

# On quasi-equivalence of quasifree representations of the infinite dimensional symplectic group

九州大学大学院数理学府 嶋田 芳仁

本稿では正準交換関係から生成される代数 (CCR 代数) の表現を用いて無限次元シンプレクティック群のユニタリ表現を与え, さらに得られた表現たちが (準) 同値であるための必要十分条件を与える.

## 1. CCR 代数と準自由状態

まず CCR 代数の定義からはじめよう.

**定義 1.1.**  $K$  を複素線型空間,  $\Gamma : K \rightarrow K$  を  $\Gamma^2 = 1$  を満たす反線型作用素,  $\gamma(f, g)$  を  $f$  について反線型,  $g$  について線型で非退化な対称形式で  $\gamma(\Gamma f, \Gamma g) = -\gamma(g, f)$  を満たすとする. このときテンソル代数  $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes^n K$  を次の関係式 (正準交換関係)

$$f \otimes g - g \otimes f - \gamma(f, g)1, \quad f^* - \Gamma f$$

で生成されるイデアルで割ってできた複素\*代数  $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$  を CCR 代数と呼ぶ.

記号: 生成消滅作用素の記号との対応のため  $f \in K \cap \mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$  を  $B(f)$  と記す.

上の意味での CCR 代数を Fock 空間の上を実現するので Fock 空間とその上での生成消滅作用素を定義する.

**定義 1.2.**  $L$  を Hilbert 空間とする. このとき Boson Fock 空間を次の式で定める:

$$\mathcal{F}_b(L) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n L, \quad \otimes_s^0 L := \mathbf{C}, \quad \Psi = 1,$$

$$\langle f_1 \otimes_s \dots \otimes_s f_n, g_1 \otimes_s \dots \otimes_s g_m \rangle = \delta_{mn} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^n \langle f_j, g_{\sigma(j)} \rangle.$$

ただし  $\otimes_s$  は対称テンソル積,  $\mathfrak{S}_n$  は  $\{1, 2, \dots, n\}$  の置換全体を表す.

Boson Fock 空間  $\mathcal{F}_b(L)$  上の消滅作用素  $a(f)$ ,  $f \in L$  は次の条件を満たす作用素である:

$$a(f)f_1 \otimes_s \dots \otimes_s f_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \langle f, f_j \rangle f_1 \otimes_s \dots \otimes_s f_{j-1} \otimes_s f_{j+1} \dots \otimes_s f_n,$$

$$a(f)\Psi := 0$$

Boson Fock 空間  $\mathcal{F}_b(L)$  上の生成作用素  $a^\dagger(f)$ ,  $f \in L$  は次の条件を満たす作用素である:

$$a^\dagger(f_1)f_2 \otimes_s \dots \otimes_s f_{n+1} := \sqrt{n+1}f_1 \otimes_s \dots \otimes_s f_{n+1},$$

$$a^\dagger(f)\Psi := f.$$

**補題 1.3.**  $f, g \in L$  に対し生成消滅作用素  $b^\dagger(f), b(g)$  は可閉作用素である. また  $\bar{A}$  を作用素  $A$  の閉包とすると,  $\mathcal{F}_b(L)$  の有限粒子部分空間は  $\overline{b^\dagger(f)}, \overline{b(g)}, f, g \in L$  の芯である. よって生成消滅作用素の和や積が定義できる.

上で定義した CCR 代数にしても Fock 空間とその上の生成消滅作用素にしても具体的な物理系を表すものは一切含んではいない. 上で与えたのは量子場を考える際の一般的な枠組である. 当然, 一般的な枠組に加えて, 具体的な物理系を反映させるためのパラメータを与えなければならない. パラメータをどのような形で導入すれば良いかを考えるためにに具体例を見ることにする.

**例 1.4.** (Klein-Gordon 場)  $K := \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \oplus \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ ,  $\Gamma(f \oplus g) := \bar{f} \oplus \bar{g}$  とし

$$\gamma(f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2) := \sqrt{-1}[(f_1, g_2)_{L^2} - (g_1, f_2)_{L^2}]$$

とする. いま  $m > 0$  を質量として

$$\omega := \omega(k) := \sqrt{|k|^2 + m^2}, \quad k \in \mathbf{R}^d$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} \phi_m(f) &:= a^\dagger \left( \frac{1}{\sqrt{\omega}} f \right) + a \left( \frac{1}{\sqrt{\omega}} \bar{f} \right), \\ \pi_m(g) &:= \sqrt{-1} \{ a^\dagger (\sqrt{\omega} g) - a (\sqrt{\omega} \bar{g}) \} \end{aligned}$$

で定義される  $\phi_m$  を時刻 0 における量子 Klein-Gordon 場,  $\pi_m$  を  $\phi_m$  の正準共役運動量という.

$\phi_m$  や  $\pi_m$  と定義?? で定めた CCR(正準交換関係) の関係を見る. そのために

$$P_m(f \oplus g) = \frac{1}{2} (f + \sqrt{-1} \sqrt{\omega} g) \oplus \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\omega}} f + g \right)$$

で定義される  $K$  上の作用素を考える. さらに  $f \oplus g \in K \oplus K$  に対して

$$\alpha(P_m)(B(f \oplus g)) := a^\dagger(P_m(f \oplus g)) + a(P_m \Gamma(f \oplus g))$$

と定義をすると  $\alpha(P_m)$  は  $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$  の代数演算を保ち, 次を満たす.

$$\alpha(P_m)(B(f \oplus 0)) = \phi_m(f), \quad \alpha(P_m)(B(0 \oplus g)) = \pi_m(g)$$

このことから上の CCR 代数  $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$  と作用素  $P_m$  によって場の作用素とその共役運動量の両方を表せている, つまり実際の物理系が記述できることがわかった.

**定義 1.5.** 次の条件を満たす  $K$  上の作用素  $P$  を basis projection と呼ぶ.

- (1)  $P^2 = P$ ,
- (2)  $Pf \neq 0$  ならば  $\gamma(f, Pf) > 0$ ,
- (3)  $\gamma(f, Pg) = \gamma(Pf, g)$ ,  $f, g \in K$ ,
- (4)  $\Gamma P \Gamma = 1 - P$ .

例?? で定義した線型作用素  $P_m$  は basis projection である. 以下では Klein-Gordon 場で述べた事を basis projection を使って一般化する.

$K$  には内積が定義されていないが,  $K$  上の basis projection  $P$  が与えられると  $\gamma(\cdot, P\cdot)$  により  $PK$  上に内積が定義される. 同様に  $-\gamma(\cdot, (1-P)\cdot)$  が  $(1-P)K$  上の内積となる. よって  $\gamma(\cdot, (2P-1)\cdot)$  は  $K$  上の内積となる.  $K_P$  を  $K$  の内積  $\gamma(\cdot, (2P-1)\cdot)$  に関する完備化とする.

また  $L$  を Hilbert 空間とすると,

$$\mathcal{F}_b^{\text{fin}}(L) := \{(f_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{F}_b(L) \mid \Gamma \Gamma \Gamma \Gamma \Gamma \Gamma \Gamma f_n = 0\}$$

とすると,  $\mathcal{F}_b^{\text{fin}}(L)$  上で生成消滅作用素の和と積が定義される.  $\mathfrak{A}_{\text{CCR}}(L)$  を生成消滅作用素の和と積から生成される  $*$ -代数とする.

