. しかし, 我々の問題, すなわち, 周期的に並んだ無限個の障害物をもつ流れの問題に対しては適用が難しい. それは, 我々の問題の解は明らかに周期関数によって表わされるので, それを (7), (8) の形で近似するのは難しいからである. この困難を解決するため, “周期的基本解”, すなわち, 方程式

$$\mu\Delta\boldsymbol{v} - \nabla p = 4\pi\mu\boldsymbol{Q} \sum_{\boldsymbol{a}} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad (10)$$

の解として与えられる基本解を導入する. ここで, \boldsymbol{Q} は定数ベクトル, 方程式 (9) 右辺の和はすべての格子ベクトル \boldsymbol{a} についてとられる. この周期的基本解は Hasimoto により初めて提示され, 周期的に並んだ小球の列を過ぎる粘性流の解析に応用された [3]. 本論文では, この周期的基本解を用いて我々の問題に対する基本解法を構築する. すなわち, 我々の問題の解を周期的基本解の 1 次結合により近似する方法を構築する. この周期的基

本解の1次結合による近似解は厳密解と同じ周期関数であり、厳密解を高い精度で近似できると期待される。本論文で提案する方法は、周期的に並んだ障害物を持つ2次元 Stokes 流の問題に対し我々が提案した方法 [11] の3次元への拡張である。また、本論文の方法は周期的構造を持つ領域の数値等角写像に対し我々が提案した方法 [12] と同様のアイデアに基づいている。それは、周期的に並んだソースをもつ基本解の一次結合を用いて解を近似しているということである。

第2節では、議論に必要な記号の定義を行い、我々の問題を数学的に定式化する。第3節では、周期的基本解について簡単に説明し、これを用いて我々の問題に対する基本解法を構築する。さらに、基本解法で得られるデータを用いて、障害物が流体から受ける力を計算する公式を示す。第4節では、単純立方格子、体心立方格子、面心立方格子をなす球列を過ぎる流れの問題に対する数値例を示す。第5節では、本論文の総括を行い今後の課題について触れる。

2 問題の定式化

はじめに、いくつかの記号の定義をする。本論文を通して、実数全体の集合を \mathbb{R} 、整数全体の集合を \mathbb{Z} と記す。

障害物列の幾何学的構造を記述するために、固体物理学における結晶構造の理論で用いられている用語を用いる（詳しくは、例えば、Ashcroft-Mermin の教科書 [1] を参照すること）。障害物列がなす格子は、1次独立な3次元定数ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ によって張られるとする。すなわち、すべての障害物はある特定の障害物 D_0 を用いて

$$D_{\mathbf{a}} = \{ \mathbf{x} + \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \in D_0 \}$$

と表わされる。ここで、 $\mathbf{a}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ はいわゆる格子ベクトル

$$\mathbf{a} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3 \quad (n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z})$$

である。格子ベクトル全体の集合を \mathcal{L} と記す、すなわち、

$$\mathcal{L} = \{ n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3 \mid n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \}$$

とする。我々の問題に現われる流れの領域は、障害物列の外部

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathcal{L}} \overline{D_{\mathbf{a}}} \right\}$$

である。

さらに、いわゆる逆格子ベクトル

$$\mathbf{k} = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 + m_3 \mathbf{b}_3 \quad (m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z})$$

も導入する。ここで、 b_1, b_2, b_3 は a_1, a_2, a_3 と双直交系をなすベクトル、すなわち、関係

$$a_i \cdot b_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

を満たすベクトルである。逆格子ベクトル全体の集合を \mathcal{L}^* と記す、すなわち、

$$\mathcal{L}^* = \{ m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3 \mid m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z} \}$$

とする。

以上の準備のもと、我々が扱う問題は、Stokes 方程式・連続方程式に no-slip 境界条件を組み合わせた境界値問題

$$\mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{K} = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad (12)$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{on } \partial \mathcal{D} \quad (13)$$

で与えられる。

3 周期的基本解を用いた基本解法

我々の問題の解 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ は明らかに a_1, a_2, a_3 を周期とする周期関数である、すなわち、

