数理解析研究所講究録 1352 巻 2004 年 11-23

擬凸領域の部分多様体からの正則関数の接続について

長崎大学教育学部　安達謙三 (Kenzō Adachi)
Department of Mathematics, Faculty of Education,
Nagasaki University

1. 序

$\mathbf{C}^n$ の擬凸領域 D の部分多様体 M 上の正則関数が D 上の正則関数に拡張可能であることはよく知られている. ここでは M 上の正則関数である条件をみたすものが同様の条件をみたす D 上の正則関数に拡張可能かどうかという問題について解説する.

2. $\mathbf{C}^n$ の滑らかな境界をもつ強擬凸領域における部分多様体からの接続

$D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は滑らかな境界をもつ強擬凸領域とする. X は $\overline{D}$ の近傍における部分多様体で, ∂D と横断的に交わるとする. $M = X \cap D$ とする. このとき, 次の定理が成立する.

定理 1(Henkin[10]) 線形作用素 $E : H^\infty(M) \to H^\infty(D)$ で, $E(f)|_M = f$ をみたすものが存在する. さらに, f が $\overline{M}$ で連続ならば, $E(f)$ は $\overline{D}$ で連続になる.

定理 2(Adachi[1], Elgueta[9]) 定理 1 において, $f \in \mathcal{O}(M) \cap C^\infty(\overline{M})$ ならば $Ef \in \mathcal{O}(M) \cap C^\infty(\overline{D})$ が成立する.

$D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は滑らかな境界をもつ強擬凸領域とする. X は $\overline{D}$ の近傍における部分多様体で, ∂D と横断的に交わるとする. $M = X \cap D$ とする.

$$\delta_M(z) = \mathrm{dist}(z, \partial M)$$

$$A^p_s(M) = \{f \in \mathcal{O}(M) \mid \int_M |f|^p \delta^s_M dV_M < \infty\} \quad (0 < p \leq \infty,\ s > -1)$$

$$A^p_{-1}(M) = H^p(M) \text{ (Hardy class)}$$

と定義する. このとき, 次が成立する.

定理 3(Cumenge[6], Beatrous[4]) 線形作用素

$$E : A^p_{n-m+s}(M) \to A^p_s(D) \qquad (s \geq -1)$$

で, $Ef|_M = f$ をみたすものが存在する. ここで, $m = \dim_{\mathbf{C}} M$ である.

3. L^2 接続

定理 4(大沢・竹腰の定理 [12]) D は $\mathbf{C}^n$ の有界擬凸領域とする．φ は D 上の多重劣調和関数で，H は複素超平面とする．すると，$D \cap H$ で正則な関数 f に対して，D 上の正則関数 F が存在して，$D \cap H$ 上で $F = f$ をみたし，さらに

$$\int_D |F|^2 e^{-\varphi} dV \leq C_D \int_{D\cap H} |f|^2 e^{-\varphi} dV'$$

が成立する．ここで，dV, dV' はそれぞれ，$\mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}^{n-1}$ におけるルベーグ測度である．

注意 1(Siu[15])
$D \subset \{|z_n| < A\}$ のとき

$$C_D = \frac{64}{9} A^2 \pi \left(1 + \frac{1}{4e}\right)^{1/2}$$

としてよい．

定理 5(Berndtsson[5]) D は $\mathbf{C}^n$ の有界擬凸領域とする．φ は D 上の多重劣調和関数とする．h は D で正則で，$|h| \leq 1$ とする．$V = \{z \in D \mid h(z) = 0\}$ とする．すると，V で正則な関数 f に対して，D 上の正則関数 F が存在して，V 上で $F = f$ をみたし，さらに

$$\int_D |F|^2 e^{-\varphi} dV \leq 4\pi \int_V |f|^2 \frac{e^{-\varphi}}{|\partial h|^2} dV'$$

が成立する．

L^p $(p > 2)$ 接続に関する反例 (Diederich-Mazzilli[7])

n, p は自然数で，$n \geq 2p + 1$ とする．自然数 $N \geq 2$ に対して

$$D = \{z \in \mathbf{C}^n \mid \sum_{j=1}^{p} |z_j|^{2^{N+1}} + \sum_{j=p+1}^{2p+1} |z_j|^2 - 1 = \rho(z) < 0\}$$

$$M = \{z \in D \mid z_1^N + z_{p+1} = \cdots = z_p^N + z_{2p} = 0\}$$

$$f(z) = \frac{z_1^{N-1} \cdots z_p^{N-1}}{(1 - z_n)^{\frac{p(N-1)}{2N} + \frac{2}{q}}}$$

とおく．f は M 上の有界正則関数になる．D 上の正則関数 g で，

$$g|_M = f, \quad g \in L^q(D), \quad q > \frac{2 + \frac{4}{p} + 2^{-N+1}}{1 - \frac{1}{N} - \frac{N-1}{2^N}}$$

をみたす g は存在しないことを Diederich-Mazzilli[7] は証明した．$\varepsilon > 0$ に対して，p と N を十分大きくとると，D 上の正則関数 g で，M 上で $g = f$ となり，$g \in L^{2+\varepsilon}(D)$ となるものは存在しない．

強擬凸領域以外の領域の部分多様体からの有界正則関数の接続に関する例

定理 6(Diederich-Mazzilli[8]) $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は滑らかな境界をもつ有限型の凸領域 (convex domain of finite type) とする. V は $\mathbf{C}^n$ のアフィン線形部分空間とする. $M = D \cap V$ とする. すると, 線形作用素 $E : H^\infty(M) \to H^\infty(D)$ で, $E(f)|_M = f$ をみたすものが存在する.

