数理解析研究所講究録 1357 巻 2004 年 104-107

Character Products of Association Schemes

信州大学・理学部 花木 章秀 (Akihide Hanaki)
Department of Mathematical Sciences,
Faculty of Science, Shinshu University

アソシエーションスキームは代数的組合せ論の主要な研究対象であるが、その一般論については、まだそれほど多くのことは分かっていない。ここでは有限群の指標理論をまねて、その指標の積を考える。有限群の群環は Hopf 代数なので、その指標の積は常に指標になる。しかしアソシエーションスキームの隣接代数は一般に Hopf 代数ではないので、その指標の積は指標になるとは限らない。ここでは、考える指標の一方が本質的に有限群の指標である場合には、その積がまた指標になることを示す。

1 記号と定義

記号は Zieschang [3] のものを用いる。

X を有限集合とする。$g \in X \times X$ に対して、その**隣接行列** σ_g とは、行、列共に X で添字の付けられた正方行列で、その (x,y)-成分は $(x,y) \in g$ のとき 1 で、そうでないとき 0 と定めたものである。G を $X \times X$ の空でないいくつかの部分集合の集まりとする。(X,G) が**アソシエーションスキーム**であるとは

(1) $\sum_{g\in G} \sigma_g$ はすべての成分が 1 の行列。(すなわち $X \times X = \bigcup_{g\in G} g$ は $X \times X$ の分割。)

(2) $1 := \{(x,x) \mid x \in X\} \in G$ (σ_1 は単位行列。)

(3) $g \in G$ ならば $g^* := \{(y,x) \mid (x,y) \in g\} \in G$ (σ_{g^*} は σ_g の転置行列。)

(4) $f,g,h \in G$ に対して、ある非負整数 p_{fg}^h があって $\sigma_f\sigma_g = \sum_{h\in G} p_{fg}^h \sigma_h$.

が成り立つこととする。単に G をアソシエーションスキームともいうことにする。$g \in G$ に対して $n_g := p_{gg^*}^1$ とおいて、これを g の**分岐指数**という。任意の $g \in G$ に対して $n_g = 1$ であるとき (X,G) を thin であるという。このとき G は本質的に有限群と思うことができる。

定義より

$$\mathbb{C}G := \bigoplus_{g\in G} \mathbb{C}\sigma_g$$

は行列環をなす。これを G の $\mathbb{C}$ 上の**隣接代数**という。$\mathbb{C}$ 上の隣接代数は常に半単純であることが知られている。

$S \subset G$ に対して $\sigma_S := \sum_{g \in S} \sigma_g$, $n_S := \sum_{g \in S} n_g$ とおく。$S \subset G$ が G の**閉部分集合**であるとは ${n_S}^{-1}\sigma_S$ が $\mathbb{C}G$ のべき等元であることとする。また S が**正規閉部分集合**であるとは ${n_S}^{-1}\sigma_S$ が $\mathbb{C}G$ の中心的べき等元であることとする。G の閉部分集合 H に対して**剰余スキーム** $(X/H, G//H)$ が定義されるが、定義がやや複雑なため、これは [3] を参照して頂きたい。$G//H = \{g^H \mid g \in G\}$ と表されることに注意しておく。剰余スキーム $(X/H, G//H)$ が thin であるとき H を**強正則**であるという。強正則ならば正則である。強正則閉部分集合全体の共通部分は、また強正則で、これを **thin residue** といい $\mathbf{O}^{\vartheta}(G)$ と表す。すなわち $\mathbf{O}^{\vartheta}(G)$ は剰余スキームが有限群となるような閉部分集合のうち最小のものである。$G//\mathbf{O}^{\vartheta}(G)$ は有限群なので、その交換子群 $D(G//\mathbf{O}^{\vartheta}(G))$ が考えられる。$D(G//\mathbf{O}^{\vartheta}(G))$ の G への逆像を $D(G)$ と表すことにする。すなわち $D(G)$ は剰余スキームがアーベル群となるような閉部分集合のうち最小のものである。

