

# Spline/wavelet approximation of functions and its applications to numerical computation of evolution equations

上野 敏秀 (Toshihide Ueno) and 岡田 正巳 (Masami Okada)

東京都立大学・理学研究科数学  
Department of Mathematics  
Tokyo Metropolitan University

## 1 はじめに

非線形発展方程式の数値解を、選点法により求める手法を提案する。Coifman スケーリング関数を基底関数とする選点近似は、高精度な近似ができることが知られていた ([6])。そこで、まずこの Coifman スケーリング関数を基底関数として発展方程式の数値解を求める計算スキームを述べる。

ところで、Coifman スケーリング関数は、対称な関数でなく、また次数をあげて滑らかさを上げようとする、サポートが非常に大きくなってしまふ、という点に不満が残る。そこで我々は、選点近似を可能にする一般的条件を調べ、それを元にカーディナル B-スプラインを用いて性質の良い基底関数の構成を行う。更に、Coifman スケーリング関数と同様に、選点近似公式を求め、それを発展方程式に適用し、高精度な数値解が得られることを検証する。

## 2 選点近似の条件

関数  $\varphi$  を  $\mathbb{R}$  上のコンパクト・サポートを持つ滑らかな関数とする。このとき、 $\varphi$  の Fourier 変換に関する次の条件 (a), (b) を  $r$  次の Strang-Fix 条件と呼ぶ:

(a)  $\widehat{\varphi}(0) = 1$ .

(b)  $\left. \frac{d^j \widehat{\varphi}(\xi)}{d\xi^j} \right|_{\xi=2\pi n} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = 0, 1, \dots, r$ .

Strang-Fix 条件に関する事実として、次の定理が知られている。

定理 2.1 ([3], [5]) 次の (i), (ii) は同値:

(i) 関数  $\varphi$  は、 $r$  次の Strang-Fix 条件を満たす。

(ii) 適当な  $j$  次多項式  $p_j$  があって、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_j(k)\varphi(x-k) = x^j, \quad j = 0, 1, \dots, r$$

となる。

ここで、次の (2.1) を  $r$  次の moment 条件と呼ぶ:

$$\left. \frac{d^j \widehat{\varphi}(\xi)}{d\xi^j} \right|_{\xi=0} = \delta_{j,0}, \quad j = 0, 1, \dots, r. \quad (2.1)$$

注意 2.1. 定理 2.1 (ii) は、 $\varphi$  の平行移動和による多項式の再生といえよう.

選点近似を可能にする条件は、Strang-Fix 条件と moment 条件であることが、次の命題から分かる.

命題 2.1. 次の (i)~(iii) は同値:

(i) 関数  $\varphi$  は、 $r$  次の Strang-Fix 条件と moment 条件を満たす.

$$(ii) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x-k)^j \varphi(x-k) = \delta_{j,0}, \quad j = 0, 1, \dots, r.$$

$$(iii) \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^j \varphi(x-k) = x^j, \quad j = 0, 1, \dots, r.$$

我々は、カーディナル B-スプラインを用いて、命題 2.1 を満たすように選点近似関数を構成する.

### 3 選点近似の誤差評価

$m$  次の Strang-Fix 条件と moment 条件を満たす関数  $\varphi$  による選点近似を考える. 関数  $f$  に対する選点近似関数  $S_j(f)(x)$  を Tian-Wells らに従って

$$S_j(f)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2^{-j}k) \varphi(2^j x - k), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

と定義すると、次の近似評価を得る.

定理 3.1 ([7]) 関数  $\varphi$  が、命題 2.1 の条件 ( $r = m$ ) を満たすとき、Sobolev 空間  $W^{N,p}(\mathbb{R})$  ( $N \leq m$ ) に属する関数  $f$  に対して選点近似関数  $S_j(f)$  を (3.1) で定義する. このとき、 $1 \leq p \leq \infty$  に対して

$$\|S_j(f) - f\|_{L^p} \leq 2^{-jN} C_{\varphi,p,N} \|f^{(N)}\|_{L^p}, \quad j = 1, 2, \dots$$

が成立する. ただし、 $C_{\varphi,p,N}$  は、 $\varphi$ ,  $p$ ,  $N$  だけに依存する定数である. 更に、 $n \leq N-1$  のとき導関数についても

$$\|(S_j(f) - f)^{(n)}\|_{L^p} \leq 2^{-j(N-n)} C_{\varphi,p,N} \|f^{(n)}\|_{L^p} \quad j = 1, 2, \dots$$

が成立する.