4. $\mathbf{C}^n$ の滑らかでない境界をもつ強擬凸領域の部分多様体上の L^p $(1 \le p \le \infty)$ 正則関数の接続

定義 D は $\mathbf{C}^n$ の有界開集合とする. C^1 級写像

$$w = (w_1, \cdots, w_n) : D \times \partial D \to \mathbf{C}^n$$

が D に対する Leray 写像であるとは

$$< w(z,\zeta), \zeta - z >:= \sum_{j=1}^{n} w_j(z,\zeta)(\zeta_j - z_j) \neq 0 \qquad ((z,\zeta) \in D \times \partial D)$$

が成立することである.

$w(z,\zeta)$ は D に対する Leray 写像とする. D は C^1 級境界をもつとする.

$$\omega'_\zeta(w(z,\zeta)) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} w_j(z,\zeta) \bigwedge_{k \neq j} \bar{\partial}_\zeta w_k(z,\zeta)$$

と定義する. f は ∂D 上の L^1 関数とする. このとき

$$(1) \qquad (L_{\partial D} f)(z) := \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \frac{\omega'_\zeta(w(z,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{< w(z,\zeta), \zeta - z >^n} \qquad (z \in D)$$

と定義する. ここで, $\omega(\zeta) = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$ である. このとき, 次の定理が成立する (Henkin-Leiterer[11] 1.10.1).

定理 7(Leray の積分公式) $D \subset \mathbf{C}^n$ は C^1 級境界をもつ有界領域とする. $w(z,\zeta)$ は D に対する Leray 写像とする. f は D で正則, $\overline{D}$ において連続な関数とする. すると

$$f(z) = (L_{\partial D} f)(z) \qquad (z \in D)$$

が成立する.

強擬凸領域における Leray 写像を作るために次の定理 8 と定理 9 を証明する (Range[13] V 定理 2.5 参照).

定理 8 $G \subset\subset \mathbf{C}^n$ は擬凸領域とする. $K \subset G$ はコンパクト集合とする. すると, 次の条件 (i) ~ (v) をみたす K の近傍 V_0, V と $V_0 \times \partial V$ で C^∞ 級関数 $\Phi(z,\zeta)$ が存在する.

(i) $V_0 \subset\subset V \subset\subset G$.
(ii) V は滑らかな境界をもつ.
(iii) $\Phi(z,\zeta)$ は z について正則である.
(iv) $\Phi(z,\zeta) \neq 0$ $((z,\zeta) \in V_0 \times \partial V)$.
(v) $V_0 \times \partial V$ で C^∞ 級で, z について正則な関数 $w_j(z,\zeta)$ が存在して

$$\Phi(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{n} w_j(z,\zeta)(\zeta_j - z_j)$$

が成立する.

証明 $K = \widehat{K}_G^{\mathcal{O}}$ と仮定してよい. $\omega \subset\subset G$ を K の近傍とする. K の解析的多面体による基本近傍系が存在するから, $h_k \in \mathcal{O}(G)$ $(1 \le k \le N)$ が存在して,

$$A = \{z \in \omega \mid |h_k(z)| < 1, k = 1, \cdots, N\}$$

とするとき, $K \subset A \subset\subset \omega$ が成立する. Δ^N を $\mathbf{C}^N$ における単位多重円板とする. $H = (h_1, \cdots, h_N) : G \to \Delta^N$ とする. $H(K)$ は Δ^N のコンパクト部分集合であるから, $H(K)$ の凸近傍 U で, ∂U は滑らかで, かつ $U \subset\subset \Delta^N$ となるものが存在する. $U = \{t \in \Delta^N \mid \rho(t) < 0\}$ とする. すると

$$< \partial\rho(\eta), \eta - t > \neq 0 \qquad ((t,\eta) \in U \times \partial U$$

が成立する. したがって, $\Phi : A \times A \to \mathbf{C}$ を

$$\Phi(z,\zeta) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial\rho}{\partial\eta_k}(H(\zeta))(h_k(\zeta) - h_k(z))$$

によって定義すると, $\zeta \in (H|_A)^{-1}(\partial U)$, $z \in K$ のとき $\Phi(z,\zeta) \neq 0$ となる. 連続性より, K の近傍 $V_0 \subset\subset V \subset\subset A$ が存在して, V は滑らかな境界をもち,

$$\Phi(z,\zeta) \neq 0 \qquad (z,\zeta) \in V_0 \times \partial V$$

が成立する. Hefer の定理より, $Q_{j,k} \in \mathcal{O}(G \times G)$ が存在して

$$h_k(\zeta) - h_k(z) = \sum_{j=1}^{n} Q_{jk}(z,\zeta)(\zeta_j - z_j)$$

と表される.