ここではアソシエーションスキームの表現とは、その隣接代数 $\mathbb{C}G$ の線形表現のこととする。$\mathbb{C}G$ は行列環として定義されているので $\sigma_g \mapsto \sigma_g$ は表現である。これを G の**標準表現**といい、その指標を γ_G で表す。γ_G の既約分解を

$$\gamma_G = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} m_\chi \chi$$

とし m_χ を χ の**重複度**という。

H が G の正規閉部分集合であるとき

$$\pi : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}(G//H), \quad \sigma_g \mapsto \frac{n_g}{n_{g^H}} \sigma_{g^H}$$

は代数全準同型である [2]。これによって $G//H$ の既約指標は G の既約指標と見ることができて、更にその重複度も一致する。

2 指標の積

G を有限群とし χ, φ をその指標とする。有限群の指標に対しては、その積は単に値の積、すなわち $\chi\varphi(g) = \chi(g)\varphi(g)$ で定義すれば、それはまた指標になる。これは $\mathbb{C}G$ が、余積 $g \mapsto g \otimes g$ によって Hopf 代数であることによる。

アソシエーションスキーム G に対しては [1] にあるように、余積を

$$\Delta : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G, \quad \sigma_g \mapsto \frac{1}{n_g}\sigma_g \otimes \sigma_g$$

で定めるのが良いと思われるが、これは一般に代数準同型にはならない (よって $\mathbb{C}G$ は Hopf 代数にならない)。しかし、それでもこの余積を採用したとすると、指標の積は

$$\chi\varphi(\sigma_g) := \frac{1}{n_g}\chi(\sigma_g)\varphi(\sigma_g)$$

で定義するのが自然であるといえる。

具体例を見てみると、上のように定義した指標の積は一般に指標とはならないが、一方の指標が特別な場合には指標になることが確認できる。そこで

$$\Delta' := (\pi \otimes 1) \circ \Delta : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}(G//\mathbf{O}^{\vartheta}(G)) \otimes \mathbb{C}G, \quad \sigma_g \mapsto \sigma_{g^H} \otimes \sigma_g$$

と定めれば Δ' は代数準同型となり、次の結果を得る。

Theorem 2.1. G をアソシエーションスキームとする。χ を $G//\mathbf{O}^{\vartheta}(G)$ の指標とし φ を G の指標とすると $\chi\varphi$ は G の指標である。特に $\chi \in \mathrm{Irr}(G//D(G))$, $\varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ とすると $\chi\varphi \in \mathrm{Irr}(G)$ であり $m_\varphi = m_{\chi\varphi}$ が成り立つ。

$G//D(G)$ はアーベル群なので $\mathrm{Irr}(G//D(G))$ は自然にアーベル群の構造をもつ。この結果より $\mathrm{Irr}(G//D(G))$ は $\mathrm{Irr}(G)$ に作用し、同じ軌道に入る既約指標は同じ重複度をもつ。この事実はアソシエーションスキームの指標を計算する際に役に立つと思われる。

Theorem 2.1 を実際に利用するには $\mathrm{Irr}(G//D(G))$ を特徴付ける必要があるが、これについては次の結果がある。

Theorem 2.2. $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $\chi \in \mathrm{Irr}(G//D(G))$ であることと $m_\chi = 1$ であることは同値である。

次に $\mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^{\vartheta}(G))$ の特徴付けも考えたいが、これについては今のところ出来ていない。一般に $\chi(1) \le m_\chi$ が成り立ち、$\chi \in \mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^{\vartheta}(G))$ ならば $\chi(1) = m_\chi$ である。この逆、すなわち $\chi(1) = m_\chi$ ならば $\chi \in \mathrm{Irr}(G//\mathbf{O}^{\vartheta}(G))$ が成り立つこと、を予想している。

References

[1] Y. Doi, Bi-Frobenius algebras and group-like algebras, preprint.

[2] A. Hanaki, Representations of association schemes and their factor schemes, Graphs Comb., **19** (2003) 195–201.

[3] P.-H. Zieschang, An Algebraic Approach to Association Schemes, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1996.