数理解析研究所講究録 1354 巻 2004 年 29-34

III_1 型部分因子環の分類について

増田俊彦 (高知大理)

1 序

本稿は [11] の簡単な解説である. まず本稿における設定及び記号について説明する. 特に断らない限り $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ は $[\mathcal{M}:\mathcal{N}]<\infty$ である III_1 型部分因子環である. $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ へは index を最小にする conditional expectation E が一意的に存在するが, 以下では φ は $\varphi\circ E=\varphi$ を満たす faithful normal state としておく. 部分因子環に関しては basic construction によっていつでも因子環の包含列 $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}\subset\mathcal{M}_1\subset\mathcal{M}_2\subset\cdots$ を構成できる. $\mathcal{M}_1$ は $\mathcal{M}$ と Jones projection $e_{\mathcal{N}}$ によって生成される von Neumann 環であるがこの場合因子環となっている. すると $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ に対して standard invariant とよばれる有限次元 von Neumann 環の列 $\{\mathcal{M}'\cap\mathcal{M}_k\subset\mathcal{N}'\cap\mathcal{M}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が得られる.

次に $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ に対してモジュラー自己同型群によって同時接合積をとる. つまり $\widetilde{\mathcal{N}}\subset\widetilde{\mathcal{M}}:=\mathcal{N}\rtimes_{\sigma^{\varphi}}\mathbf{R}\subset\mathcal{M}\rtimes_{\sigma^{\varphi}}\mathbf{R}$ を考えるのだが, これは今の場合 II_{∞} 型部分因子環である. この部分因子環からも standard invariant $\{\widetilde{\mathcal{M}}'\cap\widetilde{\mathcal{M}}_k\subset\widetilde{\mathcal{N}}'\cap\widetilde{\mathcal{M}}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が得られる. ここで重要な仮定をおく.

仮定 1 $\{\mathcal{M}'\cap\mathcal{M}_k\subset\mathcal{N}'\cap\mathcal{M}_k\}_{k=1}^{\infty}=\{\widetilde{\mathcal{M}}'\cap\widetilde{\mathcal{M}}_k\subset\widetilde{\mathcal{N}}'\cap\widetilde{\mathcal{M}}_k\}_{k=1}^{\infty}$

本稿で解説するのは次の定理である.

定理 2 $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ を仮定 1 を満たす III_1 型部分因子環とする. ここで $\mathcal{N},\mathcal{M}$ が単射的かつ standard invariant が [14] の意味で強従順であるとする. この時 $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}\cong\mathcal{N}^{\mathrm{st}}\otimes\mathcal{R}_{\infty}\subset\mathcal{M}^{\mathrm{st}}\otimes\mathcal{R}_{\infty}$ となる. ここで $\mathcal{N}^{\mathrm{st}}\subset\mathcal{M}^{\mathrm{st}}$ は standard invariant から定まる canonical な II_1 型部分因子環で, $\mathcal{R}_{\infty}$ は単射的 III_1 型因子環である.

この定理に関して少し注意をしておく. [14] において Popa はかなり一般的な分類定理を証明しており (因子環の型にはよらない), その定理の系として, 定理 2 を証明している. 本講演ではこの方法とは違い, Connes と Haagerup による単射的 III_1 型因子環の一意性の証明 [4], [6] に基づいた証明の方針を解説する. また仮定 1 については, この仮定が成り立つための条件が [7] によって求められている. III_1 型部分因子環が finite depth という条件を満たせば, いつでも成立する. 群作用との関連では, この仮定は Sutherland-Takesaki の意味での modular invariant[16] が自明である事に相当する.

証明のアイディアを簡単に説明する. $T>0$ を固定し, $\theta:=\sigma_T^{\varphi}$ とおいて, $\mathcal{Q}\subset\mathcal{P}:=\mathcal{N}\rtimes_{\theta}\mathbf{Z}\subset\mathcal{M}\rtimes_{\theta}\mathbf{Z}$ を考える. これは III_{λ} 型部分因子環 (但し $T=-\log\lambda/2\pi$) になるので, この上の $\mathbf{T}$ の dual action $\hat{\theta}$ を分類する, というのが基本方針である. ここで注意すべきは, このようにして生じる III_{λ} 型部分因子環はすでに Loi[9] によって分類されている事で定理 2 と同様の結果が成り立っている事である. 言うまでもなく, この Loi の結果自体は Popa の II_1 型部分因子環の分類理論 [12], [13] に基づいている.