$$w_j(z,\zeta) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial\rho}{\partial\eta_k}(H(\zeta))Q_{jk}(z,\zeta) \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

とおくと

$$\Phi(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{n} w_j(z,\zeta)(\zeta_j - z_j)$$

が成立する．したがって，定理8は証明された．

$V_0, V, w_j(z,\zeta)$ $(j=1,\cdots,n)$ は定理8におけるものとする．f は $\overline{V}$ 上の有界 (0,1)-形式とする．$z \in V$ に対して

$$(B_V f)(z) := \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \wedge \frac{\omega'_\zeta(\bar\zeta - \bar z) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}$$

と定義する．ここで

$$\omega(\zeta) := d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n, \quad \omega'_\zeta(\bar\zeta - \bar z) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} (\bar\zeta_j - \bar z_j) \bigwedge_{k \neq j} d\bar\zeta_k$$

とする．

$$\eta(z,\zeta,\lambda) := (1-\lambda) \frac{w(z,\zeta)}{< w(z,\zeta), \zeta - z >} + \lambda \frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}$$

$$(z \in V_0,\ 1 \le \lambda \le 1,\ \zeta \in \partial V)$$

$$\omega'_{\zeta,\lambda}(\eta(z,\zeta,\lambda)) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \eta_j(z,\zeta,\lambda) \bigwedge_{k \neq j} d_{\zeta,\lambda} \eta_k(z,\zeta,\lambda)$$

と定義する．ここで，$\eta(z,\zeta,\lambda) := (\eta_1(z,\zeta,\lambda), \cdots, \eta_n(z,\zeta,\lambda))$ で，$d_{\zeta,\lambda} := d_\zeta + d_\lambda$ である．∂V 上の有界な $(0,1)$ 形式 f に対して

$$(R_{\partial V} f)(z) := \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\substack{\zeta \in \partial V \\ 0 \le \lambda \le 1}} f(\zeta) \wedge \omega'_{\zeta,\lambda}(\eta(z,\zeta,\lambda)) \wedge \omega(\zeta) \qquad (z \in V_0)$$

と定義する．このとき，次の定理が成立する．

定理 9 $G \subset\subset \mathbf{C}^n$ は擬凸領域とする．$K \subset G$ はコンパクト集合とする．すると，K の近傍 V_0, V $(V_0 \subset\subset V \subset\subset G)$ と，連続線形作用素 $T : C^k_{(0,1)}(\overline{V}) \to C^k(V_0)$ $(k = 0,1,2,\cdots)$ が存在して，$f \in C^k_{(0,1)}(\overline{V})$, V 上で $\bar\partial f = 0$ ならば，V_0 上で $\bar\partial T(f) = f$ が成立する．

証明 定理8における $w(z,\zeta) = (w_1(z,\zeta), \cdots, w_n(z,\zeta))$ を Koppelman-Leray の積分公式 (Henkin-Leiterer[11], 1.12.1) に適用する．$f \in C^k_{(0,1)}(\overline{V})$, $\bar\partial f = 0$ のとき，$T = -(R_{\partial V} + B_V)$ とおくと

$$f(z) = (\bar\partial T(f))(z) \qquad (z \in V_0)$$

となるから，定理9は成立する．

D は $\mathbf{C}^n$ 内の滑らかでない境界をもつ強擬凸領域とする．すると，∂D の近傍 U と，$\overline{U}$ において C^2 級強多重劣調和な関数 ρ が存在して

$$D \cap U = \{z \in U_1\ : \rho(z) < 0\}$$

と表される.

$\overline{U}$ で C^1 級の関数 a_{jk} が存在して

$$F(z,\zeta) = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_j}(\zeta)(\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k)$$

とおくと

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{Re}F(z,\zeta) \geq \rho(\zeta) - \rho(z) + \beta|\zeta - z|^2 \quad (\zeta, z \in \overline{U}, |\zeta - z| \leq 2\varepsilon)$$

が成立する.

次の定理 10 は Henkin-Leiterer([11], 3.1.1) によって証明されているが, 強擬凸領域上の積分公式を作るために決定的な役割を果たすので証明を付けることにする.

定理 10(Henkin-Leiterer[11]) $\overline{D}$ の近傍 $U_{\overline{D}}$ と ∂D の近傍 U_2 $(U_2 \subset\subset U_1)$, および $U_{\overline{D}} \times U_2$ において C^1 級の関数 $\Phi(z,\zeta)$ と $\tilde{\Phi}(z,\zeta)$ が存在して次が成立する.