**補題 1.6.**  $(K, \Gamma, \gamma)$  を定義 ?? で述べたものとする.  $P$  を  $K$  上の basis projection,  $\alpha(P)$  を次で定義される  $*$ -準同型写像とする.

$$\alpha(P) : \mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma) \rightarrow \mathfrak{A}_{\text{CCR}}(PK_P),$$

$$\alpha(P)(B(f)) := a^\dagger(Pf) + a(P\Gamma f), f \in K.$$

このとき  $(\mathcal{F}_b(PK_P), \alpha(P), \Psi)$  は CCR 代数  $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$  の  $*$ -表現である.

さらに

$$\varphi_P(Q) := \langle \Psi, \alpha(P)(Q)\Psi \rangle, \quad Q \in \mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$$

とすると,  $\varphi_P$  は CCR 代数上の状態であり,  $\varphi_P$  に関する GNS 表現は  $(\mathcal{F}_b(PK_P), \alpha(P), \Psi)$  とユニタリ同値である. また  $\varphi_P$  は次を満たす.

$$\varphi_P(B(f_1) \dots B(f_{2n-1})) = 0,$$

$$\varphi_P(B(f_1) \dots B(f_{2n})) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \prod_{j=1}^n \varphi_P(B(f_{\sigma(j)}) B(f_{\sigma(n+j)})).$$

ただし  $\mathfrak{S}$  は次の条件を満たす  $\{1, 2, \dots, n\}$  の置換全体

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n), \sigma(j) < \sigma(j+n), j = 1, 2, \dots, n.$$

いま定義した  $\varphi_P$  は, Fock 空間とその上の生成消滅作用素を用いて実現できるという意味で Fock 状態と呼ばれているが, ここからは準自由状態 (quasifree state) と呼ばれる, Fock 状態よりも一般的な状態について考えていく.

**定義 1.7.**  $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$  上の状態  $\varphi$  が次の関係式を満たしているとき,  $\varphi$  を準自由状態と呼ぶ.

$$\varphi(B(f_1) \dots B(f_{2n-1})) = 0,$$

$$\varphi(B(f_1) \dots B(f_{2n})) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \prod_{j=1}^n \varphi(B(f_{\sigma(j)}) B(f_{\sigma(n+j)})).$$

ただし  $\mathfrak{S}$  は次の条件を満たす  $\{1, 2, \dots, n\}$  の置換全体

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n), \sigma(j) < \sigma(j+n), j = 1, 2, \dots, n.$$

この条件を満たす置換の総数は

$$\#\mathfrak{S} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

先ほど定義した Fock 状態は準自由状態である.

準自由状態  $\varphi$  に対して

$$S(f, g) := \varphi(B(f)^* B(g)), \quad f, g \in K$$

で半双線型対称形式  $S : K \times K \rightarrow K$  を導入する. この  $S$  を  $\gamma$  の polarization と呼ぶ. ([?]) polarization は次を満たす.

$$\begin{aligned} S(f, f) &\geq 0, \\ S(f, g) - S(\Gamma g, \Gamma f) &= \gamma(f, g). \end{aligned}$$

$P : K \rightarrow K$  を basis projection とするとき,  $\varphi_P$  から定まる  $\gamma$  の polarization のことも basis projection と呼ぶことにする.

$S$  を  $\varphi$  から定まる  $\gamma$  の polarization,  $(\mathcal{H}_S, \pi_S, \Omega_S)$  を  $\varphi$  による CCR 代数  $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$  の GNS 表現とする.  $(\mathcal{H}_S, \pi_S, \Omega_S)$  を用いて欲しい量を直接, 計算するのは難しいので, 以下で述べるように良く知られている Fock 表現の計算に帰着することを考える. 次の式で  $K$  に内積を定義する.

$$(f, g)_S := S(f, g) + S(\Gamma g, \Gamma f).$$

$K_S$  を  $(\cdot, \cdot)_S$  に関する  $K$  の完備化とし,  $S, \gamma_S \in \mathfrak{B}(K_S)$  を次式で定義する.

$$(f, Sg)_S := S(f, g), \quad (f, \gamma_S g)_S := \gamma(f, g).$$

ここで  $K_S \oplus K_S$  上のシンプレクティック形式  $\hat{\gamma}_S$  と反線型作用素  $\hat{\Gamma}_S$  を次のように導入する.

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_S &:= \Gamma_S \oplus \Gamma_S, \\ \hat{\gamma}_S(f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2) &:= (f_1, \gamma_S f_2)_S - (g_1, \gamma_S g_2)_S \end{aligned}$$

さらに  $K_S \oplus K_S$  上の basis projection  $P_S$  を次で定義する.

$$P_S(f \oplus g) = \gamma_S^{-1}(Sf + \sqrt{S(1-S)}g) \oplus -\gamma_S^{-1}(\sqrt{S(1-S)}f + (1-S)g).$$

任意の  $h_1, h_2 \in K_S \oplus K_S$  に対して

$$(h_1, h_2)_{P_S} := \hat{\gamma}_S(h_1, (2P_S - 1)h_2)$$

とすると, これは  $K_S \oplus K_S$  上の内積となる. この内積に関する  $K_S \oplus K_S$  の完備化を  $K_{P_S}$  とする.

$(\mathcal{H}_{P_S}, \pi_{P_S}, \Omega_{P_S})$  を CCR 代数  $\mathfrak{A}(K_S \oplus K_S, \hat{\gamma}_S, \hat{\Gamma}_S)$  の  $\varphi_{P_S}$  に関する GNS 表現とする. このとき以下のようにして  $(\mathcal{H}_S, \pi_S, \Omega_S)$  を  $(\mathcal{H}_{P_S}, \pi_{P_S}, \Omega_{P_S})$  を用いてあらわすことができる.

まず \*-準同型写像  $\alpha : \mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma) \rightarrow \mathfrak{A}(K_S \oplus K_S, \hat{\gamma}_S, \hat{\Gamma}_S)$  を

$$\alpha(B(f)) := B(f \oplus 0)$$

と定義する. このとき線型写像  $u_\alpha : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_{P_S}$  を次の式で定める.

$$u_\alpha(\pi_S(A)\Omega_S) = \pi_{P_S}(\alpha(A))\Omega_{P_S}, \quad A \in \mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma).$$

ここで

$$\varphi_{P_S}(B(f \oplus 0)^* B(g \oplus 0)) = P_S(f \oplus 0, g \oplus 0) = S(f, g) = \varphi_S(B(f)^* B(g))$$

より

$$\varphi_{P_S}(\alpha(A)) = \varphi_S(A), \quad A \in \mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$$

が成り立つ. これは写像  $u_\alpha$  が内積を保存することを表している. これにより  $\mathcal{H}_{P_S}$  の閉部分空間  $u_\alpha \mathcal{H}_S$  と  $\mathcal{H}_S$  とを同一視する. このことを先に定義した Fock 空間の流儀で書けば  $\mathcal{H}_S = \mathcal{F}_b(P_S(K_S \oplus 0))$  と見なす, ということである. またこの同一視により

$\mathcal{H}_S$  上の作用素  $\pi_S(A)$  と  $\mathcal{H}_{P_S}$  上の作用素  $\pi_{P_S}(\alpha(A))$  の  $D(\pi_S) := \pi_S(\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma))\Omega_S$  への制限  $\pi_{P_S}(\alpha(A))|_{D(\pi_S)}$  を同一視する.

