数理解析研究所講究録 1352 巻 2004 年 64-73

再生核をもつヒルベルト空間の一般ノルム不等式と等号問題

東京学芸大学・教育学部　山田 陽 (Akira Yamada)
Tokyo Gakugei University

1　一般論

m は 2 以上の整数とする. H_j $(j=1,2,\ldots,m)$ を集合 E 上の (複素) reproducing kernel Hilbert space (RKHS), $K_x^{(j)}$ を点 $x\in E$ における H_j の再生核とする. E_d^m を $E^m=\prod_{j=1}^m E$ の対角線とする. また E^m 上の RKHS としてのテンソル積 $H=\otimes_{j=1}^m H_j$ に対して, $H_0=\{f\in H\mid f|_{E_d^m}=0\}$ とする. $f,\ g\in H$ に対して, 同値関係 $f\sim g$ を $f|_{E_d^m}=g|_{E_d^m}$ で定義する. $\otimes_{j=1}^m\phi_j\in H_0^\perp$ のとき, $\otimes_{j=1}^m\phi_j$ は *extremal* であると言う. $\otimes_{j=1}^m\phi_j$ が extremal であることと, $f\sim g \implies \langle f,\otimes_j\phi_j\rangle=\langle g,\otimes_j\phi_j\rangle$ とは同値であることに注意する. また, $\otimes_{j=1}^m\phi_j=0$ は extremal であるが, この場合は $\exists j,\ \phi_j=0$ と同値である.

注意 1. よく知られているように, 再生核の積 $\prod_{j=1}^m K_x^{(j)}$ を再生核としてもつ Hilbert 空間を H' とおくと, H' の元は, E^m で定義されたテンソル積 H の函数を対角線 $E_d^m\cong E$ に制限した函数からなる. このとき, ノルム不等式

$$\|\phi_1\cdots\phi_m\|_{H'}\le\|\phi_1\otimes\cdots\otimes\phi_m\|_H=\|\phi_1\|_{H_1}\cdots\|\phi_m\|_{H_m}$$

が成り立つが, $\otimes_{j=1}^m\phi_j$ が extremal であることはこの不等式が等号になる条件と同値である.

定義 1. H_j $(j=1,2,\ldots,m)$ は RKHS で $H=\otimes_{j=1}^m H_j$, $\phi=\otimes_{j=1}^m\phi_j\in H\setminus\{0\}$ とする.
H が**正則** (c.f. [8]) $\iff$ ϕ が extremal ならば $\exists q\in E$, $\exists c_j\in\mathbb{C}$ s.t. $\phi_j=c_jK_q^{(j)}$ $(j=1,2,\ldots,m)$.
H が**弱正則** $\iff$ ϕ が extremal ならば, $q\in E$ が存在して, 各 j に対して q は H_j の共通零点か, または $\exists c_j\in\mathbb{C}$ s.t. $\phi_j=c_jK_q^{(j)}$ $(j=1,2,\ldots,m)$.
q が H_j の共通零点になる場合を**例外的**ということにする.

この研究の目的は, RKHS のテンソル積が正則または弱正則になる一般的な十分条件を得ることである.
以下, R は通常の和と積が定義された E 上の複素函数からなる $\mathbb{C}$-algebra とする.

補題 1. ***$\phi=\otimes_{j=1}^m\phi_j\neq 0$ が $\otimes_{j=1}^m H_j$ で extremal とする. 各 H_j が dense な R-invariant subspace H_j' をもつならば, 任意の j と任意の $u\in H_j'$, $f\in R$ に対して***

$$\langle fu,\phi_j\rangle=\Lambda_\phi(f)\langle u,\phi_j\rangle \tag{1}$$

をみたすような $\mathbb{C}$-algebra homomorphism $\Lambda_\phi\colon R\to\mathbb{C}$ が一意的に存在する.

証明. 先ず任意の $f_j,\ g_j\in H_j$ $(j=1,2,\ldots,m)$ に対して

$$\prod_{j=1}^m f_j=\prod_{j=1}^m g_j \text{ on } E\implies\prod_{j=1}^m\langle f_j,\phi_j\rangle=\prod_{j=1}^m\langle g_j,\phi_j\rangle. \tag{2}$$

が成り立つことに注意する. なぜなら, $\otimes_{j=1}^m f_j\sim\otimes_{j=1}^m g_j$ であるから, 仮定より $\prod_{j=1}^m\langle f_j,\phi_j\rangle=\langle\otimes_{j=1}^m f_j,\otimes_{j=1}^m\phi_j\rangle=\langle\otimes_{j=1}^m g_j,\otimes_{j=1}^m\phi_j\rangle=\prod_{j=1}^m\langle g_j,\phi_j\rangle$ となる.