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathcal{D}, \mathbf{a} \in \mathcal{L}) \quad (14)$$

を満たす。このような解に対し、従来の基本解法で近似解を与えるのは難しい。この周期関数解を近似するため、Hasimoto により提示された周期的基本解 [3] を用いた新しい基本解法を提案する。

Hasimoto による周期的基本解とは、方程式

$$\mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p = 4\pi\mu \mathbf{Q} \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{L}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

の解である。ここで、 $\mathbf{Q}(Q_1, Q_2, Q_3)$ は定数ベクトルである。この解は具体的に

$$v_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 Q_j \frac{\partial^2 S_2(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} - Q_i S_1(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (15)$$

$$p(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi\mu}{\tau_0} \sum_{j=1}^3 Q_j x_j + \mu \sum_{j=1}^3 Q_j \frac{\partial S_1(\mathbf{x})}{\partial x_j} \quad (16)$$

と表わされる。ここで、 $S_1(\mathbf{x}), S_2(\mathbf{x})$ は

$$S_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi\tau_0} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{L}^* \setminus \{0\}} \frac{e^{i2\pi\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2}, \quad S_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi^3\tau_0} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{L}^* \setminus \{0\}} \frac{e^{i2\pi\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^4} \quad (17)$$

で定義される関数であり, τ_0 は格子 \mathcal{L} の単位胞の体積, すなわち,

$$\tau_0 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$$

である. 3×3 行列

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} T_{11}(\mathbf{x}) & T_{12}(\mathbf{x}) & T_{13}(\mathbf{x}) \\ T_{21}(\mathbf{x}) & T_{22}(\mathbf{x}) & T_{23}(\mathbf{x}) \\ T_{31}(\mathbf{x}) & T_{32}(\mathbf{x}) & T_{33}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ T_{ij}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^2 S_2(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} S_1(\mathbf{x}) \quad (i, j = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (18)$$

および, ベクトル

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi\mu}{\tau_0} \mathbf{x} + \mu \nabla S_1(\mathbf{x}) \quad (19)$$

を用いると, 周期的基本解 (15), (16) は簡単に

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbb{T}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}, \quad (20)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{Q} \quad (21)$$

と表わされる. 物理的には, 周期的基本解 (15), (16) または (20), (21) は, 各格子点 $\mathbf{a} (\in \mathcal{L})$ に一様に働く点荷重 $-4\pi\mu\mathbf{Q}$ により引き起こされる流れを表わす. 式 (18), (19) 右辺の Fourier 級数は収束が遅いが, Ewald の方法 [2] を用いて収束を加速して計算することができる.

ここで話題をもとに戻し, 我々の問題に対し上記の周期的基本解を用いた基本解法を提案する. 問題 (11), (12), (13) の解を, 上記の周期的基本解の 1 次結合を用いて

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{v}_N(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0 + \sum_{j=1}^N \mathbb{T}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j) \mathbf{Q}_j, \quad (22)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{p}_N(\mathbf{x}) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} + \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j) \cdot \mathbf{Q}_j \quad (23)$$

と近似する. ここで, $\mathbf{v}_0 (v_{01}, v_{02}, v_{03})$, $\mathbf{Q}_j (Q_{j1}, Q_{j2}, Q_{j3})$ ($j = 1, 2, \dots, N$) は未知の定数ベクトルであり, $\boldsymbol{\xi}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) はユーザにより障害物 D_0 内部に与えられる点である. 物理的には, 近似解 (22), (23) は流れ \mathbf{v}_0 に格子点 $\boldsymbol{\xi}_j + \mathbf{a}$ における点荷重 $-4\pi\mu\mathbf{Q}_j$ により引き起こされる流れを重ね合わせて得られる流れを表わす. ここで, 近似解 (15), (16) は問題領域 \mathcal{D} で Stokes 方程式 (11), 連続方程式 (12) を厳密に満たし, さらに, 近似速度ベクトル $\mathbf{v}_N(\mathbf{x})$ は周期性 (14) を満たす周期関数であることに注意する.