## 2. FOCK 空間

ここでは前の節の最後に述べた  $\mathcal{H}_S$  と  $\mathcal{H}_{P_S}$  の関係についてもう少し詳しく見ていくことにする.

**定義 2.1.**  $L$  を Hilbert 空間とする. このとき

$$e(u) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \otimes_s^n u, \quad u \in L$$

を exponential vector という.

この exponential vector を用いて次が示せる.

**補題 2.2.**  $L_1, L_2$  を Hilbert 空間とする. このときユニタリ作用素  $U : \mathcal{F}_b(L) \rightarrow \mathcal{F}_b(L_1) \otimes \mathcal{F}_b(L_2)$  で, 次の条件を満たすものがただ一つ存在する.

$$Ue(u_1 + u_2) = e(u_1) \otimes e(u_2), \quad u_1 \in L_1, u_2 \in L_2$$

つまり Hilbert 空間として, 次の同一視ができる.

$$\mathcal{F}_b(L) = \mathcal{F}_b(L_1) \otimes \mathcal{F}_b(L_2).$$

さらに次の補題が成り立つことに注意する.

**補題 2.3.**

$P_S K_{P_S} = [P_S(K_S \oplus 0)] \oplus [0 \oplus E_S(\{0\})K_S] = [P_S(0 \oplus K_S)] \oplus [E_S(\{1\})K_S \oplus 0]$   
ただし  $E_S(B)$  は,  $\mathbf{R}$  のボレル集合  $B$  に対する作用素  $S$  のスペクトル測度を表す.

上の2つの Lemma から次式のような Fock 空間の分解を得る.

$$(2.1) \quad \mathcal{H}_{P_S} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{L}_S$$

ただし  $\mathcal{L}_S := \mathcal{F}_b(0 \oplus E_S(\{0\})K_S)$  である. よって特に  $0 < S < 1$  のとき  $\mathcal{H}_{P_S} = \mathcal{H}_S$  が成り立つことがわかる.

次に無限次元シンプレクティック群の表現を考えるために, 良く知られている Fock 空間の分解(??)よりも細かい分解を考える.

$L$  を Hilbert 空間として

$$\mathcal{F}_b^+(L) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^{2n} L, \quad \mathcal{F}_b^-(L) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^{2n+1} L$$

と定義する. このとき  $\mathcal{F}_b^+(L)$  を Boson Fock 空間  $\mathcal{F}_b(L)$  の偶数粒子部分空間,  $\mathcal{F}_b^-(L)$  を Boson Fock 空間  $\mathcal{F}_b(L)$  の奇数部分空間と呼ぶ.

**定義 2.4.** exponential vector の偶数部分, 奇数部分をそれぞれ次のように定義する.

$$e^+(u) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n)!}} \otimes_s^{2n} u, \quad e^-(u) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}} \otimes_s^{2n+1} u.$$

**補題 2.5.**  $L$  を Hilbert 空間として  $u_j \in L, j = 1, 2, \dots, N, N \in \mathbf{N}$  を  $u_i \neq \pm u_j (i \neq j)$  を満たすとする. このとき  $\{e^+(u_j)\}_{j=1}^N$  は線型独立であり, さらに  $\{e^+(u) | u \in L\}$  は  $\mathcal{F}_b^+(L)$  を生成する.  $\{e^-(u_j)\}_{j=1}^N$  と  $\mathcal{F}_b^-(L)$  に関しても同様の主張が成り立つ.

Fock 空間において exponential vector を考えることで Fock 空間の分解 (??) が得られたように, 偶数粒子部分空間, 奇数粒子部分空間においても同様のこと, つまり次の補題が成り立つ.

**補題 2.6.**  $L_1, L_2$  を Hilbert 空間とする. このときユニタリ作用素  $U_+, U_-$  で次の関係を満たすものがただ一つ存在する.

$$\begin{aligned} U_+ : \mathcal{F}_b^+(L_1 \oplus L_2) &\rightarrow [\mathcal{F}_b^+(L_1) \otimes \mathcal{F}_b^+(L_2)] \oplus [\mathcal{F}_b^-(L_1) \otimes \mathcal{F}_b^-(L_2)], \\ U_+ e^+(x_1 \oplus x_2) &:= [e^+(x_1) \otimes e^+(x_2)] \oplus [e^-(x_1) \otimes e^-(x_2)] \\ U_- : \mathcal{F}_b^-(L_1 \oplus L_2) &\rightarrow [\mathcal{F}_b^+(L_1) \otimes \mathcal{F}_b^-(L_2)] \oplus [\mathcal{F}_b^-(L_1) \otimes \mathcal{F}_b^+(L_2)], \\ U_- e^+(x_1 \oplus x_2) &:= [e^+(x_1) \otimes e^-(x_2)] \oplus [e^-(x_1) \otimes e^+(x_2)]. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_S^+ &:= \mathcal{F}_b^+(P_S(K_S \oplus 0)), \quad \mathcal{H}_S^- := \mathcal{F}_b^-(P_S(K_S \oplus 0)), \\ \mathcal{H}_{P_S}^+ &:= \mathcal{F}_b^+(P_S(K_S \oplus 0)), \quad \mathcal{H}_{P_S}^- := \mathcal{F}_b^-(P_S(K_S \oplus 0)), \\ \mathcal{H}_{P_S}^+ &:= \mathcal{F}_b^+(P_S K_{P_S}), \quad \mathcal{H}_{P_S}^- := \mathcal{F}_b^-(P_S K_{P_S}), \end{aligned}$$

とすると, 偶数粒子部分空間  $\mathcal{H}_{P_S}^+$  と奇数粒子部分空間  $\mathcal{H}_{P_S}^-$  は次のように分解される.

$$\mathcal{H}_{P_S}^+ = (\mathcal{H}_S^+ \otimes \mathcal{L}_S^+) \oplus (\mathcal{H}_S^- \otimes \mathcal{L}_S^-), \quad \mathcal{H}_{P_S}^- = (\mathcal{H}_S^+ \otimes \mathcal{L}_S^-) \oplus (\mathcal{H}_S^- \otimes \mathcal{L}_S^+).$$

### 3. $sp(\infty)$ の準自由状態による表現

ここから本題の無限次元シンプレクティック群の表現を考えるが, ここでは無限次元シンプレクティック Lie 環の表現を考えて, それを指数関数の肩に乗せる形で群の表現を実現をする.

シンプレクティック Lie 環といっても無限次元なので, 位相の入れ方などで様々なクラスのもの考えられるが, ここでは次の条件を満たす  $K$  上の有限階数線型作用素  $H$  全体  $sp(\infty)$  を考えよう.

$$\Gamma H \Gamma = -H, \quad H^\dagger = H$$

ただし  $H^\dagger$  は  $\gamma(H^\dagger f, g) = \gamma(f, Hg)$  で定義される  $K$  上の線型作用素である.