2 III_λ 型部分因子環への $\mathbf{T}$ の作用

この節では $\theta \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ が判れば，定理 2 が従う事を説明する．

命題 3 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ を上の如くとする．この時, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P} \cong \mathcal{N}^{\mathrm{st}} \otimes \mathcal{R}_\lambda \subset \mathcal{M}^{\mathrm{st}} \otimes \mathcal{R}_\lambda$ である．

証明の概略. 仮定 1 及び [7] によって θ が長田-幸崎の意味 [2] で強自由である事と, θ の Loi 不変量が自明である事を用いる事により, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ の standard invariant が, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ のそれと等しい事がわかる．$\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ の type II standard invariant もこれらに等しい事がすぐ分かるので, [9] によって命題が成立する事が分かる． □

次の命題は model action の一意性に相当する．

命題 4 (1) $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ に対して, $\hat{\alpha}$ が [17] の意味で強自由でかつ $\mathcal{Q} \rtimes_\alpha \mathbf{Z} \subset \mathcal{P} \rtimes_\alpha \mathbf{Z} \cong \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ なら, $\alpha \sim \mathrm{id}_\mathcal{P} \otimes \sigma$ である．ここで σ は $\mathcal{R}_0$ への $\mathbf{Z}$ の outer action である．
(2) α を [17] の意味で強自由な $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ への $\mathbf{T}$ の作用でかつ, $\mathcal{Q} \rtimes_\alpha \mathbf{T} \subset \mathcal{P} \rtimes_\alpha \mathbf{T} \cong \mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ となったとする．すると $\alpha \sim \mathrm{id}_\mathcal{P} \otimes \hat{\sigma}$ である．

命題 4(1) の証明には, $\mathrm{Cnt}(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ と $\overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ の [17], [18] による特徴付け ([8, Theorem 1] の部分因子環版) が必要になるが，ここではこれ以上詳しくは述べない．(2) は (1) と竹崎双対定理を組み合わせる事により示される．

$\mathcal{R}_\infty$ の faithful normal state φ^0 を一つ固定し, $\theta^0 := \sigma_T^{\varphi^0}$ とおく．$\mathcal{R}_\infty \rtimes_{\theta^0} \mathbf{Z} \cong \mathcal{R}_\lambda$ である．$\mathcal{Q} \otimes \mathcal{R}_\lambda \subset \mathcal{P} \otimes \mathcal{R}_\lambda$ 上 $\hat{\theta}_t \otimes \widehat{\theta^0}_{-t}$ を考えるとこれが命題 4(2) の仮定を満たす事が証明できる．よって, $\hat{\theta}_t \otimes \widehat{\theta^0}_{-t} \sim \mathrm{id}_\mathcal{P} \otimes \hat{\sigma}_t$ となる．

命題 5 $\hat{\theta}_t \cong \hat{\theta}_t \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{R}_\lambda} \otimes \hat{\sigma}_t$ が成り立つなら, 定理 2 が成立する．

証明. 次の様にして, $\hat{\theta}_t \sim \mathrm{id}_{\mathcal{M}^{\mathrm{st}}} \otimes \widehat{\theta^0}_t$ がわかる．

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_t &\sim \hat{\theta}_t \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{R}_\lambda} \otimes \hat{\sigma}_t \\
&\sim \hat{\theta}_t \otimes \widehat{\theta^0}_{-t} \otimes \widehat{\theta^0}_t \\
&\sim \mathrm{id}_\mathcal{P} \otimes \hat{\sigma}_t \otimes \widehat{\theta^0}_t \\
&\sim \mathrm{id}_{\mathcal{M}^{\mathrm{st}}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{R}_\lambda} \otimes \hat{\sigma}_t \otimes \widehat{\theta^0}_t \\
&\sim \mathrm{id}_{\mathcal{M}^{\mathrm{st}}} \otimes \widehat{\theta^0}_t
\end{aligned}
$$