このような関数  $\varphi$  による選点近似は,  $L^2$  展開における内積の積分計算を不要にするため, 近似計算を簡単に行える. また, 非線形項, 特に,  $(S_j(f))^i$  の扱いが容易という利点がある. 例えば, 定理 3.1 を  $f^2$  に適用すれば, 次のように  $(S_j(f))^2$  の近似を選点法で簡単に計算できる.

定理 3.2 ([7]) 関数  $\varphi$  が命題 2.1 の条件 ( $r = m$ ) を満たし, 関数  $f$  が  $W^{N,p}(\mathbb{R}) \cap W^{N,\infty}(\mathbb{R})$  ( $N \leq m$ ) に属するならば,

$$\|(S_j(f))^2 - S_j(f^2)\|_{L^p} \leq 2^{-jN} C'_{\varphi,p,N} \|f\|_{W^{N,2p}}^2 \quad j = 1, 2, \dots$$

が成立する. ただし,  $C'_{\varphi,p,N}$  は,  $\varphi, p, N$  だけに依存する定数である.

例 3.1. 上記の定理を満たす関数  $\varphi$  の例としては,  $m$  次 Coifman スケーリング関数  $\varphi_m$  がある.

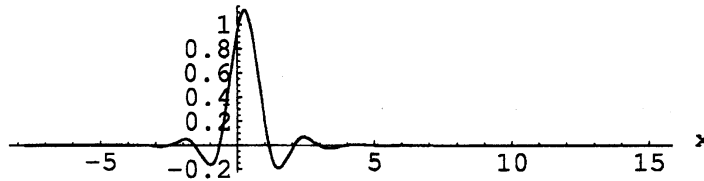


図 3.1: 8 次 Coifman スケーリング関数  $\varphi_8$ .

#### 4 選点スプラインの構成

例 3.1 の通り, 命題 2.1 の性質を持つ関数  $\varphi$  に,  $m$  次 Coifman スケーリング関数がある. しかし, この Coifman スケーリング関数は, 正規直交でコンパクト・サポートを持つが, 非対称であり, 滑らかさを上げる (次数  $m$  を大きくする) と, サポートが相当広くなることが不満であった. これらの点を改善すべく, カーディナル B-スプラインを用いて選点近似関数を構成する.

1 階カーディナル B-スプライン  $N_1$  を

$$N_1(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とし,  $m$  階カーディナル B-スプライン  $N_m$  を  $m$  回の合成積で

$$N_m(x) := \overbrace{N_1 * \dots * N_1}^m(x)$$

と定義する. この  $m$  階カーディナル B-スプラインを  $m/2$  だけ平行移動した関数  $N_m(\cdot + m/2)$  は,  $m-1$  次の Strang-Fix 条件を満たすが, moment 条件を満たさないため, 選点近似をすることができなかつた. 今回, 我々は,  $N_m(\cdot + m/2)$  をもとに選点近似を可能にする選点スプラインを構成する.

$\varphi$  として  $N_m(\cdot + m/2)$  の平行移動に重み  $\{w_l\}$  を付けた一次結合  ${}_1N_m$  を考える:

$${}_1N_m(x) := \sum_{l=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} w_l N_m(x + m/2 - l).$$

この  ${}_1N_m$  が,  $m$  次の moment 条件を満たせばよい. ここでは, 命題 2.1 (iii) を満たすように重み  $\{w_l\}$  を決める.  $n = 0, 1, \dots, m-1$  に対して

$$\begin{aligned} 0^n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^n {}_1N_m(-k) \\ &= \sum_{k=-[m/2]}^{[m/2]} k^n \sum_{l=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} w_l N_m(m/2 - k - l) \\ &= \sum_{l=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} w_l \sum_{i=l-[m/2]}^{l+[m/2]} (i-l)^n N_m(m/2 - i). \end{aligned} \quad (4.1)$$

この連立一次方程式 (4.1) を解くことにより, 重み  $\{w_l\}$  が求まる. 我々は,  ${}_1N_m$  を選点スプラインと呼ぶ.