$H \in sp(\infty)$  に対して  $\exp(\sqrt{-1}H)$  で与えられる  $1+$ 有限階数作用素全体を  $Sp(\infty)$  と置く.

$sp(\infty)$  は次で定義される積に関して Lie 代数になっている.

$$\sqrt{-1}[H, H'] := \sqrt{-1}(HH' - H'H).$$

ここで任意の  $H \in sp(\infty)$  は適当な  $f_j, g_j \in K$  を用いて次のように表される.

$$Hf = \sum_{j=1}^N \gamma(g_j, f) f_j.$$

ただし  $H \in sp(\infty)$  に対して  $f_j, g_j$  の選び方は一意ではない.

**定義 3.1.**  $H \in sp(\infty)$  が  $Hf = \sum_{j=1}^N \gamma(g_j, f) f_j$  の形で書けているとき, CCR 代数の元  $q(H)$  を次の式で定義する.

$$q(H) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N B(f_j) B(g_j)^*.$$

**注意 3.2.**  $H \in sp(\infty)$  に対し  $f_j, g_j$  の取り方は一意ではないが,  $q(H)$  は  $f_j, g_j$  の取り方によらないことが証明できる.

写像  $q: sp(\infty) \rightarrow \mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$  は線型写像で次を満たす.

$$\sqrt{-1}[q(H), q(H')] = q(\sqrt{-1}[H, H']).$$

よって  $q_S := \pi_S \circ q$  とすると,  $q_S$  は  $sp(\infty)$  から  $\mathcal{H}_S$  上の非有界線型作用素たちへの表現になっている.

同様に  $\hat{q}$  を  $K_S \oplus K_S$  上のシンプレクティック Lie 代数から  $\mathfrak{A}(K_S \oplus K_S, \hat{\gamma}_S, \hat{\Gamma}_S)$  への準同型写像として

$$\hat{q}_{P_S} := \pi_{P_S} \circ \hat{q}, \quad q_{P_S}(H) := \hat{q}_{P_S}(H \oplus 0)$$

と定義すると,  $q_{P_S}$  は  $sp(\infty)$  から  $\mathcal{H}_{P_S}$  上の非有界作用素たちへの表現である.

$sp(\infty)$  の表現を構成したので次に表現の同値性を定義する.

**定義 3.3.**

(1)  $sp(\infty)$  の表現  $(\mathcal{H}, \pi)$  が次の条件 (i), (ii) を満たすとき,  $(\mathcal{H}, \pi)$  を正則表現 (regular representation) と呼ぶ.

(i) 作用素  $A$  の定義域を  $D(A)$  と書く. このとき  $\bigcap_{H \in sp(\infty)} D(\pi(H))$  が Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の稠密な部分空間  $\mathcal{H}_0$  を含み,  $\mathcal{H}_0$  上で次を満たす.

$$\sqrt{-1}[\pi(H), \pi(H')] = \pi(\sqrt{-1}[H, H']), \quad H, H' \in sp(\infty).$$

(ii)  $\mathcal{H}_0$  上で全ての  $\pi(H)$ ,  $H \in sp(\infty)$  が本質的自己共役作用素である.

(2)  $(\mathcal{H}_1, \pi_1), (\mathcal{H}_2, \pi_2)$  を  $sp(\infty)$  の正則表現とし,  $\mathcal{M}_j$  を  $\exp(\sqrt{-1}\pi_j(H))$ ,  $H \in sp(\infty)$  により生成される von Neumann 環とする. このとき

$$\iota(\exp(\sqrt{-1}\pi_1(H))) = \exp(\sqrt{-1}\pi_2(H)), \quad H \in sp(\infty)$$

を満たす\*-同型写像  $\iota: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$  が存在するとき, 2つの表現  $(\mathcal{H}_1, \pi_1)$  と  $(\mathcal{H}_2, \pi_2)$  は準同値であるという. またこのとき  $\pi_1 \sim_q \pi_2$  と書く.

いま考えている  $sp(\infty)$  の表現  $(\mathcal{H}_{P_S}, q_{P_S})$  と  $(\mathcal{H}_S, q_S)$  は, ともに  $sp(\infty)$  の正則表現であることがわかる. よって次で定義される作用素たちは well-defined である.

$$Q_S(H) := \exp(\sqrt{-1}q_S(H)),$$

$$\hat{Q}_{P_S}(\hat{H}) := \exp(\sqrt{-1}\hat{q}_{P_S}(\hat{H})),$$

$$Q_{P_S}(H) := \hat{Q}_{P_S}(H \oplus 0).$$

さらに上記の作用素たちによって生成される von-Neumann 環を考える:

$$\mathcal{M}_S := \{Q_S(H) \mid H \in sp(\infty)\}'' , \quad \mathcal{M}_{P_S} := \{Q_{P_S}(H) \mid H \in sp(\infty)\}''.$$

**補題 3.4.**  $Q_{P_S}(H) = Q_S(H) \otimes 1_{\mathcal{L}_S}$ . ただし  $1_{\mathcal{L}_S}$  は  $\mathcal{L}_S$  上の恒等作用素.

さて  $q(H)$  は定義??にあるように, 2個の元  $B(f)$  と  $B(g)$  の積の和で定義されている. このことから容易にわかるように, Fock 空間の偶数粒子部分空間, 奇数粒子部分空間は  $sp(\infty)$  の表現  $q_S(H)$  や  $q_{P_S}(H)$  の作用に関して不変な部分空間である. よってシンプレクティック群のユニタリ表現  $Q_S(H)$ ,  $Q_{P_S}(H)$  たちを不変部分空間 (偶数粒子部分空間, 奇数粒子部分空間) に制限したものを定義しておく必要がある.

$$Q_S^+(H) := Q_S(H)|\mathcal{H}_S^+, \quad Q_S^-(H) := Q_S(H)|\mathcal{H}_S^-,$$

$$Q_{P_S}^+(H) := Q_{P_S}(H)|\mathcal{H}_{P_S}^+, \quad Q_{P_S}^-(H) := Q_{P_S}(H)|\mathcal{H}_{P_S}^-$$

とすると, これらはそれぞれ  $\mathcal{H}_S^+$ ,  $\mathcal{H}_S^-$ ,  $\mathcal{H}_{P_S}^+$ ,  $\mathcal{H}_{P_S}^-$  上のユニタリ作用素である.

さらに  $q_S^+$  (resp.  $q_{P_S}^+$ ) を  $q_S$  (resp.  $q_{P_S}$ ) の  $\mathcal{H}_S^+$  (resp.  $\mathcal{H}_{P_S}^+$ ) への制限,  $q_S^-$  (resp.  $q_{P_S}^-$ ) を  $q_S$  (resp.  $q_{P_S}$ ) の  $\mathcal{H}_S^-$  (resp.  $\mathcal{H}_{P_S}^-$ ) への制限として,

$$\mathcal{M}_S^+ := \{Q_S^+(H) | H \in sp(\infty)\}'' , \quad \mathcal{M}_{P_S}^+ := \{Q_{P_S}^+(H) | H \in sp(\infty)\}'' ,$$

$$\mathcal{M}_S^- := \{Q_S^-(H) | H \in sp(\infty)\}'' , \quad \mathcal{M}_{P_S}^- := \{Q_{P_S}^-(H) | H \in sp(\infty)\}''$$

とする.