最後の自己同型は, $\mathcal{N}^{\mathrm{st}} \otimes \mathcal{R}_\lambda \subset \mathcal{M}^{\mathrm{st}} \otimes \mathcal{R}_\lambda$ 上の自己同型である．よって竹崎双対定理により, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \cong \mathcal{N}^{\mathrm{st}} \otimes \mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{M}^{\mathrm{st}} \otimes \mathcal{R}_\infty$ が分かる． □

命題 5 により, 定理 2 の証明には，一種の model action splitting を証明すれば良いことがわかる．そして model action splitting は次の二つの条件から導かれる．
(i) $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \cong \mathcal{N} \otimes \mathcal{R}_\lambda \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{R}_\lambda$.
(ii) $\theta \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$.

まず (i) より, φ_1 を $\mathcal{R}_\lambda$ 上の periodic state とすれば, $\theta = \sigma_T^\varphi \sim \sigma_T^\varphi \otimes \sigma_T^{\varphi_1} = \theta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{R}_\lambda}$ となるので, $\hat{\theta} \sim \hat{\theta} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{R}_\lambda}$ がわかる．

また (i) より, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \cong \mathcal{N} \otimes \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{R}_0$ が分かるので, partial isometry の列 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$ で $u_n u_n^* + u_n^* u_n = 1$ かつ $\mathcal{M}$ で centralizing sequence になるような物が存在する．U を $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ 内の implementing unitary とし，また仮定によって $\theta = \lim \mathrm{Ad}\, w_n$ となる $\{w_n\} \subset U(\mathcal{N})$ を

とる．そこで，$v_n := u_n w_n^* U$ と定義すると，$\hat{\theta}_t(v_n) = e^{it}v_n$，$v_n v_n^* + v_n^* v_n \approx 1$ かつ $\{v_n\}$ が $\mathcal{P}$ 内で centralizing sequence になる．(≈ 1 の部分はうまく u_n，w_n をとれば $= 1$ とできる.) よって action を込めてで，[1] のように $\mathcal{R}_0$ の部分をテンソル積で分離する事ができる．つまり $\hat{\theta} \sim \hat{\theta} \otimes \hat{\sigma}$ となるので，命題 5 の仮定が成立する．

最後に "λ-stability" $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \cong \mathcal{N} \otimes \mathcal{R}_\lambda \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{R}_\lambda$ に関しては，[1] の property L'_λ の "local characterization" が [4] で与えられており，これと $\theta \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ を組み合わせる事により証明できる．よって問題は θ の漸近内部性の証明に帰着される．

3 モジュラー自己同型の漸近内部性

[3] で Connes は II_1 型因子環の自己同型の漸近内部性を次の様に特徴付けた．

定理 6 $\mathcal{M}$ を II_1 型因子環とする．$\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ に対し，次は同値．
(1) $\alpha \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M})$
(2) $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(C^*(\mathcal{M}, J\mathcal{M}J))$ で，$\mathcal{M}$ 上 $\tilde{\alpha} = \alpha$，$J\mathcal{M}J$ 上自明となる物が存在．

系 7 $\mathcal{M}$ が Effros-Lance の意味で semi-discrete([5] 参照) なら，$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}) = \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M})$．

この系は $C^*(\mathcal{M}, J\mathcal{M}J) \cong \mathcal{M} \otimes_{\min} J\mathcal{M}J$ が semi-discrete 性から従う事による．

[4] では，$\mathcal{M}$ が単射的 III_1 型因子環の時も，上と同様に $\mathcal{M} \otimes_{\min} J\mathcal{M}J \cong C^*(\mathcal{M}, J\mathcal{M}J)$ である事を利用して $C^*(\mathcal{M}, J\mathcal{M}J)$ 上の自己同型 $\tilde{\theta}$ で $\tilde{\theta}|_{\mathcal{M}} = \theta$，$\tilde{\theta}|_{J\mathcal{M}J} = \mathrm{id}$ となる $\tilde{\theta}$ を構成し，$\sigma_T^\varphi \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M})$ を示している．