境界条件 (13) は, 未知定数ベクトル \mathbf{v}_0 , \mathbf{Q}_j を適切に選ぶことにより近似的に満たされるようにする. 詳しく言うと, もとの境界条件の代わりに, “拘束条件” と呼ばれる条件

$$\mathbf{v}_N(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (24)$$

を課して未知定数ベクトル v_0, Q_j を決定する。ここで、 x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) はユーザにより境界 ∂D_0 上に与えられる点である。拘束条件 (24) は、 $v_N(x)$ の表式 (22) を用いて

$$v_0 + \sum_{j=1}^N T(x_i - \xi_j) Q_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (25)$$

と表わされる。

ところで、障害物が流体から受ける抵抗力 D は

$$D \approx D_N = 4\pi\mu \sum_{j=1}^N Q_j \quad (26)$$

と近似される。これは、次のように考えると理解できる。周期的基本解の流れ $T(x - \xi_j) Q_j$ は物理的には点 ξ_j に働く点荷重 $-4\pi\mu Q_j$ に起因し、作用・反作用の法則から点 ξ_j を含む障害物には力 $4\pi\mu Q_j$ が働く。一方、障害物には、流体に一樣に働く力 K に起因する力 $-(\text{vol } D_0) K$ ($\text{vol } D_0$ は障害物 D_0 の体積) が働く。この力は、 K が重力の場合、浮力に相当する。これら 2 つの力が障害物上で釣り合うことから、関係式

$$4\pi\mu \sum_{j=1}^N Q_j = (\text{vol } D_0) K \quad (27)$$

を得る。

関係式 (25), (27) は、未知数である v_0, Q_j の成分 (合計 $(3N+3)$ 個) に関する $(3N+3)$ 元連立 1 次方程式をなす。この連立方程式を解くことにより未知ベクトル v_0, Q_j が決定され、近似解 $v_N(x), p_N(x)$ を得る。

4 数値例

この節では、典型的な場合について数値例を示す。すべての計算は、Sun Blade 150 ワークステーションで倍精度計算で行った。プログラム言語は C を用いた。

問題領域は、下記の 3 種類の格子の上に配置された半径 $r (> 0)$ の球列の外部である。

1. 単純立方格子 (simple cubic lattice, S.C.L.)

$$\left. \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right\} = a \left\{ \begin{matrix} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \end{matrix} \right\}, \quad \left. \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a} \left\{ \begin{matrix} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \end{matrix} \right\} \quad (a > 2r),$$

2. 体心立方格子 (body-centered lattice, B.C.L.)

$$\left. \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right\} = \frac{a}{2} \left\{ \begin{matrix} (1, 1, -1) \\ (-1, 1, 1) \\ (1, -1, 1) \end{matrix} \right\}, \quad \left. \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a} \left\{ \begin{matrix} (1, 1, 0) \\ (0, 1, 1) \\ (1, 0, 1) \end{matrix} \right\} \quad \left(a > \frac{4}{\sqrt{3}} r \right),$$

3. 面心立方格子 (face-centered lattice, F.C.L.)

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{matrix} \right\} = \frac{a}{2} \left\{ \begin{matrix} (1, 1, 0) \\ (0, 1, 1) \\ (1, 0, 1) \end{matrix} \right\}, \quad \left. \begin{matrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a} \left\{ \begin{matrix} (1, 1, -1) \\ (-1, 1, 1) \\ (1, -1, 1) \end{matrix} \right\} \quad (a > 2\sqrt{2}r).$$

なお, すべての計算例について, 一様な力 \mathbf{K} を x_1 方向にとっている.