$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  を2つの Hilbert 空間とすると,  $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  上の有界線型作用素  $A$  を次のように書く:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i.$$

このとき次の分解が成立する.

**補題 3.5.**  $H \in sp(\infty)$  に対して

$$Q_{P_S}^+(H) = \begin{pmatrix} Q_S^+(H) \otimes 1_+ & 0 \\ 0 & Q_S^-(H) \otimes 1_- \end{pmatrix},$$

$$Q_{P_S}^-(H) = \begin{pmatrix} Q_S^+(H) \otimes 1_- & 0 \\ 0 & Q_S^-(H) \otimes 1_+ \end{pmatrix}$$

ただし  $1_+$ ,  $1_-$  はそれぞれ  $\mathcal{L}_S^+$ ,  $\mathcal{L}_S^-$  上の恒等作用素である.

#### 4. $Sp(\infty)$ の表現の構造

ここでは  $\gamma$  の polarization  $S$  を一つ取ってきて固定したときの  $Sp(\infty)$  の表現  $q_S$ ,  $q_S^+$ ,  $q_S^-$  の構造について見ていく. 表現の構造は  $S$  が basis projection であるかそうでないかで異なる.

まずはじめに  $S$  が basis projection の場合を考える.

**補題 4.1.**  $K_S = K$  とする. また  $\mathcal{E}_S$  を  $SK$  上の C.O.N.S. 全体とする.

- (1)  $e = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}_S$  ならば  $\{e_n, \Gamma e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $K$  の C.O.N.S. である.
- (2)  $H_{g,h} : K \rightarrow K$  を次で定義する.

$$H_{g,h}f := \gamma(g, f)h + \gamma(h, f)g + \gamma(\Gamma g, f)\Gamma h + \gamma(\Gamma h, f)\Gamma g, \quad f, g, h \in K.$$

このとき  $H_{g,h}$  は  $sp(\infty)$  の元である. つまり次を満たす:

$$\Gamma H_{g,h} \Gamma = -H_{g,h}, \quad H_{g,h}^\dagger = H_{g,h}.$$



(3)  $sp(\infty)$  は以下で定義される  $H(e; j, k, l)$ ,  $1 \leq j \leq 4$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $e \in \mathcal{E}_S$  の実線型結合で生成される.

$$\begin{aligned} H(e; 1, k, l) &:= H_{e_k, e_l}, & H(e; 2, k, l) &:= H_{e_k, \Gamma e_l}, \\ H(e; 3, k, l) &:= H_{\sqrt{-1}e_k, e_l}, & H(e; 4, k, l) &:= H_{\sqrt{-1}e_k, \Gamma e_l}. \end{aligned}$$

さらに

$$(4.1) \quad q(H(e; 1, k, l)) = B(e_k)B(e_l)^* + B(e_l)B(e_k)^* + \delta_{kl},$$

$$(4.2) \quad q(H(e; 2, k, l)) = B(e_k)^*B(e_l)^* + B(e_k)B(e_l),$$

$$(4.3) \quad q(H(e; 3, k, l)) = \sqrt{-1}[B(e_k)B(e_l)^* - B(e_l)B(e_k)^*],$$

$$(4.4) \quad q(H(e; 4, k, l)) = \sqrt{-1}[B(e_k)B(e_l) - B(e_k)^*B(e_l)^*].$$

この補題の (3) についてコメントをする.  $H(e; j, k, l)$  は  $sp(\infty)$  の生成元となっているわけだが,  $S$  が basis projection であるから,  $B(e_k)$  が粒子を生成する作用素に対応し,  $B(e_k)^*$  が粒子を消滅させる作用素に対応することに注意をすると,  $sp(\infty)$  の生成元  $H(e; i, j, k)$  を CCR 代数へ表現したものは, 粒子を消してつくる (式 (?)), つくって消す (式 (?)), 2 個つくって 2 個消す (式 (?), (?)) という操作に対応していることがわかる.

これを用いると次の補題の証明は容易である.

**補題 4.2.**

(1)  $\Omega_S$  は  $\mathcal{M}_S^+$  の巡回ベクトルである.

(2) 任意の  $e_1 \in SK$  に対して,  $\pi_S(B(e_1))\Omega_S$  は  $\mathcal{M}_S^-$  の巡回ベクトルである.

さらにこの補題と個数作用素と呼ばれる作用素のスペクトルに関する性質を用いて次が証明される.

**補題 4.3.**  $q_S^+$  は  $\mathcal{H}_S^+$  上の,  $q_S^-$  は  $\mathcal{H}_S^-$  上の既約表現である.

さらに背理法により次が証明される.

**補題 4.4.**  $sp(\infty)$  の表現  $q_S^+$  と  $q_S^-$  はユニタリ非同値である.

次に  $S$  が basis projection でない場合を考える. 次の事実を用いる.

**補題 4.5.**  $\mathcal{M}$  を Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の von Neumann 環とし,  $E \in \mathcal{M}'$  を正射影作用素,  $C(\mathcal{M}) := \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$  とする. さらに  $E \in \mathcal{M}'$  に対して  $\mathcal{M}_E := \{Q_E \mid Q \in \mathcal{M}\}$ ,  $Q_E := Q|E\mathcal{H}$  とおく. このとき写像

$$\iota: \mathcal{M} \ni Q \mapsto Q_E \in \mathcal{M}_E$$

は \*-準同型で作用素強位相に関して連続である. さらに  $\iota$  が \*-同型であるためには次が成り立つとが必要十分である.

$$C(E) := \min\{F \in C(\mathcal{M}) \mid F \geq E, F^2 = F^* = F\} = 1$$

この補題を用いて次の補題が証明される.

**補題 4.6.**  $E_+$  を  $\mathcal{H}_S$  から  $\mathcal{H}_S^+$  への正射影とする. ( $E_+$  は  $\mathcal{M}_S'$  の元となる.) このとき

$$C(E_+) = 1,$$

つまり  $q_S, q_S^+, q_S^-$  は全て準同値である.

ところで  $\Omega_{P_S}$  は  $C(\mathcal{M}_{P_S}^+)$  に対する分離ベクトルである。実際,  $a \in C(\mathcal{M}_{P_S}^+)$  の  $\mathcal{H}_S^+, \mathcal{H}_S^-$  への制限を  $a_+ \in C(\mathcal{M}_S^+)$ ,  $a_- \in C(\mathcal{M}_S^-)$  として

$$a\Omega_{P_S} = \begin{pmatrix} a_+ \otimes 1_+ & 0 \\ 0 & a_- \otimes 1_- \end{pmatrix} \Omega_{P_S} = 0$$

と置くと  $a_+\Omega_S = 0$  より  $a_+ = 0$ . 補題??より  $q_S^+ \sim_q q_S^-$  であるから  $a_- = 0$  となる. よって  $a\Omega_{P_S} = 0$ ,  $a \in C(\mathcal{M}_{P_S}^+)$  ならば  $a = 0$  となる. このようにして  $\Omega_{P_S}$  は  $C(\mathcal{M}_{P_S}^+)$  に対する分離ベクトルであることがわかったわけだが, これと補題??を用いると次が得られる.