部分因子環論では包含関係の semi-discrete 性という定義はないが，Effros-Lance 式の従順性の特徴付けというのが，Popa によって得られている．[15] において，Popa は symmetric enveloping algebra $\mathcal{M} \underset{e_{\mathcal{N}}}{\boxtimes} \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ を導入し，従順性の一つの同値な条件として，(II_1 型部分因子環に関して) $C^*_{\min}(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}) \cong C^*(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, J\mathcal{M}J)$ を得ている．前者は symmetric enveloping algebra の中で生成される C^* 環で後者は $B(L^2(\mathcal{M}))$ 内で生成される C^* 環である．

上述した Connes の結果の部分因子環の類似としては次の定理がある ([10])．

定理 8 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ を II_1 型部分因子環とすると次は同値．
(1) $\alpha \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$
(2) $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(C^*(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, J\mathcal{M}J))$ で，$\mathcal{M}$ 上 $\tilde{\alpha} = \alpha$，$J\mathcal{M}J$ 上自明，$\tilde{\alpha}(e_{\mathcal{N}}) = e_{\mathcal{N}}$ となる物が存在．

系 9 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ を従順な II_1 型部分因子環とすると，$\overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathrm{Ker}\,\Phi$．但し $\Phi(\alpha) = \{\alpha|_{\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}_k}\}_{k=1}^\infty$ は Loi 不変量である．

この系は，$\alpha \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)$ に対しては $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ 上の自己同型 $\alpha \otimes \mathrm{id}$ が $\mathcal{M} \underset{e_{\mathcal{N}}}{\boxtimes} \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ に自然に拡張される事と，Effros-Lance 式の部分因子環の従順性の特徴付けを組み合わせる事により得られる．$\alpha \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)$ の条件が必要な事に関して補足をしておく．Symmetric enveloping algebra を考える利点の一つとして $\mathcal{M} \underset{e_{\mathcal{N}}}{\boxtimes} \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ 内で basic construction $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \subset \cdots$ が構成できる事が挙げられるが，この時 $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ が成立し，この関係を考慮すると $\alpha \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)$ でなくてはならない事が判る．

ここで本来の問題にもどる事にする．強従順な III_1 型部分因子環に対して $\theta = \sigma_T^\varphi \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ となるか，が問題であったが，この問題を扱うのに，symmetric enveloping algebra を用いる．

$\theta|_{\mathcal{M}'\cap\mathcal{M}_k} = \mathrm{id}$ が全ての k について成り立つので $\theta\otimes\mathrm{id}$ は $\mathcal{M}\underset{e_{\mathcal{N}}}{\boxtimes}\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ 上の自己同型 $\theta\boxtimes\mathrm{id}$ に $\theta\boxtimes\mathrm{id}(e_{\mathcal{N}}) = e_{\mathcal{N}}$ となるように拡張できる．これと Effros-Lance 式の特徴付けによって，$C^*(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, J\mathcal{M}J)$ 上の自己同型 $\tilde{\theta}$ が $\tilde{\theta}|_{\mathcal{M}} = \theta$, $\tilde{\theta}|_{J\mathcal{M}J} = \mathrm{id}$ かつ $\tilde{\theta}(e_{\mathcal{N}}) = e_{\mathcal{N}}$ となるように構成する事ができる．これを用いると $\sigma_T^{\varphi} \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ が証明できるが，この過程で bicentralizer の triviality が必要になる．まず漸近内部的自己同型の特徴付けが [4] と同様に以下のように与えられる．

定理 10 次は同値.
(1) $\theta \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$.
(2) 任意の $\psi_1,\cdots,\psi_n \in (\mathcal{M}_*)_+$ と $\varepsilon > 0$ に対して，次のような $0 \neq x \in \mathcal{N}$ が存在する．

$$\|x\xi_j - \theta(\xi_j)x\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|x\xi_j\|.$$