いまの場合, 平均流速

$$\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \frac{1}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{v}(\mathbf{x}) dx_2 dx_3$$

(x_1 座標は, 積分面 $-a/2 \leq x_2, x_3 \leq a/2$ がすべての球の外側に位置するようにとる) は明らかに x_1 方向を向いている, すなわち, $\bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 0$ である. 一方, 平均近似流速の x_1 成分

$$\bar{v}_{N1} = \frac{1}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} v_{N1}(\mathbf{x}) dx_2 dx_3 \quad (28)$$

($v_{N1}(\mathbf{x})$ は近似流速 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ の x_1 成分である) は定数ベクトル \mathbf{v}_0 の x_1 成分 v_{01} に等しい, すなわち, $\bar{v}_{N1} = v_{01}$ であることが示される. 実際, 平均近似流速の x_1 成分 \bar{v}_{N1} は,

$$\begin{aligned} \bar{v}_{N1} &= v_{01} + \frac{1}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^3 Q_{ji} \frac{\partial S_2(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j)}{\partial x_1 \partial x_i} - Q_{j1} S_1(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j) \right] dx_2 dx_3 \\ &= v_{01} + \frac{1}{\pi \tau_0} \sum_{j=1}^N \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{L}^* \setminus \{0\}} \frac{e^{-i2\pi \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}_j}}{|\mathbf{k}|^4} [-(k_2^2 + k_3^2) Q_{j1} + k_1 k_2 Q_{j2} + k_1 k_3 Q_{j3}] \\ &\quad \times \frac{1}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{i2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

と計算され, 単純立方格子・体心立方格子・面心立方格子に対しては

$$\frac{1}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{i2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx_2 dx_3 = 0 \quad \text{if } k_2 \neq 0 \text{ or } k_3 \neq 0$$

が成り立つことから, $\bar{v}_{N1} = v_{01}$ を得る. したがって, 平均流速は

$$\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1, 0, 0) \approx (v_{01}, 0, 0) \quad (29)$$

で近似される.

点 $\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_j$ は, 次に示す slice point method[10] により与える. はじめに整数 $n (> 3)$ を与えて,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{11} &= r(0, 0, 1), \quad \mathbf{x}_{n1} = r(0, 0, -1), \\ \mathbf{x}_{kl} &= r(\sin \theta_k \cos \varphi_{kl}, \sin \theta_k \sin \varphi_{kl}, \cos \theta_k) \quad (2 \leq k \leq n-1, 1 \leq l \leq n_k) \end{aligned}$$

とおく。ここで

$$\theta_k = \frac{\pi(k-1)}{n-1}, \quad n_k = \lfloor 2(n-1)\sin\theta_k + 0.5 \rfloor, \quad \varphi_{kl} = \frac{2\pi(l + (-1)^k/4)}{n_k}$$

である¹。次に、 \mathbf{x}_{kl} の添え字を付け直して点 \mathbf{x}_k とする。そして、 q を $0 < q < 1$ なる定数として、 $\xi_i = q\mathbf{x}_i$ とする。なお、定数 q はいまの場合、すべての数値例において $q = 0.1$ とおいている。

図2は、単純立方格子・体心立方格子・面心立方格子に配置された球列を過ぎる Stokes 流に対し、本論文の方法で計算された流速ベクトルを示している。なお、球の体積占有率

$$C = \frac{4\pi r^3/3}{\tau_0}$$

はすべての格子の場合について $C = (0.3)^3$ ととっている。

本論文の方法で得られる近似の誤差を見積もるため、値

$$\varepsilon = \max_{\mathbf{x} \in \partial D_0} \left\{ \frac{|v_N(\mathbf{x})|}{v_{\text{mean}}} \right\} \quad (30)$$

を計算した。ここで、 v_{mean} は平均流速の大きさであり、(29)から $v_{\text{mean}} \approx v_{01}$ により計算される。値 ε は、境界条件(13)がどのくらいの精度で満たされているかを示す。実際の計算では、式(30)右辺における ∂D_0 上の最大値は、乱数を用いて ∂D_0 上に1000個の点を配置し、それらの点における最大値を計算することにより求めている。表4は、球の体積占有率 $C = (0.1)^3, (0.5)^3$ の場合について、誤差評価 ε の点数 N に対する変化を示す。この表から、点数 N が増えるにしたがって誤差評価 ε は減衰し、さらに、 $C = (0.1)^3$ の場合、すなわち、球の半径が小さい場合誤差が小さいことが分かる。加えて、体積占有率 C と点数 N が同じであるとき、3種類の格子について誤差に大きな違いはないことも分かる。