**Example 4.1.**  $m$  に対する重み  $\{w_l\}$  は, 以下通りである.

- $m = 4$  のとき

$$(w_{-1}, w_0, w_1) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{6}\right).$$

- $m = 6$  のとき

$$(w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2) = \left(\frac{13}{240}, -\frac{7}{15}, \frac{73}{40}, -\frac{7}{15}, \frac{13}{240}\right).$$

- $m = 8$  のとき

$$(w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, w_3) = \left(-\frac{311}{15120}, \frac{22}{105}, -\frac{1657}{1680}, \frac{2452}{945}, -\frac{1657}{1680}, \frac{22}{105}, -\frac{311}{15120}\right).$$

## 5 発展方程式の数値計算

次の Burgers 方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \nu u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \nu > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & u(x, t) \rightarrow 0 \text{ (as } |x| \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (5.1)$$

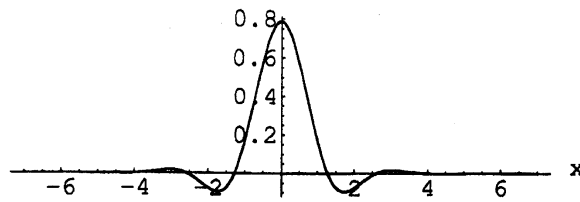


図 4.1: 選点スプライン  ${}_1N_8$ .

解  $u$  のスプライン選点近似または wavelet (Coifman スケーリング関数) 選点近似をそれぞれ

$$u_{S,J}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k(t) {}_1N_m(2^J x - k),$$

$$u_{C,J}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) \varphi_m(2^J x - k),$$

として, 係数  $\{s_k(t)\}$ ,  $\{c_k(t)\}$  を求める. これらの係数を求める方法として, Galerkin 法を用いる.

注意 5.1.  $uu_x$  の項の近似は,  $1/2(u^2)_x$  として, 定理 3.2 より係数を二乗した近似

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (s_k(t))^2 {}_1N_m(2^J x - k), \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k(t))^2 \varphi_m(2^J x - k)$$

の  $x$  微分を用いる.

任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して Galerkin 法による計算は, 以下の通りである:

● スプライン選点法

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (u_{S,J})_t + \frac{1}{2} (u_{S,J}^2)_x - \nu (u_{S,J})_{xx} \right\} {}_1N_m(2^J x - n) dx = 0,$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{p=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} \sum_{q=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} w_p w_q$$

$$\times \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{s}_k(t) \alpha_{m,k-n,p-q} + 2^{J-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k^2(t) (\beta_{m,k-n,p-q} - \beta_{m,k-n+1,p-q}) \right. \\ \left. - 2^{2J} \nu \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k(t) (\alpha_{m-1,k-n-1,p-q} - 2\alpha_{m-1,k-n,p-q} + \alpha_{m-1,k-n+1,p-q}) \right] = 0,$$

- wavelet 選点法

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (u_{C,J})_t + \frac{1}{2}(u_{C,J}^2)_x - \nu(u_{C,J})_{xx} \right\} \varphi_m(2^J x - n) dx = 0,$$

$\Leftrightarrow$

$$\dot{c}_n(t) + 2^{J-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2(t) \xi_{k-n} + 2^{2J} \nu \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) \eta_{k-n} = 0,$$

ただし,

$$\alpha_{m,a,b} := N_m(m/2 + a + b), \quad \beta_{m,a,b} := \int_{-\infty}^{\infty} N_{m-1}(y) N_m(y + a + b) dy,$$

$$\xi_a := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_m(y) \varphi_m(y + a) dy, \quad \eta_a := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_m(y) \varphi'_m(y + a) dy.$$

これらは時間  $t$  に関する常微分方程式系であり, 今回, 我々は 4 次の Runge-Kutta 法を用いて数値的に解いた.

## 6 数値実験

Burgers 方程式 (5.1) の数値実験結果を紹介する.

例 6.1. 初期条件は  $u_0(x) = e^{-8(x-1)^2}$ , 粘性係数を  $\nu = 2^{-5}$  とする. スプライン選点法 (SCM) には,  $8 (= m)$  階選点スプライン  ${}_1N_8$  を用い, wavelet 選点法 (WCM) には,  $8 (= m)$  次の Coifman スケーリング関数を用いた. その結果が図 6.1, 6.2 である. また, 比較のため 8 次中心差分による差分法 (FDM) の結果が, 図 6.3 である. 数値解のグラフはそれぞれ  $t = 0$  から  $t = 4$  まで 1 刻みでプロットしている. 粘性係数が大きいので, どの方法でも安定に解けていることがわかる. 実際, 誤差評価の図 6.5 を見ると, 3 つの方法とも精度良く数値解を得られている. ところが, 理論精度は, どの方法も同じであるにも関わらず, 2 つの選点法 (SCM, WCM) の精度が差分に比べて良いことがわかる.