H_j で dense な R-invariant subspace を H'_j とする. $\phi_j \neq 0$ であるから, $\langle u_j, \phi_j \rangle \neq 0$ となる $u_j \in H'_j$ が存在する. Λ_ϕ の一意性は (1) で $u = u_j$ とおくと明らかであるので, j に対してこのような u_j を一つ定めて

$$\Lambda_\phi(f) = \frac{\langle fu_j, \phi_j \rangle}{\langle u_j, \phi_j \rangle} \tag{3}$$

と定める. この定義は j, u_j の取り方に依存せず well-defined であることを示そう. 相異なる i, j を任意に固定して, $f, g \in R$ に対して f_k, $g_k \in H'_j$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ を

$$f_k = \begin{cases} fu_i & (k = i) \\ gu_j & (k = j) \\ u_k & (k \neq i, j) \end{cases}, \quad g_k = \begin{cases} fgu_i & (k = i) \\ u_k & (k \neq i) \end{cases}$$

とおく. (2) より,

$$\langle fu_i, \phi_i \rangle \langle gu_j, \phi_j \rangle = \langle fgu_i, \phi_i \rangle \langle u_j, \phi_j \rangle$$

したがって, 対称性より

$$\frac{\langle fgu_i, \phi_i \rangle}{\langle u_i, \phi_i \rangle} = \frac{\langle fu_i, \phi_i \rangle \langle gu_j, \phi_j \rangle}{\langle u_i, \phi_i \rangle \langle u_j, \phi_j \rangle} = \frac{\langle fgu_j, \phi_j \rangle}{\langle u_j, \phi_j \rangle}.$$

ここで $g = 1$ とすると, 任意の $f \in R$ と i, j $(i \neq j)$ に対して

$$\frac{\langle fu_i, \phi_i \rangle}{\langle u_i, \phi_i \rangle} = \frac{\langle fu_j, \phi_j \rangle}{\langle u_j, \phi_j \rangle}.$$

よって,

$$\frac{\langle fgu_i, \phi_i \rangle}{\langle u_i, \phi_i \rangle} = \frac{\langle fu_i, \phi_i \rangle \langle gu_i, \phi_i \rangle}{\langle u_i, \phi_i \rangle \langle u_i, \phi_i \rangle}$$

となり, 汎函数 Λ_ϕ の乗法性及びその定義が j, u_j に依存せず well-defined であることが示された. また各 ϕ_j を定数倍しても式 (3) の値は変わらないので, この値は f とテンソル積 ϕ のみに依存することに注意する. Λ_ϕ の複素線形性は明らかであるから, Λ_ϕ が $\mathbb{C}$-algebra homomorphism であることが示された.

最後に, 式 (1) が任意の $u \in H'_j$ で成り立つことを示すには, $\langle u, \phi_j \rangle = 0$ のとき $\langle fu, \phi_j \rangle = 0$ であることを示せば十分である. $k \neq j$ とすると (2) より

$$\langle fu, \phi_j \rangle \langle u_k, \phi_k \rangle = \langle u, \phi_j \rangle \langle fu_k, \phi_k \rangle = 0.$$

$\langle u_k, \phi_k \rangle \neq 0$ であるから, $\langle fu, \phi_j \rangle = 0$. よって, この場合にも等式 (1) が示された. □

R が単位元 1 を含む場合には, (1) より $\Lambda_\phi(1) = 1$ が成り立つことに注意する.

定義 2. H を E 上の RKHS とする. $R \cap H$ が H で dense かつ R の ideal であるとき, H は *R-dense* であるという.

H_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ が R-dense のとき, $R \cap H_j$ は H_j の dense な R-invariant subspace であり $\otimes H_j$ に補題 1 を適用できる.

定理 1. H_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ **は** E **上の** *R-dense* **な** *RKHS* **とする.** $\phi = \otimes_{j=1}^m \phi_j \in \otimes_{j=1}^m H_j \setminus \{0\}$ **が** *extremal* **ならば,** (1) **をみたす** $\mathbb{C}$-*algebra homomorphism* $\Lambda_\phi \colon R \to \mathbb{C}$ **が一意的に存在して, 任意の** j **について次のいずれかが成り立つ.**

(i) $\Lambda_\phi|_{R \cap H_j} = 0$, **または**

(ii) $\exists C_j \neq 0$ *s.t.* $\forall f \in R \cap H_j$, $\langle f, \phi_j \rangle = C_j \Lambda_\phi(f)$.

証明. (i) が成り立たないと仮定して (ii) を示そう．そこで，$\exists f_0 \in R \cap H_j$ s.t. $\Lambda_\phi(f_0) \neq 0$ と仮定する．$R \cap H_j$ は dense であるから，$\exists g \in R \cap H_j$ s.t. $\langle g, \phi_j \rangle \neq 0$. 任意の $f \in R \cap H_j$ に対して，補題 1 より等式

$$\langle fg, \phi_j \rangle = \Lambda_\phi(f)\langle g, \phi_j \rangle = \Lambda_\phi(g)\langle f, \phi_j \rangle$$

が成り立つ．この式でまず $f = f_0$ とおくと，$\Lambda_\phi(g) \neq 0$ がわかる．したがって，$C_j = \langle g, \phi_j \rangle / \Lambda_\phi(g)$ とおくと $C_j \neq 0$ であり，(ii) が成り立つ． □

2 多項式環の場合

定理 1 の応用として，先ず E は $\mathbb{C}^n$ の部分集合で，R は $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ (の E への制限) である場合を考えよう．記述の簡単のため，multi-index notation を用いる．$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $z^\alpha = \prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_i}$, $\mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$. 原点中心のべき級数を $\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ と表す．