ここで $\xi_j \in L^2(\mathcal{M})_+$ は φ_j の representing vector である．

この定理を適用して，$\sigma_T^{\varphi} \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ を証明する．まず $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 及び ε を固定する．$\varphi := [\mathcal{M}:\mathcal{N}]\sum\psi_i \circ E$ とおくと，Pimsner-Popa 不等式を用いる事により，$\psi_i \leq \varphi$ が判る．$\varphi\circ E = \varphi$ も明らかである．

$T_j x\xi_\varphi := x\xi_j$ と T_j を定義すると，$T_j \in J\mathcal{M}J$ である．そこで $b_j := JT_j^*J \in \mathcal{M}$ と置くと，$\|b_j\| \leq 1$ かつ $b_j^*\xi_j = \xi_j b_j = \xi_\varphi$ である．$X := \sum_{j=1}^n e_{\mathcal{N}}|b_j^* - Jb_j^*J|^2 e_{\mathcal{N}}$ と置く．$f(x) \in C_c(\mathbf{R}_+)$ を [4] のようにとって，$1 - e_{\mathcal{N}} + X + e_{\mathcal{N}}|f(\Delta_\varphi) - 1|^2 e_{\mathcal{N}}$ という作用素を考える．ノルムを見る事により，

$$0 \leq 1 - e_{\mathcal{N}} + X + e_{\mathcal{N}}|f(\Delta_\varphi) - 1|^2 e_{\mathcal{N}} \leq 4n + 2$$

が判るので，

$$0 \leq 4n + 2 - (1 - e_{\mathcal{N}} + X + e_{\mathcal{N}}|f(\Delta_\varphi) - 1|^2 e_{\mathcal{N}}) \leq 4n + 2$$

が成立する．$\|4n + 2 - (1 - e_{\mathcal{N}} + X + e_{\mathcal{N}}|f(\Delta_\varphi) - 1|^2 e_{\mathcal{N}})\| \leq 4n + 2$ が判るが，ここで $X\xi_\varphi = 0$, $e_{\mathcal{N}}\xi_\varphi = \xi_\varphi$, $f(\Delta_\varphi)\xi_\varphi = \xi_\varphi$ が成り立つ事より，ξ_φ が実際にノルムを達成する事が確認できる．よって $\|4n + 2 - (1 - e_{\mathcal{N}} + X + e_{\mathcal{N}}|f(\Delta_\varphi) - 1|^2 e_{\mathcal{N}})\| = 4n + 2$ となる．ここで $\|4n + 2 - (1 - e_{\mathcal{N}} + \tilde{\theta}(X) + e_{\mathcal{N}}|f(\Delta_\varphi) - 1|^2 e_{\mathcal{N}})\| = 4n + 2$ が成り立つ事を仮定しよう．$\tilde{\theta}(X) = \sum_{j=1}^n e_{\mathcal{N}}|\theta(b_j^*) - Jb_j^*J|^2 e_{\mathcal{N}}$ である事に注意すると，これから単位ベクトル $\xi \in L^2(\mathcal{M})$ が次の様に取れる．
(a) $\|(1 - e_{\mathcal{N}})\xi\| \leq \varepsilon$,
(b) $\|\theta(b_j^*)e_{\mathcal{N}}\xi - Jb_j^*Je_{\mathcal{N}}\xi\| \leq \varepsilon$, $1 \leq j \leq n$,
(c) $\|(f(\Delta_\varphi) - 1)e_{\mathcal{N}}\xi\| \leq \varepsilon$.

(a) より $\eta := e_{\mathcal{N}}\xi \in L^2(\mathcal{N})$ とすると，η はほとんどノルム 1 のベクトルである．さらに適当に η を $x\xi_\varphi$, $x \in \mathcal{N}$ の形の元で近似してやると，(b) から $\|\theta(b_j^*)x\xi_\varphi - Jb_j^*Jx\xi_\varphi\| \approx$ 小，となる．(c) を使うことで，$x\xi_\varphi$ を $\xi_\varphi x$ にうまく置き換えて，$\|\theta(b_j^*)\xi_\varphi x - x\xi_\varphi b_j\| = \|\theta(b_j^*\xi_\varphi)x - x\xi_j\| = \|\theta(\xi_j)x - x\xi_j\| \approx$ 小，となって証明が完成する．