例 6.2. 図 6.6~6.8 は, 例 6.1 の同様の初期条件と刻み幅であるが, 粘性係数を  $\nu = 1/144$  として数値実験を行ったものである. Burgers 方程式については, 粘性係数  $\nu$  が  $\nu \rightarrow 0$  のとき衝撃波が現れることが知られている. そのため, 粘性係数が小さくなると, 解は衝撃波に近い切り立ちを持つため, 安定に数値解を得られない部分も少しある. しかし, 粘性係数が小さい場合でも, 2 つの選点法の方が, 差分法に比べて精度良く数値解を求められていることがわかる.

## 7 2変数の選点スプライン

ここでは, 1 変数の選点スプラインの構成法を拡張して, 2 変数のテンソル積でない選点スプラインを構成する.

関数  $\varphi$  を  $\mathbb{R}^2$  上のコンパクト・サポートを持つ滑らかな関数とすると, 2 変数の Strang-Fix 条件は, 次のようになる:

$$(a) \hat{\varphi}(0, 0) = 1.$$

$$(b) D^{i,j} \hat{\varphi}(\xi, \eta) \Big|_{\xi=2\pi k, \eta=2\pi l} = 0, \quad \forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0), \quad 0 \leq i+j \leq r, \quad (i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

ただし,  $D^{i,j} = (\partial/\partial\xi)^i (\partial/\partial\eta)^j$  である.

また, moment 条件は,

$$D^{i,j} \hat{\varphi}(\xi, \eta) \Big|_{\xi=\eta=0} = \delta_{i+j,0}, \quad 0 \leq i+j \leq r, \quad (i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

となる. 1変数同様, 次の定理, 命題が成り立つ.

定理 7.1 ([3], [5]) 次の (i), (ii) は同値:

(i) 関数  $\varphi$  は,  $r$  次の Strang-Fix 条件を満たす.

(ii) 適当な多項式  $p_{i,j}$  があって

$$\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} p_r(k, l) \varphi(x-k, y-l) = x^i y^j, \quad 0 \leq i+j \leq r, \quad (i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

ただし,  $p_{i,j}(x, y)$  は,  $x^i y^j$  より小さい次数の項  $x^s y^t$  の一次結合からなる  $x$  と  $y$  の 2変数多項式.

命題 7.1. 次の (i)~(iii) は同値:

(i) 関数  $\varphi$  は,  $r$  次の Strang-Fix 条件と moment 条件を満たす.

$$(ii) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (x-k)^i (y-l)^j \varphi(x-k, y-l) = \delta_{i+j,0}, \quad 0 \leq i+j \leq r, \quad (i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

$$(iii) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} k^i l^j \varphi(x-k, y-l) = x^i y^j, \quad 0 \leq i+j \leq r, \quad (i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

今, 2変数選点スプライン  ${}_2N_m$  を

$${}_2N_m(x, y) := \sum_{p=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} \sum_{q=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} w_{p,q} N_m(x+m/2-p) N_m(y+m/2-q)$$

と定義し,  $m$  次の Strang-Fix 条件, moment 条件を満たすように重み  $\{w_{p,q}\}$  を決める. ここでは, 命題 7.1 (iii) を用いる.  $i, j = 0, 1, \dots, m-1$  に対して

$$\begin{aligned} \delta_{i+j,0} &= \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} k^i l^j {}_2N_m(-k, -l) \\ &= \sum_{k,l=-[m/2]}^{[m/2]} k^i l^j \sum_{|p+q| \leq [(m-1)/2]} w_{p,q} N_m(m/2-k-p) N_m(m/2-l-q) \\ &= \sum_{|p+q| \leq [(m-1)/2]} w_{p,q} \sum_{s=p-[m/2]}^{p+[m/2]} \sum_{t=q-[m/2]}^{q+[m/2]} (s-p)^i (t-q)^j N_m(m/2-s) N_m(m/2-t). \end{aligned}$$

この連立一次方程式を解き, 重み  $\{w_{p,q}\}$  を求める.

注意 7.1. 選点スプラインの対称性とサポートの狭さを考慮すると, 重み  $\{w_{p,q}\}$  は一意に定まる.

例 7.1.  $m$  に対する重み  $\{w_{p,q}\}$  は, 以下の通りである.