(i) $\Phi(z,\zeta)$ は $U_{\overline{D}} \times U_2$ において C^1 級である.
(ii) $\Phi(z,\zeta)$ は $z \in U_{\overline{D}}$ について正則である.
(iii) $(z,\zeta) \in U_{\overline{D}} \times U_2$, $|\zeta - z| \geq \varepsilon$ に対して, $\Phi(z,\zeta) \neq 0$.
(iv) $U_{\overline{D}} \times U_2$ において C^1 級関数 $M(z,\zeta) \neq 0$ が存在して

$$\Phi(z,\zeta) = F(z,\zeta)M(z,\zeta) \qquad ((z,\zeta) \in U_{\overline{D}} \times U_2,\ |\zeta - z| \leq \varepsilon)$$

が成立する.

(v) C^1 級写像 $w = (w_1, \cdots, w_n) : U_{\overline{D}} \times U_2 \to \mathbf{C}^n$ が存在して

$$\Phi(z,\zeta) = < w(z,\zeta), \zeta - z >$$

が成り立つ.

(vi) $\tilde{\Phi}(z,\zeta)$ は $U_{\overline{D}} \times U_2$ において C^1 級である.
(vii) $\tilde{\Phi}(z,\zeta)$ は $z \in U_{\overline{D}}$ について正則である.
(viii) $(z,\zeta) \in U_{\overline{D}} \times U_2$, $|\zeta - z| \geq \varepsilon$ に対して, $\tilde{\Phi}(z,\zeta) \neq 0$.
(ix) $U_{\overline{D}} \times U_2$ において C^1 級関数 $\widetilde{M}(z,\zeta) \neq 0$ が存在して

$$\tilde{\Phi}(z,\zeta) = (F(z,\zeta) - 2\rho(\zeta))\widetilde{M}(z,\zeta) \qquad ((z,\zeta) \in U_{\overline{D}} \times U_2,\ |\zeta - z| \leq \varepsilon)$$

が成立する.

(x) $\zeta \in \partial D$ のとき, $\tilde{\Phi}(z,\zeta) = \Phi(z,\zeta)$.

証明 ε を十分小さくとると, $\zeta \in \partial D$ に対して

$$\{z \in \mathbf{C}^n \mid |\zeta - z| \leq 3\varepsilon\} \subset U$$

が成立する. $\varepsilon \leq |\zeta - z| \leq 2\varepsilon$ に対して, (2) より

$$\operatorname{Re} F(z,\zeta) \geq \rho(\zeta) - \rho(z) + \beta\varepsilon^2 \qquad (\zeta, z \in U)$$

が成立する. ∂D の近傍 $U_1 \subset U$ を十分小さくとると, $\zeta \in U_1$ に対して, $|\rho(\zeta)| \leq \beta\varepsilon^2/3$ が成立し, かつ, $\zeta \in U_1$ に対して $\{z \mid |z-\zeta| \leq 2\varepsilon\} \subset U$ が成立する. $V_{\overline{D}} = D \cup U_1$ とおく. すると, $(z,\zeta) \in V_{\overline{D}} \times U_1$, $|z-\zeta| \leq 2\varepsilon$ に対して, $z, \zeta \in U$ かつ

$$\operatorname{Re} F(z,\zeta) \geq \frac{\beta\varepsilon^2}{3} \qquad (\varepsilon \leq |\zeta - z| \leq 2\varepsilon,\ (z,\zeta) \in V_{\overline{D}} \times U_1)$$

したがって, $\varepsilon \leq |\zeta - z| \leq 2\varepsilon$, $(z,\zeta) \in V_{\overline{D}} \times U_1$ に対して, $\log F(z,\zeta)$ が定義される. $\chi \in C^\infty(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n)$ は $0 \leq \chi \leq 1$ で, つぎの条件をみたすとする.

$$\chi(z,\zeta) = \begin{cases} 1 & (|\zeta - z| \leq 5\varepsilon/4) \\ 0 & (|\zeta - z| \geq 7\varepsilon/4) \end{cases}$$

$(z,\zeta) \in V_{\overline{D}} \times U_1$ に対して

$$f(z,\zeta) = \begin{cases} \bar{\partial}_z[\chi(\zeta - z)\log F(z,\zeta)] & (\varepsilon \leq |\zeta - z| \leq 2\varepsilon) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定義すると $f \in C^1_{(0,1)}(V_{\overline{D}} \times U_1)$ かつ $\bar{\partial}_z f = 0$ が成立する. 定理 9 より, ∂D の近傍 U_2 ($U_2 \subset\subset U_1$) が存在して, $U_{\overline{D}} = D \cup U_2$ とおくと, 連続線形作用素 T_1 : $C^1_{(0,1)}(V_{\overline{D}}) \to C^1(U_{\overline{D}})$ が存在して, $z \in U_{\overline{D}}$ のとき, $\bar{\partial}_z T(f(\cdot,\zeta))(z) = f(z,\zeta)$ が成立する. $u(z,\zeta) = T(f(\cdot,\zeta))(z)$ とおくと, $u \in C^1(U_{\overline{D}} \times U_2)$ で, $\bar{\partial}_z u = f$ が成立する. $(z,\zeta) \in U_{\overline{D}} \times U_2$ に対して

$$\begin{aligned} M(z,\zeta) &= e^{-u(z,\zeta)}, \\ \Phi(z,\zeta) &= \begin{cases} F(z,\zeta)M(z,\zeta) & (|\zeta - z| \leq \varepsilon) \\ \exp[\chi(\zeta - z)\log F(z,\zeta) - u(z,\zeta)] & (|\zeta - z| \geq \varepsilon) \end{cases} \end{aligned}$$