定義 3. H が $\mathbb{C}^n$ の部分集合 E 上の RKHS のとき，H が $\mathbb{C}[z]$-dense であれば，H は ***polynomially dense*** という．

H が polynomially dense のとき

$$\tilde{E}_H = \{q \in \mathbb{C}^n \mid \exists C > 0 \text{ s.t. } \forall f \in \mathbb{C}[z] \cap H,\ |f(q)| \leq C\|f\|\}$$

とおく．明らかに，$\tilde{E}_H \supset E$ である．また H_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ が polynomially dense で，$\phi = \otimes_{j=1}^m \phi_j \in \otimes_{j=1}^m H_j \setminus \{0\}$ が extremal のとき，点 $\Lambda_\phi(z) = (\Lambda_\phi(z_1), \Lambda_\phi(z_2), \ldots, \Lambda_\phi(z_n)) \in \mathbb{C}^n$ を q_ϕ とおき，extremal な元 ϕ の中心という．

系 1. H_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ **は** E **上の** *polynomially dense* **な** *RKHS* **とする．** $\phi = \otimes_{j=1}^m \phi_j \in \otimes_{j=1}^m H_j \setminus \{0\}$ **が** *extremal* **のとき，任意の** j **について次が成り立つ．**

(i) **中心** q_ϕ **は** $\mathbb{C}[z] \cap H_j$ **の函数の共通零点であるか，または** $\exists C_j \neq 0$ *s.t.* $\forall f \in \mathbb{C}[z] \cap H_j$, $\langle f, \phi_j \rangle = C_j f(q_\phi)$,

(ii) $q_\phi \in \tilde{E}_{H_j}$.

証明. (i) 補題 1 より Λ_ϕ は $\Lambda_\phi(1) = 1$ をみたすような $\mathbb{C}$-algebra homomorphism であるから，多項式 $f(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ に対して

$$\Lambda_\phi(f) = \sum_\alpha a_\alpha \Lambda_\phi(z)^\alpha = f(\Lambda_\phi(z)).$$

したがって，$\Lambda_\phi(f) = f(q_\phi)$. 後は定理 1 より直ちに示される．(ii) は (i) より明らか． □

定義 4. Polynomially dense な RKHS H が $\tilde{E}_H = E$ をみたすとき，H は *maximal* という．

次に polynomially dense な RKHS の例とそれが maximal になるための一つの十分条件を挙げる．

例 1 ([4]). $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$ に対して $z\zeta = (z_1\zeta_1, \ldots, z_n\zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ とおく．正係数のべき級数 $\eta(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$, $(c_\alpha > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$ を固定する．べき級数 $\eta(z\bar{z})$ の収束域 D は空でないとする．D で正則な函数 f が D でべき級数展開 $\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ を持つとき，f のノルムを

$$\|f\|^2 = \sum_\alpha \frac{|a_\alpha|^2}{c_\alpha}$$

と定義して, $\|f\| < \infty$ である D で正則な函数 f 全体の空間を $\mathcal{H}_\eta$ とおく. $f,\ g \in \mathcal{H}_\eta$ に対して, 内積を

$$\langle f, g\rangle = \sum_\alpha \frac{a_\alpha \bar{b}_\alpha}{c_\alpha}, \quad g(z) = \sum_\alpha b_\alpha z^\alpha$$

と定めると $\mathcal{H}_\eta$ は Hilbert 空間になる. $\zeta \in D$ のとき $k_\zeta(z) = \eta(z\bar{\zeta})$ とおくと, $k_\zeta \in \mathcal{H}_\eta$ となることが容易にわかる. 任意の $f \in \mathcal{H}_\eta$ に対して $f(\zeta) = \langle f, k_\zeta\rangle$ が成り立つので, k_ζ は $\mathcal{H}_\eta$ の再生核であり, $\mathcal{H}_\eta$ は D 上の RKHS になる. ノルムの定義から明らかに $\mathcal{H}_\eta$ は polynomially dense である.

命題 1. $\forall z \in \partial D$ **に対して,** $\eta(z\bar{z}) = \infty$ **ならば** $\mathcal{H}_\eta$ **は** ***maximal*** **である.**

証明. $\eta(z\bar{z})$ は正項級数であるから, $\eta(z\bar{z}) < \infty$ ならば $0 < t < 1$ である任意の t に対して $\eta(tz\overline{tz}) < \infty$. したがって, 仮定より任意の $z \notin D$ に対して $\eta(z\bar{z}) = \infty$ であることが容易にわかる. 任意の $\zeta \notin D$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して, 部分和の多項式 $k_\zeta^{(n)}(z) = \sum_{|\alpha| \le n} c_\alpha \bar{\zeta}^\alpha z^\alpha$ をとると,

$$\frac{|k_\zeta^{(n)}(\zeta)|}{\|k_\zeta^{(n)}\|} = \sqrt{k_\zeta^{(n)}(\zeta)} \to \sqrt{\eta(\zeta\bar{\zeta})} = \infty \ (n \to \infty).$$

よって, $\zeta \notin \tilde{D}_{\mathcal{H}_\eta}$ となる. ゆえに, $\tilde{D}_{\mathcal{H}_\eta} \subset D$ であるから $\mathcal{H}_\eta$ は maximal である. □

系 1 より, RKHS のテンソル積の弱正則性に関して一つの十分条件が得られる.