- $m = 4$  のとき

$$w_{0,0} = \frac{5}{3}, \quad w_{1,0} = w_{-1,0} = w_{0,1} = w_{0,-1} = -\frac{1}{6}.$$

- $m = 6$  のとき

$$w_{0,0} = \frac{211}{90}, \quad w_{1,0} = w_{-1,0} = w_{0,1} = w_{0,-1} = -\frac{37}{90},$$

$$w_{1,1} = w_{1,-1} = w_{-1,1} = w_{-1,-1} = -\frac{1}{36}, \quad w_{2,0} = w_{-2,0} = w_{0,2} = w_{0,-2} = -\frac{17}{360}.$$

注意 7.2. 1変数で構成した選点スプラインのテンソル積によっても, 2変数の選点スプラインが構成できる. しかし, 命題 7.1 によって導出した選点スプラインの方が, 同じ  $m$  であってもサポートが狭い関数になっている (ほぼ半分). 実際, テンソル積による重み  $\{w_p w_q\}$  は, 次のようになる:

- $m = 4$  のとき

$$w_0 w_0 = \frac{16}{9}, \quad w_1 w_0 = w_{-1} w_0 = w_0 w_1 = w_0 w_{-1} = -\frac{2}{9},$$

$$w_1 w_1 = w_1 w_{-1} = w_{-1} w_1 = w_{-1} w_{-1} = \frac{1}{36}.$$

## 8 まとめ

選点法による発展方程式の数値解を求めるスキームを構成した. Coifman スケーリング関数には無い対称性を持つ滑らかな基底関数を, カーディナル B-スプラインから構成し, 実際に Burgers 方程式のシミュレーションにより, その精度を確認した. 理論精度が同じという条件の元で, 選点法は, 差分法に比べ精度が高く, 選点法でも Coifman スケーリング関数を用いたものと, 我々が構成した選点スプラインの比較では, 選点スプラインの方が精度が良いことが得られた.

また, 2次元で選点スプラインを構成する場合, テンソル積による基底関数よりもサポートが狭く良い基底関数を構成することができた.

## 参考文献

- [1] C. K. Chui. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, Boston, 1992.
- [2] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 61. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [3] C. de Boor. *A practical guide to splines*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
- [4] R. DeVore and G. G. Lorentz. *Constructive Approximation*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.



- [5] I. J. Schoenberg. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.*, Vol. 4, pp. 45–99 (Part A), pp.112–141 (Part B), 1946.
- [6] J. Tian and R. O. Wells, Jr. Vanishing moments and biorthogonal Coifman wavelet system. In *Proc. of 4th International Conference on Mathematics in Signal Processing, 1996*, England, 1997. Univ. of Warwick.
- [7] T. Ueno, T. Ide and M. Okada. A wavelet collocation method for evolution equations with energy conservation property. *Bull. Sci. Math*, Vol. 127, pp. 569–583, 2003.



图 6.1: SCM( $\Delta x = 2^{-4}$ ,  $\Delta t = 2^{-8}$ )

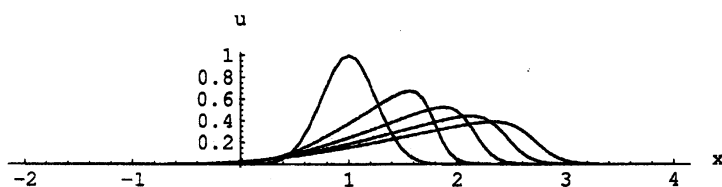


图 6.2: WCM( $\Delta x = 2^{-4}$ ,  $\Delta t = 2^{-8}$ )

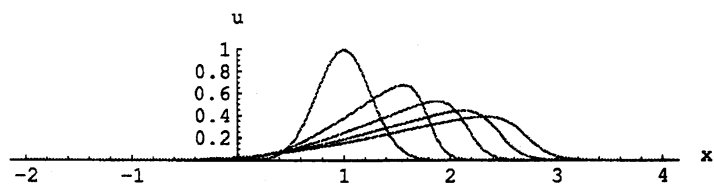


图 6.3: FDM( $\Delta x = 2^{-4}$ ,  $\Delta t = 2^{-8}$ )