と定義する. (i) は $u(z,\zeta)$ が $U_{\overline{D}} \times U_2$ において C^1 級であることから成り立つ. (ii) は $|z-\zeta| \leq \varepsilon$ のときは

$$\bar{\partial}_z \Phi(z,\zeta) = F(z,\zeta)e^{-u}\bar{\partial}_z(-u) = -F(z,\zeta)e^{-u}f = 0$$

$\varepsilon \leq |z-\zeta| \leq 2\varepsilon$ のときは

$$\bar{\partial}_z \Phi(z,\zeta) = \exp[\chi(\zeta - z)\log F(z,\zeta) - u(z,\zeta)]\bar{\partial}_z\{\chi(\zeta - z)\log F(z,\zeta) - u(z,\zeta)\} = 0$$

$2\varepsilon \leq |z-\zeta|$ のときは

$$\bar{\partial}_z \Phi(z,\zeta) = e^{-u}\bar{\partial}_z(-u(z,\zeta)) = -e^{-u}f = 0$$

となり, $\Phi(z,\zeta)$ は z に関して正則である. (iii), (iv) は $\Phi(z,\zeta)$ の定義から明らかである. (v) は Hefer の定理から成立する. (2) より, $(z,\zeta)\in U_{\overline{D}}\times U_1$, $\varepsilon\le|\zeta-z|\le 2\varepsilon$ に対して

$$\operatorname{Re}F(z,\zeta)-2\rho(\zeta)\ge-\rho(\zeta)-\rho(z)+\beta|\zeta-z|^2\ge\frac{\beta\varepsilon^2}{3}$$

が成立する. したがって, $(z,\zeta)\in U_{\overline{D}}\times U_2$, $\varepsilon\le|\zeta-z|\le 2\varepsilon$ に対して, $\log(F(z,\zeta)-2\rho(\zeta))$ が定義される. $(z,\zeta)\in U_{\overline{D}}\times U_2$ に対して

$$\tilde{f}(z,\zeta)=\begin{cases}\bar{\partial}_z[\chi(\zeta-z)\log(F(z,\zeta)-2\rho(\zeta))] & (\varepsilon\le|\zeta-z|\le 2\varepsilon)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

と定義すると, $\bar{\partial}_z\tilde{f}=0$ となるから, $U_{\overline{D}}\times U_2$ において C^1 級関数 $\tilde{u}(z,\zeta)$ が存在して, $\bar{\partial}_z\tilde{u}=\tilde{f}$ が成立する. 特に, $\zeta\in\partial D$ のときは, $\tilde{f}(z,\zeta)=f(z,\zeta)$ となるから, $\tilde{u}(z,\zeta)=u(z,\zeta)$ $(\zeta\in\partial D)$ としてよい.

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(z,\zeta) &= e^{-\tilde{u}(z,\zeta)},\\ \widetilde{\Phi}(z,\zeta) &= \begin{cases}(F(z,\zeta)-2\rho(\zeta))\widetilde{M}(z,\zeta) & (|\zeta-z|\le\varepsilon)\\ \exp(\chi(\zeta-z)\log(F(z,\zeta)-2\rho(\zeta))-\tilde{u}(z,\zeta)) & (|\zeta-z|\ge\varepsilon)\end{cases}\end{aligned}$$

と定義すると同様にして (vi), (vii), (viii), (ix), (x) が成立する. したがって, 定理 10 は証明された.

$\varepsilon_0>0$ を, $\{\zeta\in U_1\mid|\rho(\zeta)|<2\varepsilon_0\}\subset\subset U_2$ となるようにとる. $\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{C}^n)$ を, $0\le\varphi\le 1$ をみたし, $\zeta\in U_1$, $\rho(\zeta)\ge-\varepsilon_0$ のとき $\varphi(\zeta)=1$, $\zeta\in(D-U_1)\cup\{\zeta\in U_1\mid\rho(\zeta)\le-2\varepsilon_0\}$ のとき, $\varphi(\zeta)=0$ となるようにとる.

$$\omega_\zeta\left(\frac{\varphi(\zeta)w(z,\zeta)}{\widetilde{\Phi}(z,\zeta)}\right)=\bigwedge_{j=1}^{n}d_\zeta\left(\frac{\varphi(\zeta)w_j(z,\zeta)}{\widetilde{\Phi}(z,\zeta)}\right)\tag{3}$$

と定義すると, $\widetilde{\Phi}(z,\zeta)$ の性質 (ix) より, (3) は $(z,\zeta)\in D\times\overline{D}$ において連続である. D 上の L^1 関数 f に対して

$$L_Df(z)=\frac{n!}{(2\pi i)^n}\int_D f(\zeta)\omega_\zeta\left(\frac{\varphi(\zeta)w(z,\zeta)}{\widetilde{\Phi}(z,\zeta)}\right)\wedge\omega(\zeta)\qquad(z\in D)$$

と定義する. 定理 8 より, $w(z,\zeta)$, $\widetilde{\Phi}(z,\zeta)$ は z について正則であるから, L_Df は D において正則である.