我々はさらに、球が流体から受ける抵抗力 D について調べた。図3は、無次元化した抵抗力の大きさ $|D|/(6\pi\mu r v_{\text{mean}})$ を $C^{1/3}$ に対しプロットしたものである。表2は、 $|D|/(6\pi\mu r v_{\text{mean}})$ の $(C/C_{\text{max}})^{1/3}$ に対する変化を示したものである。ここで、 C_{max} は隣接する球が互いに接するときの体積占有率

$$C_{\text{max}} = \begin{cases} \pi/6 & (\text{単純立方格子}) \\ \sqrt{3}\pi/8 & (\text{体心立方格子}) \\ \sqrt{2}\pi/6 & (\text{面心立方格子}) \end{cases}$$

である。なお、表2には比較のため、Sangani-Acrivos[13]による結果も載せている。図3から、体積占有率 C が同じでかつ小さいとき、3種類の格子に対する値 $|D|/(6\pi\mu r v_{\text{mean}})$ にほとんど違いが見られないことが分かる。そして、表2から、我々の結果はSangani-Acrivosの結果とよく一致していることが分かる。さらに、球の半径 $r \rightarrow 0$ のとき、

$$|D| \sim 6\pi\mu r v_{\text{mean}}$$

が成り立っていることが分かる。これは、孤立した球に対するStokesの抵抗法則と一致する。

¹ここで、 $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表わす。

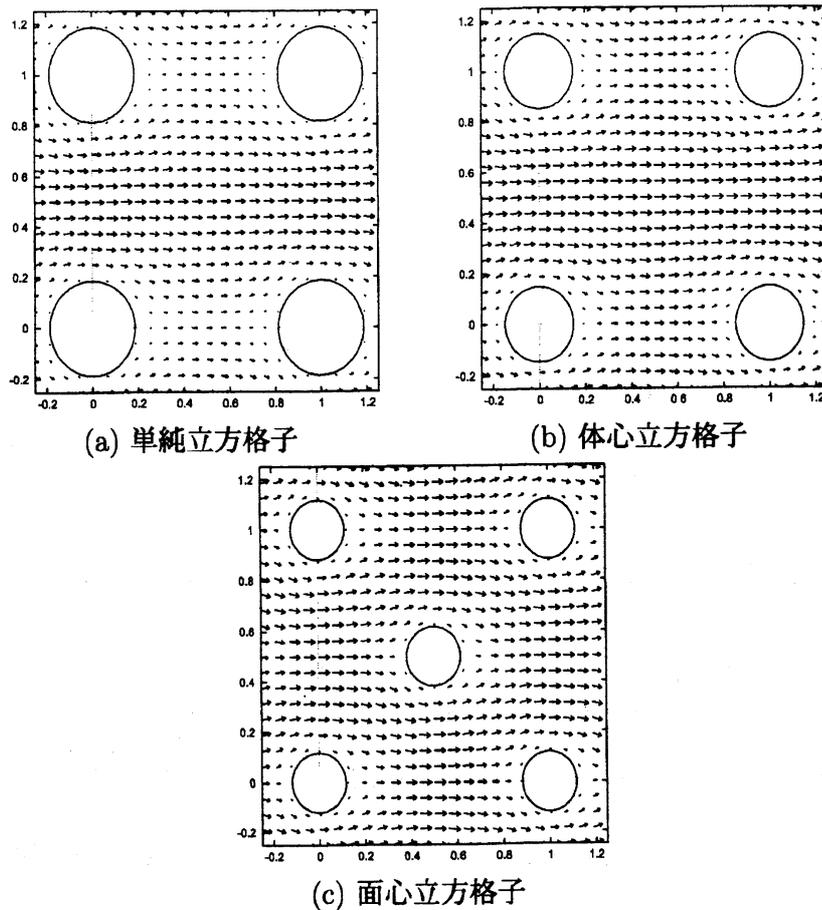


図 2: (a) 単純立方格子, (b) 体心立方格子, (c) 面心立方格子に配置された球列を過ぎる Stokes 流の流速ベクトルを面 $x_3 = 0$ に射影した図. いずれの図も, 球の体積占有率は $C = (0.3)^3$ にとっている.