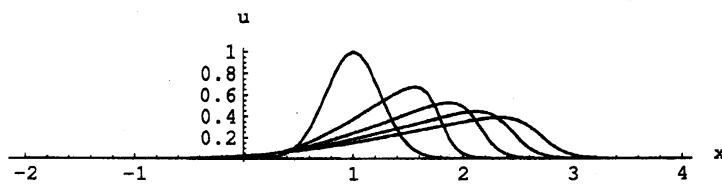


图 6.4: 解析解

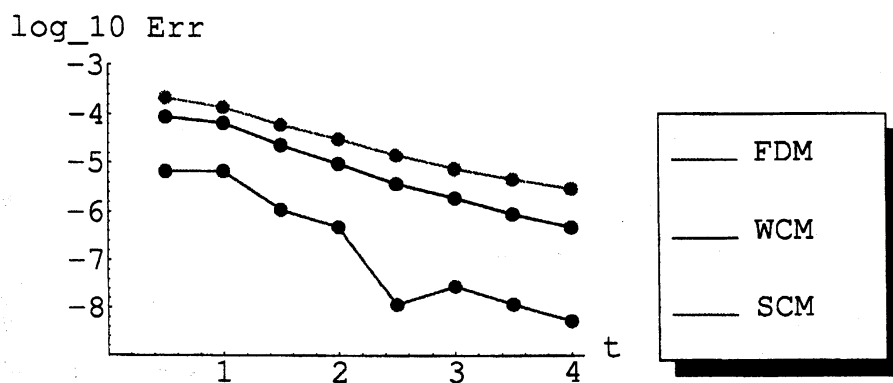


图 6.5: 最大误差

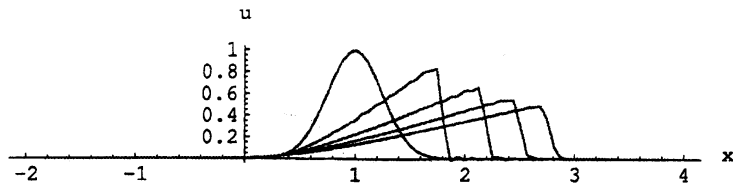


图 6.6: SCM( $\Delta x = 2^{-4}$ ,  $\Delta t = 2^{-8}$ )

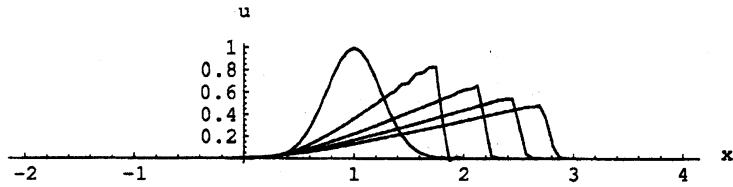


图 6.7: WCM( $\Delta x = 2^{-4}$ ,  $\Delta t = 2^{-8}$ )

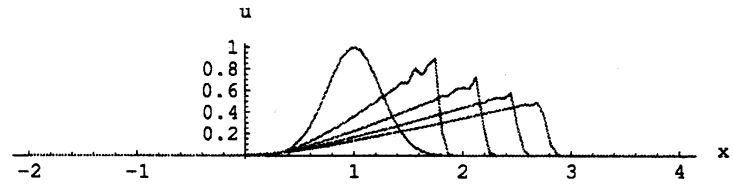


图 6.8: FDM( $\Delta x = 2^{-4}$ ,  $\Delta t = 2^{-8}$ )

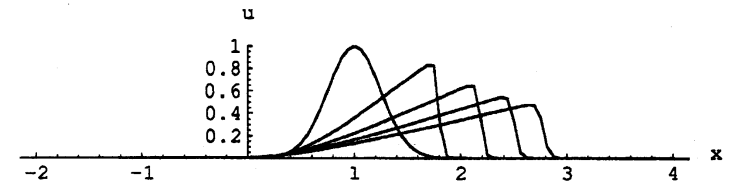


图 6.9: 解析解

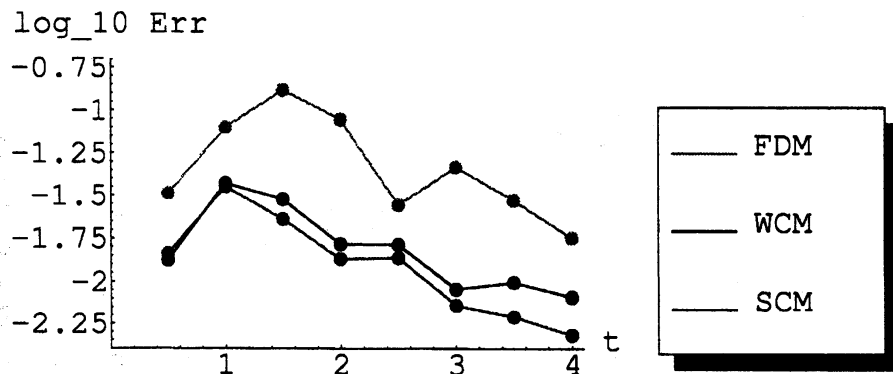


图 6.10: 最大误差