定理 11 $D\subset\subset\mathbf{C}^n$ は滑らかでない境界をもつ強擬凸領域とする. f は D において正則で, $f\in L^1(D)$ とする. すると

$$f(z)=L_Df(z)$$

が成立する.

証明 証明の概要を述べる. Morseの補題から$\mathbf{C}^n$における実数値一次関数φ_mで, $\overline{W}$で$|\varphi_m| < 1/m$をみたし, かつ, $d(\rho+\varphi_m)(\zeta) = 0$をみたす$\zeta \in \overline{W}$は有限個しか存在しないようなものが存在する. したがって, ε_mを

$$\frac{1}{m} < \varepsilon_m < \frac{2}{m}, \quad d(\rho+\varphi_m)(\zeta) \neq 0 \ (\zeta \in \overline{W}, \rho(\zeta)+\varphi_m(\zeta) = -\varepsilon_m)$$

をみたすようにとることができる.

$$\rho_m(\zeta) := \rho(\zeta) + \varphi_m(\zeta) + \varepsilon_m$$

$$D_m := (D - W) \cup \{z \in W \mid \rho_m(z) < 0\}$$

とおくと, 次の(a),(b),(c)が成り立つ.

(a) $d\rho_m(z) \neq 0 \ (z \in \partial D_m)$
(b) $D_m \subset\subset D$
(c) 任意のコンパクト集合$K \subset D$に対して, 整数m_Kが存在して, $m \geq m_K$ならば$K \subset D_m$が成立する.

D_mに対するΦ_m, $\tilde{\Phi}_m$, w_mを定理10におけるように作ると, Lerayの積分公式(定理7)より

$$f(z) = (L_{\partial D_m} f)(z) \qquad (z \in D_m)$$

が成立する. Stokesの定理より

$$f(z) = (L_{D_m} f)(z) \qquad (z \in D_m)$$

となるから, $m \to \infty$とすることにより定理11は成立する.

次の記号を用いる.

$$X = \{z \in \mathbf{C}^n \mid z_n = 0\}$$

$\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n$に対して, $\zeta' = (\zeta_1, \cdots, \zeta_{n-1})$と定義する. さらに

$$\partial_{\zeta'} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} d\zeta_j, \quad \bar{\partial}_{\zeta'} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} d\bar{\zeta}_j$$

$$d_{\zeta'} = \bar{\partial}_{\zeta'} + \partial_{\zeta'}, \quad \omega_{\zeta'}(\zeta) = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_{n-1}$$

$$(w'(z,\zeta)) = (w_1(z,\zeta), \cdots, w_{n-1}(z,\zeta))$$

と定義する. ここで, $w(z,\zeta) = (w_1(z,\zeta), \cdots, w_n(z,\zeta))$は定理10におけるものとする. $\varepsilon_0 > 0$を, $\{\zeta \in U \mid |\rho(\zeta)| < 2\varepsilon_0\} \subset\subset U_2$となるようにとる. $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{C}^n)$を, $0 \leq \chi \leq 1$をみたし, $\zeta \in U$, $\rho(\zeta) \geq -\varepsilon_0$のとき$\chi(\zeta) = 1$, $\zeta \in (D-U) \cup \{\zeta \in U \mid \rho(\zeta) \leq -2\varepsilon_0\}$のとき, $\chi(\zeta) = 0$となるようにとる.

$$\omega_{\zeta'}\left(\frac{\chi(\zeta)(w(z,\zeta))'}{\tilde{\Phi}(z,\zeta)}\right) = \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bar{\partial}_{\zeta'}\left(\frac{\chi(\zeta)w_j(z,\zeta)}{\tilde{\Phi}(z,\zeta)}\right)$$

と定義する．定理 10 より，$\partial D\backslash X$ の開近傍 $U_{\partial D\backslash X}$ が存在して

$$\tilde{\Phi}(z,\zeta) \neq 0 \qquad (\zeta \in X \cap \overline{D},\ z \in D \cup U_{\partial D\backslash X})$$

が成立する．

$X \cap D$ 上の正則関数 f と $z \in D \cup U_{\partial D\backslash X}$ に対して

$$Ef(z) := \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{X\cap D} f(\zeta)\omega_{\zeta'}\left(\frac{\chi(\zeta)(w(z,\zeta))'}{\tilde{\Phi}(z,\zeta)}\right) \wedge \omega_{\zeta'}(\zeta)$$