上の証明での一つのポイントは，$\|4n+2-(1-e_{\mathcal{N}}+\tilde{\theta}(X)+e_{\mathcal{N}}|f(\Delta_\varphi)-1|^2e_{\mathcal{N}})\| = 4n+2$ となっている点である．すでに $\tilde{\theta} \in \mathrm{Aut}(C^*(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, J\mathcal{M}J))$ が構成できる事はみているが，この等式が成立するためには大雑把にいって，$\tilde{\theta}$ が $C^*(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, J\mathcal{M}J, \Delta_\varphi^{it})$ の自己同型にまでのびていればよい．(厳密には $C^*(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, J\mathcal{M}J, \Delta_\varphi^{it})$ では大きすぎるので，適当な部分代数

を考えなくてはいけないが，ここでは詳述する事はさける.) そのために $C^*(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, J\mathcal{M}J)$ と $C^*_{\min}(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, \mathcal{M}^{\mathrm{opp}})$ の対応に注目する．この対応で Δ_φ^{it} は自然に $L^2(\mathcal{M} \underset{e_{\mathcal{N}}}{\boxtimes} \mathcal{M}^{\mathrm{opp}})$ 上のユニタリ $\Delta_\varphi^{it} \boxtimes \Delta_{\varphi^{\mathrm{opp}}}^{-it}$ に対応し，$C^*_{\min}(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}, \Delta_\varphi^{it} \boxtimes \Delta_{\varphi^{\mathrm{opp}}}^{-it})$ 上では自然に $\theta \otimes \mathrm{id}$ の拡張 $\tilde{\theta}$ が考えられる．($\mathcal{N} = \mathcal{M}$ の時は上の $\Delta_\varphi^{it} \boxtimes \Delta_{\varphi^{\mathrm{opp}}}^{-it}$ は $\Delta_\varphi^{it} \otimes \Delta_\varphi^{it}$ に，$\tilde{\theta}$ は $\mathrm{Ad}\, \Delta_\varphi^{it} \otimes 1$ に対応している.)

そこで $C^*_{\min}(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}, \Delta_\varphi^{it} \boxtimes \Delta_{\varphi^{\mathrm{opp}}}^{-it})$ と $C^*(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, J\mathcal{M}J, \Delta_\varphi^{it})$ の間に自然な同型対応があれば，この対応を通じて，$\tilde{\theta}$ が $C^*(\mathcal{M}, e_{\mathcal{N}}, J\mathcal{M}J, \Delta_\varphi^{it})$ 上で考えられる．この同型を示すために bicentralizer の自明性が必要になるのである．(上にも注意した通り，厳密にはこれらの環では大きすぎるので適当な部分環を考える.)

部分因子環に対する relative bicentralizer の定義をここで述べておく．

定義 11 φ を $\varphi \circ E = \varphi$ となる faithful normal state とする．
(1) $C(\varphi) := \{(x_n) \in \ell^\infty(\mathbf{N}, \mathcal{N}) \mid \|[x_n, \varphi]\| \to 0, (n \to \infty)\}$ と定義する．
(2) $B(\varphi) := \{a \in \mathcal{M} \mid [a, x_n] \to 0, (n \to \infty)\ \sigma\text{-strongly for any } (x_n) \in C(\varphi)\}$ と定義し，これを relative bicentralizer と呼ぶ．