定理 2. E **上の** ***RKHS*** $H_1, H_2, \ldots, H_m$ **が全て** ***polynomially dense*** **かつ** $\bigcap_{j=1}^m \tilde{E}_{H_j} = E$ **ならば, それらのテンソル積** $\otimes_{j=1}^m H_j$ **は弱正則である.**

証明. $\phi \in \otimes_{j=1}^m H_j \setminus \{0\}$ は extremal とする. 系 1 より, $q_\phi \in \bigcap_{j=1}^m \tilde{E}_{H_j} = E$. q_ϕ が H_j の共通零点でなければ定数 $C_j \neq 0$ が存在して, $\forall f \in \mathbb{C}[z] \cap H_j$ に対して $\langle f, \phi_j\rangle = C_j f(q_\phi)$. H_j は polynomially dense であるから, $\forall f \in H_j$ に対して $\exists f_\nu \in \mathbb{C}[z] \cap H_j$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ s.t. $f_\nu u \to f$ $(\nu \to \infty)$ (強収束). $\langle f_\nu, \phi_j\rangle = C_j f_\nu(q_\phi)$ であるから, $\nu \to \infty$ とすると, $\forall f \in H_j$ に対して $\langle f, \phi_j\rangle = C_j f(q_\phi)$. $C_j \neq 0$ より, ϕ_j は点 $q_\phi \in E$ における H_j の point evaluation の定数倍である. ゆえに, ϕ_j は $K_{q_\phi}^{(j)}$ の定数倍となる. □

注意 2. 特に, 全ての H_j が polynomially dense かつ maximal ならば, テンソル積 $\otimes_{j=1}^m H_j$ は弱正則である.

3 有理型函数環の場合

以下, 複素 1 次元の場合を考える. Polynomially dense な RKHS だけでは複連結領域またはリーマン面の種数が正の場合をカバーすることはできないので, 多項式環の議論を少しだけ拡張する必要がある. S を閉リーマン面, E を S の正則部分領域として, $\mathcal{R}_E$ を $\overline{E}$ で正則な S の有理型函数全体の函数環とする. この場合は多項式環の場合とほぼ同様であるので, 証明を付け加える必要がある箇所だけ証明を述べて, それ以外は結果だけ述べることにする.

命題 2. $\chi\colon \mathcal{R}_E \to \mathbb{C}$ **を** $\chi(1) = 1$ **をみたすような** $\mathbb{C}$-***algebra homomorphism*** **とする. このとき, 点** $q \in \overline{E}$ **が一意的に存在して, 任意の** $f \in \mathcal{R}_E$ **に対して** $\chi(f) = f(q)$ **が成り立つ.**

証明. 簡単のため, $\zeta = \chi(f)$ とおく. まず, 任意の $f \in \mathcal{R}_E$ に対して $\chi(f) \in f(\overline{E})$ が成り立つことに注意する. このことを背理法で示そう. 仮に $\zeta \notin f(\overline{E})$ ならば, $f - \zeta \neq 0$ on $\overline{E}$ であるから $1/(f - \zeta) \in \mathcal{R}_E$. よって, χ の乗法性より

$$1 = \chi(f - \zeta)\chi(1/(f - \zeta)) = (\chi(f) - \zeta)\chi(1/(f - \zeta)) = 0.$$

これは矛盾である．ゆえに，$\chi(f) \in f(\overline{E})$.

$f \in \mathcal{R}_E \setminus \mathbb{C}$ を任意に一つ固定する．f の位数を n として $f^{-1}(\zeta) = \{q_1, \ldots, q_r\}$ $(1 \le r \le n)$ とすると，上の注意より，$f^{-1}(\zeta) \cap \overline{E} \neq \emptyset$ である．$\zeta_0 \in \mathbb{C}$ を ζ と異なり，$\sharp f^{-1}(\zeta_0) = n$ となるように選ぶ．$g_0 \in \mathcal{R}_E$ を $f^{-1}(\zeta_0)$ の各点で相異なる値を取り，更に $g_0(p) \neq 0$ $(\forall p \in \bar{E})$ かつ $g_0(q_j) = 0$, $\forall q_j \notin \bar{E}$ となるような S 上の有理型函数とする．このとき，十分小さな $\epsilon \neq 0$ に対して $g = 1/(g_0 + \epsilon)$ とおくと，g は $\mathcal{R}_E$ の元であり，任意の q_j $(j = 1, \ldots, r)$ で正則で，

$$\sup_{z \in \overline{E}} |g| < |g(q_j)|, \quad \forall q_j \notin \overline{E} \tag{4}$$

が成り立つ．このとき，閉リーマン面の一般論より有理関数 a_k $(k = 0, \ldots, n)$ が存在して，恒等的に

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(f) g^k = 0, \quad (a_n(z) = 1) \tag{5}$$