系 4.7.  $q_S^+$  と  $q_{P_S}^+$ ,  $q_S^-$  と  $q_{P_S}^-$  は準同値である. さらに  $S$  が *basis projection* でないときは, これら 4つの表現は全て準同値となる.

*Proof.*  $\widehat{E}_+ : \mathcal{H}_{P_S}^+ \rightarrow \mathcal{H}_S^+$  を射影作用素として

$$C(\widehat{E}_+) := \min\{E \in C(\mathcal{M}_{P_S}^+) \mid E^2 = E^* = E, E \geq \widehat{E}_+\}$$

とすると  $C(\widehat{E}_+)\Omega_{P_S} = \Omega_{P_S}$  は明らか.  $\Omega_{P_S}$  は  $C(\mathcal{M}_{P_S}^+)$  の分離ベクトルであるから  $C(\widehat{E}_+) = 1$ , つまり

$$q_S^+ \sim_q q_{P_S}^+ \sim_q q_S^- \sim_q q_{P_S}^-.$$

## 5. $sp(\infty)$ の表現の準同値性

この節では相異なる  $\gamma$  の polarization  $S, S'$  が与えられたとき  $q_S^+$  と  $q_{S'}^+$ , または  $q_S^-$  と  $q_{S'}^-$  がいつ準同値となるかについて考える.

定理 5.1.  $S, S'$  を  $\gamma$  の polarization とする. このとき  $q_S^+ \sim_q q_{S'}^+$  ( $q_S^- \sim_q q_{S'}^-$ ) であるための必要十分条件は, 次の 2つの条件を満たすことである.

- (1)  $\|f\|_S$  と  $\|f\|_{S'}$  から定まる  $K$  の上の位相が同値となる, つまり  $\beta > \alpha > 0$  で, 次の条件を満たすものが存在する.

$$\alpha \|f\|_S \leq \|f\|_{S'} \leq \beta \|f\|_S, \quad f \in K.$$

- (2)  $1 - \rho(S)e^{-\chi(S)}e^{\chi(S')}\rho(S')$  が  $K_S$  上の Hilbert-Schmidt 型作用素となる. ただし  $\chi(S), \rho(S)$  は次で定義される作用素である.

$$\chi(S) := \tanh^{-1} 2\sqrt{S(1-S)}, \quad \rho(S) := (2S-1)^{-1}|2S-1|.$$

注意.  $\|\cdot\|_S$  と  $\|\cdot\|_{S'}$  の位相の同値性より  $K_{S'}$  上の有界作用素  $S'$  は  $K_S$  上の有界作用素と見なせる.

上記の定理の同値条件 (2) の作用素  $1 - \rho(S)e^{-\chi(S)}e^{\chi(S')}\rho(S')$  は少々複雑な形をしているが, この条件と同値な条件を  $P_S, P_{S'}$  で表すと次のように極めて簡潔である.

補題 5.2.  $S, S'$  を相異なる  $\gamma$  の polarization とし,  $\|f\|_S$  と  $\|f\|_{S'}$  から定まる  $K$  の位相が同値であるとする. このとき次の (1)(2)(3) は同値である.

- (1)  $P_S - P_{S'}$  が Hilbert-Schmidt 型作用素.
- (2)  $1 - \rho(S)e^{-\chi(S)}e^{\chi(S')}\rho(S')$  が Hilbert-Schmidt 型作用素.
- (3)  $1 - \rho(S')e^{-\chi(S')}e^{\chi(S)}\rho(S)$  が Hilbert-Schmidt 型作用素.

この補題は次の補題から直ちに導かれる.

**補題 5.3.**  $S, S'$  を  $\gamma$  の polarization とし,  $\|f\|_S$  と  $\|f\|_{S'}$  から定まる  $K$  の上の位相が同値とする. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \|P_S - P_{S'}\|_{\text{H.S.}} &= \|\beta(1 - \rho(S')e^{-\chi(S')}e^{\chi(S)}\rho(S))\beta^{-1}\|_{\text{H.S.}} \\ &\quad + \|\beta(1 - \rho(S)e^{-\chi(S)}e^{\chi(S')}\rho(S'))\beta^{-1}\|_{\text{H.S.}} \end{aligned}$$

ただし  $\beta = \sqrt{S} + \sqrt{1-S}$  であり,  $\|\cdot\|_{\text{H.S.}}$  は Hilbert-Schmidt ノルムを表す.

注意.  $\|\cdot\|_S$  に対して  $\alpha\|\cdot\|_S \leq \|\cdot\|_{S'} \leq \beta\|\cdot\|_S$  を満たす  $\beta > \alpha > 0$  が存在するならば,  $\beta' > \alpha' > 0$  で  $\alpha'\|\cdot\|_{P_S} \leq \|\cdot\|_{P_{S'}} \leq \beta'\|\cdot\|_{P_S}$  を満たすものが存在する. よって線型空間として  $K_{P_S} = K_{P_{S'}}$  と見なせるので,  $P_S, P_{S'}$  はともに同一の線型空間上の作用素と思える. よって  $P_S - P_{S'}$  は意味を持つ.

**補題 5.4.**  $\gamma$  の polarization  $S, S'$  が basis projection であり,  $K = K_S = K_{S'}$  を満たすとする.

(1)  $K$  上の有界線型作用素  $\theta(S, S') \geq 0$  を次の式で定める:

$$\sinh^2 \theta(S, S') = -(S - S')^2.$$

さらに次の量を定義する.

$$\begin{aligned} u_{12}(S/S') &:= (\sinh \theta(S, S') \cosh \theta(S, S'))^{-1} S S' (1 - S), \\ u_{21}(S/S') &:= -(\sinh \theta(S, S') \cosh \theta(S, S'))^{-1} (1 - S) S' S, \\ H(S/S') &:= -\sqrt{-1} \theta(S, S') \{u_{12}(S/S') + u_{21}(S/S')\}. \end{aligned}$$

このとき  $u_{ij}(S/S')^* = u_{ji}(S/S')$  であり,  $H(S/S')$  は次を満たす:

$$\begin{aligned} H(S/S')^\dagger &= H(S/S'), \quad \Gamma H(S/S') \Gamma = -H(S/S'), \\ (\sqrt{-1} H(S/S'))^* &= \sqrt{-1} H(S/S'). \end{aligned}$$

(ただし  $*$  は内積  $(\cdot, \cdot)_S$  に関するものである.)

$$U(S/S') := \exp(\sqrt{-1} H(S/S')).$$

とすると  $U(S/S')$  は  $(K, \Gamma, \gamma)$  上の Bogoliubov 変換であり, 次を満たす.

$$(5.1) \quad U(S/S')^\dagger S U(S/S') = S'.$$

ただし Bogoliubov 変換とは, シンプレクティック形式  $\gamma$  を保存し,  $\Gamma$  と可換な線型作用素のことをいう.