と定義する．このとき，定理 11 より，$X \cap D$ 上の正則関数 f に対して，$Ef(z)$ は $D \cup U_{\partial D\backslash X}$ において正則で

$$Ef(z) = f(z) \qquad (z \in X \cap D)$$

が成立する．このとき，Henkin-Leiterer は次の定理 12 を証明した．

定理 12(Henkin-Leiterer[11]) $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は滑らかでない境界をもつ強擬凸領域とする．$X = \{z \mid z_n = 0\}$ とする．$X \cap D$ 上の有界正則関数 f に対して，$Ef(z)$ は D において有界正則になる．さらに，f が $X \cap \overline{D}$ で連続ならば，Ef は $\overline{D}$ で連続になる．

定理 12 を一般化して，Henkin-Leiterer は次の定理 13 を証明した．Amar[3] も有界接続の場合を証明した．

定理 13(Henkin-Leiterer[11]) $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は滑らかでない境界をもつ強擬凸領域とする．X は $\overline{D}$ の近傍における閉部分多様体とする．このとき

(1) $X \cap D$ における有界正則関数 f に対して，D 上の有界正則関数 F が存在して，$F|_{X\cap D} = f$ が成立する．

(2) $X \cap D$ で正則な関数 f が $X \cap \overline{D}$ で連続ならば，D で正則で，$\overline{D}$ で連続な関数 F で，$F|_{X\cap D} = f$ をみたすものが存在する．

Schmalz[14] は次の補題を用いて，滑らかでない境界をもつ $\mathbf{C}^n$ の強 q-凸領域上の $\bar{\partial}$ 方程式の解の一様評価を得た．

補題 1(Schmalz[14])

$$t(z,\zeta) = \mathrm{Im} < w(z,\zeta), \zeta - z >,\ \zeta_j = \xi_j + i\xi_{j+n},\ z_j = \eta_j + i\eta_{j+n}$$

とおく．また，$\delta > 0$ に対して，$E_\delta(z) = \{\zeta \in D : |\zeta - z| < \delta\|d\rho(z)\|\}$ とおく．すると，定数 $c < \infty$, $\gamma > 0$ と整数 $\mu, \nu \in \{1, \cdots, 2n\}$ が存在して，$\{\rho, t(z,\zeta), \xi_1, \cdots, _{\hat{\mu}}, _{\hat{\nu}}, \cdots, \xi_{2n}\}$ (ξ_μ と ξ_ν は取り除く) は $E_\gamma(z)$ における座標系を構成する (同様に，$\{\rho, t(z,\zeta), \eta_1, \cdots, _{\hat{\mu}}, _{\hat{\nu}}, \cdots, \eta_{2n}\}$ は $E_\gamma(\zeta)$ における座標系を構成する)．さらに次の評価が成り立つ．

$$dV \leq \frac{c}{\|d\rho(z)\|^2} |d\rho(\zeta) \wedge d_\zeta t(z,\zeta) \wedge \cdots, _{\hat{\mu}}, _{\hat{\nu}}, \cdots \wedge d\xi_{2n}| \quad on \quad E_\gamma(z)$$

$$dV \leq \frac{c}{\|d\rho(\zeta)\|^2}|d\rho(z) \wedge d_z t(z,\zeta) \wedge \cdots,_{\hat{\mu}},_{\hat{\nu}},\cdots \wedge d\eta_{2n}| \quad on \quad E_\gamma(\zeta),$$

ここで dV は $\mathbf{C}^n$ におけるルベーグ測度である.

補題1を用いて定理12における Ef を評価することにより, 次の L^p $(1 \leq p < \infty)$ 接続を得る.

定理 14(Adachi[2]) $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は滑らかでない境界をもつ強擬凸領域とする. X は $\overline{D}$ の近傍における閉部分多様体で, $M = X \cap D$ とする. M 上の L^p $(p \geq 1)$ 正則関数 f に対して, D 上の L^p 正則関数 F で, $F|_M = f$ をみたすものが存在する.

証明 $X = \{z_n = 0\}$ と仮定する. $f \in L^p(M)$ $(1 \leq p < \infty)$ とする.

$$Ef(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n-1}} \int_M f(\zeta)\omega_{\zeta'}\left(\frac{\chi(\zeta)(w(z,\zeta))'}{\tilde{\Phi}(z,\zeta)}\right) \wedge \omega_{\zeta'}(\zeta)$$

とおくと, $Ef(z)$ は D において正則で, $Ef|_M = f$ をみたす. $Ef \in L^p(D)$ であることを示すためには

$$I_1(z) = \int_M f(\zeta)\frac{G(z,\zeta)}{\tilde{\Phi}(z,\zeta)^{n-1}}dV'(\zeta),$$

$$I_2(z) = \int_M f(\zeta)G(z,\zeta)\frac{w_j(z,\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_\nu}\tilde{\Phi}(z,\zeta)}{\tilde{\Phi}(z,\zeta)^n}dV'(\zeta)$$