を満たす．多項式 (5) のよく知られた構成法 [6] より明らかなように，有理関数 $a_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ は $z = \zeta$ で正則である．よって，$a_k = b_k / c_k$, $b_k, c_k \in \mathbb{C}[z]$ で $c_k(\zeta) \neq 0$ と表すことができる．$d = \prod_{k=0}^{n} c_k$ とおくと，da_k は多項式であり，$da_k(f) g^k \in \mathcal{R}_E$ に注意して χ を作用させると

$$\sum_{k=0}^{n} da_k(\zeta) \chi(g)^k = 0$$

となる．$da_k(\zeta) = d(\zeta) a_k(\zeta)$ で $d(\zeta) \neq 0$ であるから，$\sum_{k=0}^{n} a_k(\zeta) \chi(g)^k = 0$ となり，(5) の作り方より，$\chi(g) = g(q_j)$ となる j $(1 \le j \le r)$ が存在する．$q = q_j$ とおくと $\zeta = f(q)$ である．(4) と最初の注意より，$q \in \overline{E}$ である．

この q が求める点であることを示そう．g は $f^{-1}(\zeta_0)$ の各点で相異なる値を取るので，閉リーマン面の一般論より S 上の任意の有理型函数 h に対して，有理関数 A_k が存在して $h = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(f) g^k$ と表される．先ず，$h \in \mathcal{R}_E$ が $f^{-1}(\zeta)$ の各点で正則と仮定する．このとき作り方 (c.f [6]) より，各係数 A_k は ζ で正則である．再び上と同じ議論で，分母を払って計算することで等式

$$\chi(h) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(\zeta) g(q)^k = h(q)$$

が得られる．一般の $h \in \mathcal{R}_E$ に対しては，$h_2 \in \mathcal{R}_E$ を各 $q_j \notin \overline{E}$ で十分高位の zero を持ち，$h_2(q) \neq 0$ に取る．このとき，h_2 と共に $h_1 = h_2 h \in \mathcal{R}_E$ も $f^{-1}(\zeta)$ の各点で正則である．したがって，$\chi(h_1) = \chi(h_2)\chi(h)$ より $h_1(q) = h_2(q)\chi(h)$．よって，任意の $h \in \mathcal{R}_E$ に対して $\chi(h) = h(q)$ が成り立つ．函数族 $\mathcal{R}_E$ は S の点を分離するので，点 q の一意性は明らか． □

定義 5. E 上の RKHS H が $\mathcal{R}_E$-dense であるとき，H は *meromorphically dense* という．特に S の genus が 0 の場合，H は *rationally dense* と言う．

H_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ は E 上の meromorphically dense な RKHS とする．$\phi = \otimes_{j=1}^{m} \phi_j \in \otimes_{j=1}^{m} H_j \setminus \{0\}$ が extremal のとき，定理 1 と命題 2 から一意的に定まる点 $q \in \overline{E}$ を，多項式環の場合と同様に，extremal な元 ϕ の**中心**といい q_ϕ で表す．同様に

$$\tilde{E}_H = \{q \in \overline{E} \mid \exists C > 0 \text{ s.t. } \forall f \in \mathcal{R}_E \cap H, \ |f(q)| \le C\|f\|\}$$

とおく．誤解のない場合は $\tilde{E}_H$ を $\tilde{E}$ と略記することにする．$\tilde{E}_H = E$ のとき，H は *maximal* と言う．

系 2. H_j $(j=1,2,\ldots,m)$ は E 上の *meromorphically dense* な *RKHS* とする. $\phi=\otimes_{j=1}^m\phi_j\in\otimes_{j=1}^m H_j\setminus\{0\}$ が *extremal* のとき, 任意の j に対して次が成り立つ.

(i) 中心 q_ϕ は $\mathcal{R}_E\cap H_j$ に属する函数の $\overline{E}$ における共通零点であるか, または

(ii) $\exists C_j\neq 0$ *s.t.* $f\in\mathcal{R}_E\cap H_j$, $\langle f,\phi_j\rangle=C_jf(q_\phi)$.

定理 3. E 上の *RKHS* $H_1,H_2,\ldots,H_m$ が全て *meromorphically dense* かつ *maximal* ならば, それらのテンソル積 $\otimes_{j=1}^m H_j$ は弱正則である.

4 一般ノルム不等式の等号

(H,K) を E 上の RKHS とする. $\psi(z)=\sum_{\nu=0}^\infty c_\nu z^\nu$ を, 任意の ν に対して $c_\nu\geq 0$ であるような $\mathbb{C}$ 上の整函数とする. $\psi(K)\gg 0$ であるから $\psi(K)$ を再生核とする E 上の RKHS $(H_\psi,\psi(K))$ が一意的に存在する. H_ψ の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle_\psi$, ノルムを $\|\cdot\|_\psi$ で表す. H_j の核函数の和 $\sum K_j$ を再生核とする RKHS を $\uplus H_j$, 積 K^m に対応する RKHS を $(H^{\otimes m})_r$, また定数倍 cK に対応する RKHS を cH で表す. 再生核の一般論により, 等式

$$\psi(K)=\sum_{\nu=0}^\infty c_\nu K^\nu$$

に対応して RKHS の等式

$$H_\psi=\biguplus_{\nu=0}^\infty c_\nu(H^{\otimes\nu})_r$$

および, それに付随してノルム不等式

$$\|\psi(f)\|_\psi^2\leq\psi(\|f\|^2),\quad\forall f\in H \tag{6}$$

が成り立つ [1, 2]. 作り方より, $\psi(K_q)$ は H_ψ の点 q における再生核である. よって, $f=K_q$ $(q\in E)$ のとき不等式 (6) において等号が常に成り立つことに注意する. 等号条件を調べるために, $\psi=\psi_1\circ\psi_2$ と分解する. ただし

$$\psi_1(z)=c_0+z,\quad\psi_2(z)=\sum_{\nu=1}^\infty c_\nu z^\nu$$

とおく. 次の不等式

$$\|\psi(f)\|_\psi^2\leq\psi_1(\|\psi_2(f)\|_{\psi_1}^2)\leq\psi_1(\psi_2(\|f\|^2))=\psi(\|f\|^2)$$