- (2)  $S - S'$  が Hilbert-Schmidt 型作用素であることと  $\theta(S, S')$  が Hilbert-Schmidt 型作用素であることは同値である.
- (3)  $\theta(S, S')$  が Hilbert-Schmidt 型作用素ならば, ユニタリ作用素  $T(S, S') \in \mathcal{M}_S$  で次を満たすものがただ一つ存在する.

$$T(S, S')^* \overline{\pi_S(A)} T(S, S') \Psi = \pi_S[\tau(U(S/S')) A] \Psi, \quad \Psi \in D(\pi_S).$$

ただし Bogoliubov 変換  $U$  に対して CCR 代数  $\mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$  上の  $*$ -自己同型写像  $\tau(U)$  を次で定義する.(このように定義した  $\tau(U)$  を Bogoliubov 自己同型写像と呼ぶ.)

$$\tau(U)(B(f)) := B(Uf), \quad f \in K.$$

さらに  $T(S, S')$  は次を満たす.

$$\langle \Omega_S, T(S, S')\Omega_S \rangle = \det_{SK} \left( \frac{1}{\sqrt{\cosh \theta(S, S')}} \right)$$

右辺の  $\det_{SK}$  は  $SK$  の上での determinant である. ( $\theta(S, S')$  は  $S$  と可換であるから右辺は well-defined である.)

上の補題について補足する. まず2つの異なる basis projection  $S, S'$  が与えられると, (1) のようにして2つの basis projection を (??) で結び付ける Bogoliubov 変換  $U(S/S')$  をつくることができる. Bogoliubov 変換は CCR 代数の上の\*-自己同型写像 (Bogoliubov 自己同型写像) を導くが,  $S - S'$  が Hilbert-Schmidt 型作用素であるという条件があれば, Bogoliubov 自己同型  $\tau(U(S/S'))$  はユニタリ作用素  $T(S, S')$  によって  $\text{Ad}(T(S, S'))$  の形で表すことができる.

Bogoliubov 変換の定義から容易にわかるように,  $Sp(\infty)$  は Bogoliubov 変換全体のなす群の部分群になっている.

**補題 5.5.**  $\gamma$  の polarization  $S, S'$  が basis projection であるとする. さらに  $\|f\|_S$  と  $\|f\|_{S'}$  から定まる  $K$  の上の位相が同値とする. このとき  $S - S'$  が Hilbert-Schmidt 型作用素ならば  $q_S^+ \sim q_{S'}^+$  かつ  $q_S^- \sim q_{S'}^-$  である.

*Proof.* 線型作用素  $V : \mathcal{H}_{S'} \rightarrow \mathcal{H}_S$  を

$$V\pi_{S'}(A)\Omega_{S'} := \overline{\pi_S(A)}T(S, S')\Omega_S, \quad A \in \mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$$

で定義すると,  $U(S/S')^\dagger S U(S/S') = S'$  より  $\varphi_{S'} = \varphi_S \circ \tau(U(S/S'))$  を満たす. これは  $V$  が任意の  $A \in \mathfrak{A}(K, \gamma, \Gamma)$  に対して  $D(\pi_S)$  上で

$$V\pi_{S'}(A) = \overline{\pi_S(A)}V$$

を満たす  $\mathcal{H}_{S'}$  から  $\mathcal{H}_S$  へのユニタリ作用素であることを表す.

さらに  $V$  は  $V\mathcal{H}_{S'}^+ \subset \mathcal{H}_S^+, V\mathcal{H}_{S'}^- \subset \mathcal{H}_S^-$  を満たしている. よって  $V_+ := V|_{\mathcal{H}_{S'}^+}$  は  $\mathcal{H}_{S'}^+$  から  $\mathcal{H}_S^+$  への,  $V_- := V|_{\mathcal{H}_{S'}^-}$  は  $\mathcal{H}_{S'}^-$  から  $\mathcal{H}_S^-$  へのユニタリ作用素になっていて, 任意の  $H \in sp(\infty)$  に対して

$$V_+Q_{S'}^+(H) = Q_S^+(H)V_+, \quad V_-Q_{S'}^-(H) = Q_S^-(H)V_-$$

である. つまり  $q_S^+ \sim q_{S'}^+$  かつ  $q_S^- \sim q_{S'}^-$  である. ■

次の命題は  $\gamma$  の polarization  $S$  と  $S'$  が basis projection の場合と全く同様である.

**系 5.6.**  $S, S'$  を  $\gamma$  の polarization とする.  $\|f\|_S$  と  $\|f\|_{S'}$  から定まる  $K$  の上の位相が同値とする. このとき  $P_S - P_{S'}$  が Hilbert-Schmidt 型作用素ならば  $q_{P_S}^+ \sim q_{P_{S'}}^+$  かつ  $q_{P_S}^- \sim q_{P_{S'}}^-$  が成り立つ.

系??と系??から次がわかる.

**補題 5.7.**  $\gamma$  の polarization  $S, S'$  がともに basis projection でないとする. このとき作用素  $1 - \rho(S)e^{-x(S)}e^{x(S')}\rho(S')$  が Hilbert-Schmidt 型作用素ならば,  $q_S^+ \sim_q q_{S'}^+ \sim_q q_S^- \sim_q q_{S'}^-$  が成り立つ.

いままでの命題では, 与えられた2つの polarization が2つとも basis projection か, または2つとも basis projection ではない場合を考えた. 次の補題は一方が basis projection であり, もう一方が basis projection ではない場合に関する表現の同値性に関するものである.

**補題 5.8.**  $S$  を basis projection,  $S'$  を basis projection でないとする. このとき,  $1 - \rho(S)e^{-\chi(S)}e^{\chi(S')}\rho(S')$  は Hilbert-Schmidt 型作用素ではない.

以上で得られた補題から主要定理の十分条件が得られる.

**補題 5.9.**  $\gamma$  の polarization  $S, S'$  が次の 2 条件を満たしているとする.

- (1)  $\|f\|_S$  と  $\|f\|_{S'}$  から定まる  $K$  の上の位相が同値,
- (2)  $1 - \rho(S)e^{-\chi(S)}e^{\chi(S')}\rho(S')$  は Hilbert-Schmidt 型作用素.

このとき  $q_S^+ \sim_q q_{S'}^+, q_S^- \sim_q q_{S'}^-$  が成り立つ.

定理の必要性は次の形で述べられる.

**補題 5.10.**  $S, S'$  を  $\gamma$  の polarization とする.  $\|f\|_S$  と  $\|f\|_{S'}$  により定まる  $K$  の位相が同値とし, 2 つの polarization から定まる  $K_S, K_{S'}$  上の有界線型作用素  $S, S'$  が  $0 < S < 1, 0 < S' < 1$  を満たすとする. このとき  $P_S - P_{S'}$  が Hilbert-Schmidt 型作用素ではないならば,  $\Gamma$  の作用で不変な  $K$  の有限次元部分空間  $K_n$  で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\varphi_{S_n} - \varphi_{S'_n})|_{\mathcal{M}_{P_{S_n}}^+}\| = 2.$$

を満たすものが存在する. ただし  $S_n$  は  $S$  の  $K_n$  への制限を表す.