が $L^p(D)$ の要素であることをいえばよい. ここで, $G(z,\zeta)$ は $\overline{D}\times\overline{D}$ において C^1 級の関数で, dV' は $\mathbf{C}^{n-1}$ におけるルベーグ測度である. I_2 が L^p であることを示す. $p=1$ のときを示す. 以下において定数をすべて記号 C で表す. 定理10における $\tilde{\Phi}(z,\zeta)$ と $w(z,\zeta)$ の作り方より

$$|w(z,\zeta)| \leq C(\|d\rho(\zeta)\| + |\zeta - z|^2)$$

$$\left|\frac{\partial\tilde{\Phi}(z,\zeta)}{\partial\zeta_j}\right| \leq C\left(\left|\frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial\zeta_j}\right| + |\zeta - z| + |\rho(\zeta)|\right)$$

となるから

$$|w_j(z,\zeta)|\left|\frac{\partial\tilde{\Phi}(z,\zeta)}{\partial\zeta_\nu}\right| \leq C(\|d\rho(\zeta)\|^2 + |\zeta - z| + |\rho(\zeta)|),$$

が成立する. したがって

$$\int_D |I_2(z)|dV(z) \leq C\int_M |f(\zeta)|\left(\int_D \frac{\|d\rho(\zeta)\|^2 + |\zeta - z| + |\rho(\zeta)|}{|\tilde{\Phi}(z,\zeta)|^n}dV(z)\right)dV'(\zeta).$$

が成立する. $t' = (t_3,\cdots,t_{2n})$ とおくと, 補題1より

$$\int_D \frac{\|d\rho(\zeta)\|^2}{|\tilde{\Phi}(z,\zeta)|^n}dV(z) \quad = \quad \int_{z\in E_\gamma(\zeta)} \frac{\|d\rho(\zeta)\|^2}{|\tilde{\Phi}(z,\zeta)|^n}dV(z) + \int_{z\notin E_\gamma(\zeta)} \frac{\|d\rho(\zeta)\|^2}{|\tilde{\Phi}(z,\zeta)|^n}dV(z)$$

$$\leq \int_{|t|\leq C} \frac{dt_1 dt_2 dt'}{(|t_1| + |t_2| + |t'|^2)^n} + \int_{z\notin E_\gamma(\zeta)} \frac{|\zeta - z|^2}{|\tilde{\Phi}(z,\zeta)|^n} dV(z)$$
$$\leq C \int_0^C \frac{r^{2n-3}}{(r^2)^{n-2}} dr \leq C.$$

が成立する．他の場合も同様である．したがって

$$\int_D |I_2(z)| dV(z) \leq C \int_M |f(\zeta)| dV'(\zeta)$$

となるから，$p = 1$ の場合が成立する．

参考文献

[1] K.Adachi, Continuation of A^∞ functions from submanifolds to stricltly pseudoconvex domains, J. Math. Soc. Japan, **32**(1980), 331-34.

[2] K. Adachi, L^p extension of holomorphic functions from submanifods to strictly pseudoconvex domains with non-smooth boundary, to appear in Nagoya Math. J., **172**(2003).

[3] E. Amar, Extension de fonctions holomorphes et courants, Bull. Sc. Math., **107**(1983), 25-48.

[4] F. Beatrous, L^p estimates for extensions of holomorphic functions, Michigan Math. J. **32**(1985), 361-380.

[5] B. Berndtsson, The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fefferman, Ann. Inst. Fourier, **46**(1996), 1083-1094.

[6] A. Cumenge, Extension dans des classes de Hardy de fonctions holomorphes et estimations de type "mesures de Carleson" pour l'equation ∂, Ann. Inst. Fourier, **33**(1983), 59-97.

[7] K. Diederich and E. Mazzilli, Extension and restriction of holomorphic functions, Ann. Inst. Fourier, 47(1997), 1079-1099.

[8] K. Diederich and E. Mazzilli, Extension of bounded holomorphic functions in convex domains, Manuscripta Math., 105(2001), 1-12.

[9] M. Elgueta, Extension to strictly pseudoconvex domains of functions holomorphic in a submanifoldd in general position and C^∞ up to the boundary, Ill. J. Math., **24**(1980), 1-17.

[10] G. M. Henkin, Continuation of bounded holomorphic functions from submanifolds in general position in a strictly pseudoconvex domain, Math. USSR Izv., **6**(1972), 536-563.

[11] G. M. Henkin and J. Leiterer, Theory of functions on complex manifolds, Birkhäuser, 1984.

[12] T. Ohsawa and K. Takegoshi, On the extension of L^2 holomorphic functions, Math. Z., **195**(1987), 197-204.

[13] R.M. Range, Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer-Verlag, 1986.

[14] G. Schmalz, Solution of the $\bar{\partial}$-equation with uniform estimates on strictly q-convex domains with non-smooth boundary, Math. Z., **202**(1989), 409-430.

[15] Y.T. Siu, The Fujita conjecture and the extension theorem of Ohsawa-Takegoshi, Proc. 3rd Int. RIMSJ., Geometric Complex Analysis(1996), 577-592.