から, $\psi(z)$ に関するノルム不等式の等号条件は $\psi(z)$ が一次式または $\psi(0)=0$ の二つの場合に帰着されることがわかる. 上の記号の下, $H_\psi=c_0\mathbb{C}\uplus H_{\psi_2}$ と表される. 後で利用するので, 少しだけ一般論を思い出しておこう. RKHS (H_j,K_j) $(j=1,2)$ の内積, ノルムをそれぞれ $\langle\cdot,\cdot\rangle_j$, $\|\cdot\|_j$ $(j=1,2)$ とする. $H_1\uplus H_2$ のノルムを $\|\cdot\|_{12}$ とする. このとき, ピタゴラス不等式

$$\|f_1+f_2\|_{12}^2\leq\|f_1\|_1^2+\|f_2\|_2^2,\quad\forall f_1\in H_1,\ \forall f_2\in H_2 \tag{7}$$

が成り立つ. 簡単な変分により, (7) で等号が成り立つ必要十分条件は

$$\langle f_1,h\rangle_1=\langle f_2,h\rangle_2,\quad\forall h\in H_1\cap H_2 \tag{8}$$

であることがわかる (c.f. [5, p. 32]). $\psi(z)$ が一次式の場合を先ず調べる.

命題 3. H を $RKHS$ として $c_0 \geq 0$ のとき, $H_{\psi_1} = c_0\mathbb{C} \uplus H$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\|c_0 + f\|_{\psi_1}^2 \leq c_0 + \|f\|^2, \ \forall f \in H.$$

この式で等号が成り立つ必要十分条件は次のいずれかが成り立つことである.

(i) $c_0 = 0$,

(ii) $1 \notin H$,

(iii) $c_0 > 0$ かつ $1 \in H$ かつ $\langle f, 1\rangle = 1$.

証明. $c_0 = 0$ ならば等号は自明である. $1 \notin H$ ならば $c_0\mathbb{C} \cap H = \{0\}$ である. このとき, 条件 (8) より常に等号が成り立つ. (i) でも (ii) でもない場合, $c_0\mathbb{C} \cap H = \mathbb{C}$ であるから等号条件 (8) は $\langle c_0, 1\rangle = 1 = \langle f, 1\rangle$ と同値である. したがって, (iii) の場合に限る. □

次に $\psi(z) = \psi_2(z)$ の場合を調べよう. ある程度一般的な条件の下で例外的な場合は起こらないことが分かる.

定理 4. 上の設定の下, 次を仮定する.

(i) H は *polynomially dense* または *meromorphically dense*, かつ *maximal* な *RKHS* である,

(ii) $\{(i,j) \mid c_i c_j \neq 0,\ 1 \leq i < j\} \neq \emptyset$.

$d = \gcd\{j - i \mid c_i c_j \neq 0,\ 1 \leq i < j\}$ とおく. このとき, ノルム不等式 (6) で等号が成り立つならば, $f = 0$ または, ある $q \in E$ と定数 C が存在して $f = CK_q$, $C^d = 1$ となる. 特に, $d = 1$ であれば等号の必要十分条件は, $f = 0$ または, ある $q \in E$ が存在して $f = K_q$ となることである.

証明. $\psi_2(0) = 0$ であるから, $f = 0$ のとき等号が成り立つのは自明である. そこで $f \neq 0$ が不等式 (6) において等号を与えると仮定しよう. $\psi_2(z)$ の係数を $\{c_\nu\}_\nu$ として, $c_i c_j \neq 0,\ 1 \leq i < j$ とする. 仮定より, $f^{\otimes j}$ は $H^{\otimes j}$ で nonzero extremal である. 定理 2 または定理 3 より $H^{\otimes j}$ は弱正則であり, 中心 $q \in E$ が存在して, q は H の共通零点かまたは $\exists C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ s.t. $f = CK_q$ となる. 以下簡単のため, R は $\mathbb{C}[z]$ または $\mathcal{R}_E$ を表すこととする. 定理 2, 3 の証明からわかるように, $\phi \in H^{\otimes m} \setminus \{0\}$ $(m \geq 2)$ が extremal ならば中心 q は $\Lambda_\phi(g) = g(q),\ \forall g \in R$ をみたすことに注意する.