5 まとめと今後の課題

本論文では, 周期的に配置された障害物を過ぎる 3次元 Stokes 流の問題に対する基本解法を提案した. この問題では解は周期関数を用いて表わされるので, 本論文で提案した方法では, 周期的基本解, すなわち, 周期的に並んだソースによる基本解の 1次結合により解を近似した. さらに, 基本解法で得られるデータを用いて, 障害物が流体から受ける抵抗力を計算する公式も示した.

典型的な格子をなす球列を過ぎる流れの問題に対し数値例を示し, その例では球の半径が小さい場合に我々の方法が高い精度を得ることが分かった. しかし, 球の半径が大きい場合, 我々の方法はあまり精度が高くないことも分かった. この場合について精度を改良することは, 将来の課題のひとつである. また, 球に働く抵抗力を計算し, その結果は先

表 1: 球の体積占有率 $C = (0.1)^3, (0.5)^3$ に対する誤差評価 ϵ および比 r/a .

N	$C = (0.1)^3$			$C = (0.5)^3$		
	S.C.L.	B.C.L.	F.C.L.	S.C.L.	B.C.L.	F.C.L.
	ϵ					
12	9.5E-2	9.1E-2	9.0E-2	1.8	5.0E-1	3.8E-1
34	9.4E-5	2.2E-4	2.1E-4	5.1E-2	1.4E-1	1.6E-1
64	1.3E-6	2.0E-6	1.8E-6	2.0E-2	2.3E-2	1.7E-2
106	3.3E-8	3.2E-9	2.3E-8	4.7E-3	1.9E-3	3.2E-3
156	2.9E-10	3.6E-10	2.2E-10	1.2E-3	6.0E-4	1.4E-4
214	1.9E-12	1.3E-12	6.1E-13	1.5E-4	2.5E-5	1.9E-5
288	3.5E-13	7.9E-13	2.0E-13	1.1E-4	1.1E-5	1.1E-5
	r/a					
	0.06203...	0.04924...	0.03909...	0.3101...	0.2462...	0.1954...

行研究と一致することも分かった。

本論文に関連して、次の問題が将来の課題として挙げられる。

1. 周期的に並ぶ障害物を過ぎる Oseen 流の問題に対し、基本解法による近似解を構成すること。
2. 実際の問題、例えば多孔質物体の中の流れの解析などへ、本研究を応用すること。

謝辞

この研究は日本学術振興会科学研究費補助金若手研究(B) (課題番号 14750054) の助成を受けている。

参考文献

- [1] Ashcroft, N. W. and Mermin, N. D.: Solid State Physics, Saunders College, Philadelphia (1976).
- [2] Ewald, P. P.: Die Berechnung Optischer und Elektrostatistischer Gitterpotentiale, Ann. Phys., Vol.64, pp.253-287 (1921).
- [3] Hasimoto, H.: On the Periodic Fundamental Solutions of the Stokes Equations and Their Application to Viscous Flow Past a Cubic Array of Spheres, J. Fluid Mech., Vol.5, pp.317-328 (1959).