明らかに $\mathcal{N}' \cap \mathcal{M} \subset B(\varphi) \subset \mathcal{N}'_\varphi \cap \mathcal{M}$ であるので，もし $\mathcal{N}' \cap \mathcal{M} = \mathcal{N}'_\varphi \cap \mathcal{M}$ なら $B(\varphi) = \mathcal{N}' \cap \mathcal{M}$ となる．Bicentralizer の自明性は大雑把にいって $\mathcal{M}'_\varphi \cap \mathcal{M} = \mathbf{C}$ となるような faithful normal state の存在を意味しているが，relative bicentralizer では $\mathcal{M}'_\varphi \cap \mathcal{M}_k = \mathcal{M}' \cap \mathcal{M}_k$ となる faithful normal state の存在を意味している．これについては [6] と同様の議論によって，Popa が [14] で証明している．(この条件は [14] での部分因子環に対する central freeness と関係がある.) つまり仮定 1 より，$\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}_k = \mathcal{M}'_{\varphi_0} \cap (\mathcal{M}_k)_{\varphi_0}$ が dominant weight φ_0 について成り立つのだが，一方で relative commutant theorem $\mathcal{M}'_{\varphi_0} \cap \mathcal{M}_k = \mathcal{M}'_{\varphi_0} \cap (\mathcal{M}_k)_{\varphi_0}$ が成立するので，結局 $\mathcal{M}'_{\varphi_0} \cap \mathcal{M}_k = \mathcal{M}' \cap \mathcal{M}_k$ が成り立つ．これを出発点として [6] と同様の議論を行えば良い．

$B(\varphi) = \mathcal{N}' \cap \mathcal{M}$ がわかると，$E^\varphi_{\mathcal{N}' \cap \mathcal{M}}(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x)$, $P_n(x) = \sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j^n \mathrm{Ad}\, u_j^n x$, $\sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j^n = 1$, $\lambda_j^n > 0$, かつ $\sup_j \|[\varphi, u_n^j]\| \to 0$, $(n \to \infty)$ となるように $E^\varphi_{\mathcal{N}' \cap \mathcal{M}}$ を近似できる．(一種の Dixmier approximation のようなもの.) この事実が，上の C^* 環の同型を示すのに決定的となる．

References

[1] Araki, H., *Asymptotic ratio set and property L'_λ*, Publ. Res. Inst. Math. Soc. **6** (1970), 443–460.

[2] Choda, M. and Kosaki, H., *Strongly outer actions for an inclusion of factors*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 315–332.

[3] Connes, A., *Classification of injective factors*, Ann. Math. **104** (1976), 73–115.

[4] Connes, A., *Type III_1 factors, property L'_λ and closure of inner automorphisms*, J. Operator Theory **13** (1985), 189–211.

[5] Effros, E. G. and Lance, E. C., *Tensor products of operator algebras*, Adv. Math. **25** (1977), 1–34.

[6] Haagerup, U., *Connes' bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III_1*, Acta Math. **158** (1987), 95–148.

[7] Izumi, M., *On type II and type III principal graphs for subfactors*, Math. Scand. **73** (1993), 307–319.

[8] Kawahigashi, Y., Sutherland, C.E., and Takesaki, M., *The structure of the automorphism group of an injective factor and the cocycle conjugacy of discrete abelian group actions*, Acta Math. **169** (1992), 105–130.

[9] Loi, P., *On automorphisms of subfactors*, J. Funct. Anal **141** (1996), 275–293.

[10] Masuda, T., *Extension of automorphisms of a subfactor to the symmetric enveloping algebra*, Internat. J. Math. **12** (2001), 637–659.

[11] Masuda, T., *An analogue of Connes-Haagerup approach to classification of subfactors of type III_1*, preprint.

[12] Popa, S., *Classification of amenable subfactor of type II*, Acta Math. **172** (1994), 163–255.

[13] Popa, S., *Approximate innerness and central freeness for subfactors: A classification result*, Subfactors (Araki, H. et al., eds.), World Scientific, (1994), 274–293.

[14] Popa, S., *Classification of subfactors and their endomorphisms*, Regional Conference Series in Mathematics (1995), no. 86.

[15] Popa, S., *Some properties of the symmetric enveloping algebra of a subfactor, with applications to amenability and property T*, Doc. Math. **4** (1999), 665–744.

[16] Sutherland, C. and Takesaki, M., *Actions of discrete amenable groups on injective factors of type III_λ*, $\lambda \neq 1$, Pacific. J. Math. **137** (1989), 405–444.

[17] Winsløw, C., *Strongly free actions on subfactors*, Internat. J. Math **4** (1993), 675–688.

[18] Winsløw, C., *Approximately inner automorphisms on inclusions of type III_λ factors*, Pacific J. Math. **166** (1994), 385–400.