まず, q は H の共通零点でないことを示そう. H は R-dense であるから, $f \neq 0$ より, $\langle u, f\rangle \neq 0$ をみたす $u \in R \cap H$ が存在する. 一般に, $\otimes_k \phi_k$ が extremal なとき, 任意の $\otimes_k g_k \in \otimes_k H_k$ にたいして

$$\langle \Pi_k g_k, \Pi_k \phi_k\rangle = \langle \otimes_k g_k, \otimes_k \phi_k\rangle = \Pi_k \langle g_k, \phi_k\rangle$$

である. $f^{\otimes j}$ は extremal であるから

$$\langle u^j, c_j f^j\rangle = \langle u, f\rangle^j.$$

一方, $i \geq 2$ のとき $f^{\otimes i}$ も extremal であるから

$$\langle u^j, c_i f^i\rangle = \langle u^{j-i+1}, f\rangle \langle u, f\rangle^{i-1}.$$

この式は, $i = 1$ のときも自明に成り立つ. $f^{\otimes j}$ は extremal だから補題 1 より $\langle u^{j-i+1}, f\rangle = u^{j-i}(q)\langle u, f\rangle$ である. ところが, $u^j \in (c_i H^{\otimes i})_r \cap (c_j H^{\otimes j})_r$ であるから, (8) より $\langle u^j, c_i f^i\rangle = \langle u^j, c_j f^j\rangle$. したがって,

$$\langle u, f\rangle^{j-i} = u^{j-i}(q). \tag{9}$$

よって, $u(q) \neq 0$ となり, 点 q は H の共通零点ではない. したがって, ある定数 $C \neq 0$ が存在して $f = CK_q$ となる. 条件 (9) と f の再生性より $C^{j-i} = 1$ である. 初等整数論より, 最大公約数 d はこのような $j-i$ の整数倍の和として表されるので $C^d = 1$ が分かる. □

命題 3 と定理 4 をまとめて次の定理を得る.

定理 5. 上の設定の下, 次を仮定する.

(i) H は *polynomially dense* または *meromorphically dense,* かつ *maximal* な *RKHS,*
(ii) $\{(i,j) \mid c_i c_j \neq 0,\ 1 \leq i < j\} \neq \emptyset$ かつ $\gcd\{j-i \mid c_i c_j \neq 0,\ 1 \leq i < j\} = 1$.

このとき, ノルム不等式 (6) で等号が成り立つ必要十分条件は次のいずれかが成り立つことである.

(a) $c_0 > 0$ かつ $1 \in H_{\psi_2}$ ならば, ある $q \in E$ が存在して $f = K_q$ となる.
(b) $c_0 = 0$ または $1 \notin H_{\psi_2}$ ならば, $f = 0$ またはある $q \in E$ が存在して $f = K_q$ となる.

注意 3. 定理 5 において, H が共通零点を持てば $1 \notin H_{\psi_2}$ であり, $f = 0$ は等号を与える. しかしこの場合, q を共通零点にとると $K_q = 0$ であるので, 等号の必要十分条件は $f = K_q$ $(\exists q \in E)$ と表すことができる.

5 応用

リーマン面上の正則関数及び正則微分に関する次のような RKHS のテンソル積の正則性を調べよう. ここでは, 定義域 E は閉リーマン面 S の正則部分領域とする.

(i) h_1: (Szegö 型空間) E 上の Hardy H^2 空間に $\|f\|^2 = \int_{\partial E} |f|^2 \rho |dz|$ でノルムを入れた空間. $\rho|dz|$ は ∂E 上の正値連続な計量.
(ii) h_2: (Dirichlet 型空間). E 上の正則函数 f で $f(a) = 0$ $(a \in E)$ かつ有限な Dirichlet ノルムを持つもの. $\|f\|^2 = \iint_E \rho |\partial f|^2$, ρ は $\bar{E}$ 上の正値連続函数.
(iii) h_3: (Bergman 型空間) E 上の Bergman 空間に $\|f\|^2 = \iint_E |f|^2 \rho^2\, dxdy$ でノルムを入れた空間. $\rho|dz|$ は $\bar{E}$ 上の正値連続な計量.

次の事実は良く知られている [10, 定理 8]

命題 4. E は閉リーマン面 S の正則部分領域とする. $\bar{E}$ で正則な任意の函数 f と $\forall\epsilon > 0$ に対して $\exists g \in \mathcal{R}_E$ *s.t.* $\|f - g\|_\infty < \epsilon$ *on* $\bar{E}$.

次の対数極をもつ一価正則函数の存在もよく知られている.

命題 5. E は閉リーマン面 S の正則部分領域とする. $\forall a \in \partial E$ に対して U を a の S における座標円盤とする. 任意の $p \in U \setminus \bar{E}$ に対して $\bar{E}$ で一価正則な函数 f_p が存在して, 次をみたす.

(i) $z \in U \cap \bar{E}$ のとき, $f_p(z) = \log(z-p) + g_p(z)$. ただし, 函数 $g_p(z)$ は $(z,p) \in U \times U$ で有界正則.
(ii) p が a に十分近いとき, $\{f_p(z)\}_p$ は $\bar{E} \setminus U$ で一様有界.

定理 6. 次が成り立つ.

(i) *RKHS* h_j $(j = 1,2,3)$ は *meromorphically dense* かつ *maximal* である.