注意.  $\mathfrak{A}(K_S \oplus K_{S'}, \hat{\gamma}_S, \hat{\Gamma}_S)$  上の状態  $\varphi_{P_S}$  を

$$\varphi_{P_S}(Q) = \langle \Omega_{P_S}, Q \Omega_{P_S} \rangle, \quad Q \in \mathcal{M}_{P_S}^+$$

として  $\mathcal{M}_S^+$  上の状態と見なせる. さらに  $\dim K < \infty$  のときは, 必然的に  $P_S - P_{S'}$  は Hilbert-Schmidt 型作用素となるので,  $q_{P_S}^+ \sim_q q_{P_{S'}}^+$ , つまり  $\mathcal{M}_{P_S}^+ = \mathcal{M}_{P_{S'}}^+$  と見なせる. 以上 2 点から  $\dim K < \infty$  ならば  $\varphi_{P_S}$  は  $\mathcal{M}_{P_{S'}}^+$  上の状態と思えて, このとき

$$\varphi_{P_S}(Q) := \langle \Omega', Q \Omega' \rangle, \quad Q \in \mathcal{M}_{P_{S'}}^+ = \mathcal{M}_{P_S}^+,$$

ただし  $\Omega' := T(P_S, P_{S'})\Omega_{P_S}$ .

補題??は次の補題から得られる.

**補題 5.11.**  $\dim K < \infty$  とし,  $\gamma$  の polarization  $S, S'$  から定まる  $K_S, K_{S'}$  上の作用素  $S, S'$  が  $0 < S < 1, 0 < S' < 1$  を満たしているとする. このとき次の評価式が成立する.

$$(5.2) \quad \|(\varphi_{P_S} - \varphi_{P_{S'}})|_{\mathcal{M}_{P_S}^+}\| \geq 2 \left\{ 1 - \det_{P_S K_{P_S}} \left( \frac{1}{4\sqrt{P_S P_{S'} P_S}} \right) \right\}$$

$\mathcal{M}_{P_S}^+$  上の準自由状態の差  $(\varphi_{P_S} - \varphi_{P_{S'}})|_{\mathcal{M}_{P_S}^+}$  のノルムに関する評価式(??)は次の補題から得られる.

**補題 5.12.**  $\mathcal{H}$  を Hilbert 空間,  $\mathcal{M}$  を  $\mathcal{H}$  上の von Neumann 環,  $\Psi$  を  $\mathcal{M}$  上の巡回・分離ベクトル,  $V_\Psi$  を  $(\mathcal{M}, \Psi)$  から定まる自然な正錐とする. さらに  $\Phi_i \in V_\Psi (i=1, 2)$  に対して  $\varphi_{\Phi_i}$  を  $\Phi_i$  に対するベクトル状態とする. このとき次の評価式が成立する.

$$\|\varphi_{\Phi_1} - \varphi_{\Phi_2}\| \geq \|\Phi_1 - \Phi_2\|^2.$$

この補題において  $\Psi = \Phi_1 = \Omega_{P_S}, \Phi_2 = T(P_S, P_{S'})\Omega_{P_S}$  として計算すると評価式(??)を得るが, そのためには  $\Omega_{P_S}$  が  $\mathcal{M}_{P_S}^+$  の巡回・分離ベクトルであるのか, また  $T(P_S, P_{S'})\Omega_{P_S}$  が  $(\mathcal{M}_{P_S}^+, \Omega_{P_S})$  から定まる自然な正錐の元であるのか, という 2 つの点が問題となる. 次に示す 2 つの補題がその 2 つの点を保証している.

**補題 5.13.**  $0 < S < 1$  のとき,  $\Omega_{P_S}$  は  $\mathcal{M}_{P_S}^+$  の巡回・分離ベクトルである.

補題 5.14.  $\mathcal{H}$  を Hilbert 空間,  $\mathcal{M}$  を  $\mathcal{H}$  上の von Neumann 環,  $\Psi, \Phi$  を  $\mathcal{M}$  上の巡回・分離ベクトル,  $V_\Psi$  を  $(\mathcal{M}, \Psi)$  から定まる自然な正錐とする. このとき  $\Phi \in V_\Psi$  であることは, 次の (1)(2) を満たすことと同値である.

- (1)  $J_\Phi = J_\Psi$ ,
- (2) 任意の  $Q_+ \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}', Q_+ \geq 0$  に対して  $\langle \Phi, Q_+ \Psi \rangle \geq 0$  が成り立つ.

以上の議論から主要定理の必要条件が得られる.

補題 5.15.  $S, S'$  を  $\gamma$  の polarization で,  $\|f\|_S$  と  $\|f\|_{S'}$  から定まる  $K$  の上の位相が同値であるとする. このとき  $1 - \rho(S)e^{-\chi(S)}e^{\chi(S')} \rho(S')$  が Hilbert-Schmidt 型作用素ではないならば,  $q_S^+ \not\sim_q q_{S'}^+, q_S^- \not\sim_q q_{S'}^-$  である.

#### REFERENCES

- [1] Araki, Huzihiro. *Bogoliubov automorphisms and Fock representations of canonical anticommutation relations*, Operator algebras and mathematical physics, 23–141, Contemp. Math., 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987
- [2] Araki, Huzihiro. *Some properties of modular conjugation operator of von Neumann algebras and a non-commutative Radon-Nikodym theorem with a chain rule*. Pacific J. Math. 50 (1974), 309–354.
- [3] Araki, Huzihiro; Yamagami, Shigeru. *On quasi-equivalence of quasifree states of the canonical commutation relations*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 18 (1982), no. 2, 703–758 (283–338).
- [4] Matsui, Taku. *Factoriality and quasi-equivalence of quasifree states for  $Z_2$  and  $U(1)$  invariant CAR algebras*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 32 (1987), no. 8, 693–700.
- [5] Matsui, Taku. *On quasi-equivalence of quasifree states of gauge invariant CAR algebras*. J. Operator Theory 17 (1987), no. 2, 281–290.
- [6] Matsui, Taku; Yoshihito Shimada. *On quasifree representations of infinite dimensional symplectic group*. preprint.
- [7] Michael Reed, Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press, 1975.
- [8] Lion, Gérard; Vergne, Micéhe. *The Weil representation, Maslov index and theta series*. Progress in Mathematics, 6. Birkhäuser, 1980.
- [9] Olshanski, Grigori; Vershik, Anatoli. *Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices*. Contemporary mathematical physics, 137–175, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [10] Parthasarathy, K. R. *An introduction to quantum stochastic calculus*. Birkhäuser Verlag, 1992.
- [11] Pickrell, Doug. *Separable representations for automorphism groups of infinite symmetric spaces*. J. Funct. Anal. 90 (1990), no. 1, 1–26.
- [12] Powers, Robert T. *Self-adjoint algebras of unbounded operators*. Comm. Math. Phys. 21 (1971) 85–124.
- [13] Pressley, Andrew; Segal, Graeme. *Loop groups*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.
- [14] Strătilă, Șerban; Voiculescu, Dan. *On a class of KMS states for the unitary group  $U(\infty)$* . Math. Ann. 235 (1978), no. 1, 87–110