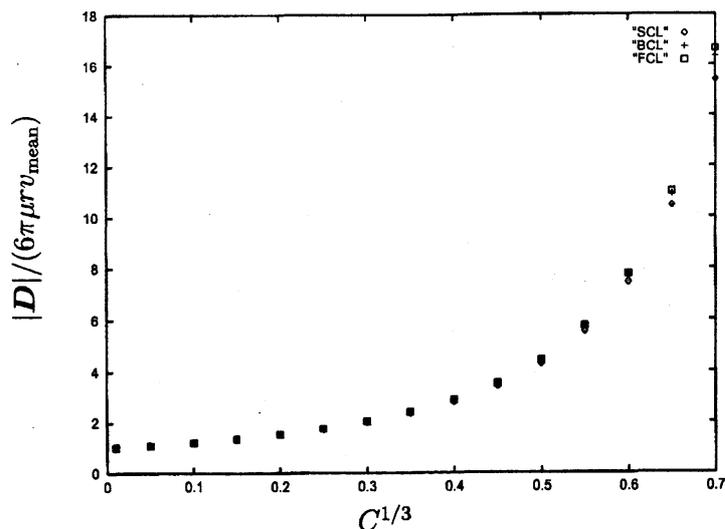


図 3: 球が流体から受ける（無次元化した）抵抗力と $C^{1/3}$ （ C は球の体積占有率）との関係。点数 N は $N = 106$ である。

- [4] 今井功：流体力学（前編），裳華房，東京（1973）。
- [5] Liron, N.: Fluid Transport by Cilia Between Parallel Plates, J. Fluid Mech., Vol.86, pp.705-726 (1978).
- [6] Liron, N.: Stokeslet Arrays in a Pipe and Their Application to Ciliary Transport, J. Fluid Mech., Vol.143, pp.173-195 (1984).
- [7] Liron, N.: Stokes Flow Due to Infinite Arrays of Stokeslets in Three Dimensions, J. Eng. Math., Vol.30, pp.267-297 (1996).
- [8] Murashima, S. and Kuhara, H.: An Approximate Method to Solve Two-Dimensional Laplace's Equation by Means of Superposition of Green's Functions on a Riemann Surface, J. Information Processing, Vol.3, pp.127-139 (1980).
- [9] 村島定行：代用電荷法とその応用，森北出版，東京（1983）。
- [10] Nishida, K.: Numerical Method for Oseen's Linearized Equations in Three-Dimensional Exterior Domains, J. Comput. Appl. Math., Vol.152, pp.405-409 (2003).
- [11] Ogata, H., Amano, K., Sugihara, M. and Okano, D.: A Fundamental Solution Method for Viscous Flow Problems with Obstacles in a Periodic Array, J. Comp. Appl. Math., Vol.152, pp.411-425 (2003).

表 2: 球が流体から受ける (無次元化した) 抵抗力の大きさ $|D|/(6\pi\mu r v_{\text{mean}})$ の $(C/C_{\text{max}})^{1/3}$ に対する変化, および, Sangani-Acrivos[13] による結果との比較. in their results. The number of points N in our method is taken to be $N = 106$.

$(C/C_{\text{max}})^{1/3}$	$ D /(6\pi\mu r v_{\text{mean}})$					
	our method			Sangani & Acrivos		
	S.C.L.	B.C.L.	F.C.L.	S.C.L.	B.C.L.	F.C.L.
0.001	1.0014	1.0016	1.0016			
0.01	1.0144	1.0160	1.0165			
0.1	1.1646	1.1861	1.1924	1.1646	1.1861	1.1924
0.2	1.3881	1.4487	1.4669	1.3881	1.4487	1.4669
0.3	1.6999	1.8331	1.8741	1.7000	1.8331	1.8741
0.4	2.1518	2.4234	2.5102	2.1518	2.4234	2.5103
0.5	2.8420	3.3886	3.5748	2.8420	3.3836	3.5748
0.6	3.9737	5.1082	5.5376	3.9738	5.1083	5.5376
0.7	6.0037	8.5648	9.7177	6.004	8.565	9.717

- [12] Ogata, H., Okano, D. and Amano, K.: Numerical Conformal Mapping of Periodic Structure Domains, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol.19, pp.257-275 (2002).
- [13] Sangani, A. S. and Acrivos, A.: Slow Flow Through a Periodic Array of Spheres, Int. J. Multiphase Flow, Vol.8, pp.343-360 (1982).
- [14] Singer, H., Steinbigler, H. and Weiss, P.: A Charge Simulation Method for the Calculation of High Voltage Fields, IEEE Trans. Power Apparatus Systems, PAS-93, pp.1660-1668 (1974).
- [15] Tamada, K. and Fujikawa, H.: The Steady Two-Dimensional Flow of Viscous Fluid at Low Reynolds Numbers Passing Through an Infinite Row of Equal Parallel Circular Cylinders, Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol.10, pp.425-432 (1957).
- [16] Zick, A. A. and Homsy, G. M.: Stokes Flow Through Periodic Arrays of Spheres, J. Fluid Mech., Vol.115, pp.13-26 (1982).