(ii) *Dirichlet* 型空間 $(j=2)$ を除くと，任意の整数 $\nu \geq 2$ に対して $h_j^{\otimes\nu}$ は正則である．$h_2^{\otimes\nu}$ は弱正則である．

(iii) E を単位円 $\Delta = \{|z|<1\}$, $a=0$, $\rho \equiv 1$ としたとき，$\phi^{\otimes 2}$ が $h_2 \otimes h_2$ で *extremal* であるための必要十分条件は $\exists c \in \mathbb{C}$ *s.t.* $\phi = ck_q$ $(q \in \Delta \setminus \{0\})$ または $\phi(z) = cz$. ただし，$k_q(z) = -\log(1-\bar{q}z)$ は h_2 の核函数である．したがって，$h_2 \otimes h_2$ は弱正則であるが正則ではない．

証明. (i) まず Hilbert 空間 $h_j \cap \mathcal{R}_E$ は全て h_j で dense である．これは，Szegö 核や Bergman 核が Schottky であることとノルムが重みに関わらず同値であることより，h_j では $\bar{E}$ で正則な函数が dense であり，したがって命題 4 からわかる．次に，$h_j \cap \mathcal{R}_E$ は $\mathcal{R}_E$ の ideal である．これは，$\mathcal{R}_E$ は $\bar{E}$ で有界であるから一般論より明らか．したがって，h_j は全て meromorphically dense である．

次に，全ての h_j は maximal であることを示そう．そのためには，$a \in \partial E$ を固定して，$|f_p(a)|/\|f_p\|$ が $p \to a$ のとき ∞ に発散することを示せばよい．これは，命題 5 を用いると局所的評価に帰着し容易である．ただし，Dirichlet 型の場合は公式

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1} \frac{dxdy}{|z-a|^2} = \log\frac{|a|^2}{|a|^2-1}, \quad (|a|>1)$$

を用いる．

(ii) 定理 3 と (i) よりこれらの空間のテンソル積は弱正則である．空間 h_1, h_3 は共通零点を持たないので正則である．

(iii) $\phi = ck_q$ ならば $\phi^{\otimes 2} \in (h_2 \otimes h_2)_0^{\perp}$ は明らかである．$z^{\otimes 2} \in (h_2 \otimes h_2)_0^{\perp}$ を示そう．$\{z^i/\sqrt{i}\}_{i=1}^{\infty}$ は h_2 の CONS なので，$\{z^i \otimes z^j/\sqrt{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ はテンソル積 $h_2 \otimes h_2$ の CONS である．したがって，任意の $f \in h_2 \otimes h_2$ は

$$f = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{c_{ij}}{\sqrt{ij}} z^i \otimes z^j, \quad \Big(\sum_{i,j=1}^{\infty} |c_{ij}|^2 < \infty\Big)$$

と表される．このとき，$f \in (h_2 \otimes h_2)_0 \iff \sum_{i+j=n} c_{ij}/\sqrt{ij} = 0$ $(\forall n \geq 2)$. 特に，$c_{11} = 0$. しかし，$\langle f, z^{\otimes 2}\rangle = c_{11}$ より，$z^{\otimes 2} \in (h_2 \otimes h_2)_0^{\perp}$.

逆に $\phi^{\otimes 2} \in (h_2 \otimes h_2)_0^{\perp}$ とする．$\phi \neq 0$ と仮定してよい．このとき，補題 1 より $\exists q \in \Delta$ s.t. $\langle zf, \phi\rangle = f(q)\langle z, \phi\rangle$. $q \neq 0$ ならば，定理 2 の証明と同じようにして，$\exists c \in \mathbb{C}$ s.t. $\phi = ck_q$. $q = 0$ ならば，ϕ の内積から induce する linear functional は定数倍を除いて $f \to f'(0)$ の形．したがって，ϕ は z の定数倍であることが容易にわかる．これで (iii) の最初の主張は証明された．$h_2 \otimes h_2$ が正則でないことは，函数 z が核函数 k_w $(w \in \Delta)$ の定数倍ではないことから明らか． □

注意 4. [7, p.73] では $\phi = z$ のとき $\phi^{\otimes 2} \in (h_2 \otimes h_2)_0^{\perp}$ であることを見逃している ($a_2 = 0$ の場合). したがって，[7] の等号条件の証明は少し訂正が必要である．

参考文献

[1] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.

[2] J. Burbea, A Dirichlet norm inequality and some inequalities for reproducing kernel spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), no. 2, 279–285

[3] ——, Inequalities for reproducing kernel spaces, Illinois J. Math. **27** (1983), no. 1, 130–137.

[4] ——, Inequalities for holomorphic functions of several complex variables, Trans. Amer. Math. Soc. **276** (1983), no. 1, 247–266.

[5] L. de Branges and J. Rovnyak, *Square summable power series*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[6] H. M. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, Second edition, Springer, New York, 1992.

[7] S. Saitoh, Some inequalities for analytic functions with a finite Dirichlet integral on the unit disc, Math. Ann. **246** (1979), no. 1, 69–77.

[8] ——, Reproducing kernels of the direct product of two Hilbert spaces, Riazi J. Karachi Math. Assoc. **4** (1982), 1–20.

[9] ——, *Theory of reproducing kernels and its applications*, Longman Sci. Tech., Harlow, 1988.

[10] S. Scheinberg, Uniform approximation by meromorphic functions having prescribed poles, Math. Ann. **243** (1979), no. 1, 83–93.