数理解析研究所講究録 1357 巻 2004 年 124-129

ブロックイデアルのコホモロジー環

愛媛大学理学部 (Ehime University)
佐々木洋城 (Sasaki, Hiroki)

1 はじめに

G を有限群とする. k を代数的閉体とし, その標数 p は $|G|$ の素因数であるとする.

定義 1.1 b を kG のブロックイデアルとし, D を b の defect 群とする. (D, e_D) を Sylow b-subpair とする. subpair $(P, e_Q) \leq (D, e_D)$ に対して, 元 $\zeta \in H^*(D, k)$ についての条件

S(P) $\qquad \mathrm{res}_P\,\zeta = (\mathrm{res}_P\,\zeta)^x \quad \forall x \in N_G(P, e_P)$

を考える. コホモロジー環 $H^*(D, k)$ の部分環としてブロック b のコホモロジー環を

$$H^*(G, b) = \{\zeta \in H^*(D, k) \mid \zeta \text{ はどの } (P, e_P) \leq (D, e_D) \text{ に対しても条件 S}(P) \text{ を満たす}\}$$

によって定義する.

Linckelmann [4] における定義とは見掛け上ちょっと違うが, 同じと思ってよい.

河合氏は 2003 年 1 月の大阪大学におけるワークショップで, defect 群が二面体群などのときのブロックのコホモロジー環の計算を紹介してくれた. ここでは, まず, defect 群が wreathed 2- 群であるブロックのコホモロジー環を計算してみたので紹介する. 次に, だれでもが疑問に思うであろうように, defect 群が正規部分である場合に, ブロックのコホモロジー環について分かることを述べる.

2 defect 群が wreathed 2- 群であるブロックイデアルのコホモロジー環

2.1 wreathed 2- 群 W

wreathed 2- 群 W を

$$W = \langle a, b, t \mid a^{2^n} = b^{2^n} = t^2 = 1,\ ab = ba,\ tat = b \rangle,\ n \geq 2$$

と定義する. $c = ab,\ d = a^{-1}b$ とおくと, $Z(W) = \langle z \rangle,\ D(W) = \langle d \rangle$ である. さらに,

$$x = a^{2^{n-1}},\ y = b^{2^{n-1}},\ z = c^{2^{n-1}} = xy,$$
$$e = xt,\ f = d^{2^{n-2}} (= (a^{-1}b)^{2^{n-2}}),$$
$$U = \langle a, b \rangle,\ Q = \langle e, f \rangle,\ V = \langle e, f, c \rangle$$

とおく. $Q = \langle e, f \rangle$ は位数 8 の四元数群である. また, $V = \langle x, t, c \rangle$ でもある.

2.2 ブロックのコホモロジー環

b を群環 kG のブロックイデアルとし, W は b の defect 群であると仮定する.

S を G の部分群とする. 元 $g \in N_G(S)$ がひきおこす S の自己同型を ι_g と表す:

$$\iota_g : S \longrightarrow S; s \longmapsto s^g.$$

剰余類 $gSC_G(S) \in N_G(S)/SC_G(S)$ は S の外部自己同型 $\iota_g \operatorname{Inn} S$ をひきおこす. 以下では, $N_G(S)/SC_G(S)$ を S の外部自己同型群の部分群と同一視する.

(W, e_W) を Sylow b-subpair とする. W の部分群の自己同型群の構造を調べることにより (Alperin–Brauer–Gorenstein [1]), W の部分群 P で, 条件 S(P) を調べなければならないものは W, U, V のみであることがわかる. すなわち

補題 2.1 $\zeta \in H^*(W, k)$ が $H^*(G, b)$ に属するためには

(N) $\zeta^g = \zeta \ \forall g \in N_G(W, e_W)$
(U) $(\operatorname{res}_U \zeta)^g = \operatorname{res}_U \zeta \ \forall g \in N_G(U, e_U)$
(V) $(\operatorname{res}_V \zeta)^g = \operatorname{res}_V \zeta \ \forall g \in N_G(V, e_V)$

が成り立つことが必要十分である.

Sylow b-subpair (W, e_W) については, 剰余群 $N_G(W, e_W)/WC_G(W)$ は $2'$- 群である. 一方, wreathed 2- 群 W の自己同型群 Aut W は 2- 群であるから,

$$N_G(W, e_W) = WC_G(W).$$

特に, 任意の $\zeta \in H^*(W, k)$ は上記補題 2.1 の条件 (N) を満たす.

Külshammer [3] に従って, $N_G(U, e_U)/C_G(U)$ と $N_G(V, e_V)/VC_G(V)$ の構造によって, ブロックを分類するが, Brauer–Wong [2], Alperin–Brauer–Gorenstein [1] の議論のまねをして, 分類の議論をする.

2.3 $N_G(U, e_U)/C_G(U)$

U の自己同型 τ, ω を次のように定義する:

$$\tau : \begin{cases} a \longmapsto b \\ b \longmapsto a \end{cases}, \quad \omega : \begin{cases} a \longmapsto b \\ b \longmapsto a^{-1}b^{-1} \end{cases}.$$

$\langle \tau, \omega \rangle \simeq \mathrm{GL}(2, 2)\ (\simeq S_3)$ である. $\Phi(U) = \langle a^2, b^2 \rangle$ である. U の自己同型 σ は $U/\langle a^2, b^2 \rangle$ (四元群) の自己同型 $\overline{\sigma} : u\langle a^2, b^2 \rangle \longmapsto u^\sigma \langle a^2, b^2 \rangle$ をひきおこす. 写像

$$\pi : \operatorname{Aut} U \longrightarrow \operatorname{Aut}(U/\langle a^2, b^2 \rangle); \sigma \longmapsto \overline{\sigma}$$

は split epi である. このとき

補題 2.2

$$\operatorname{Aut} U = \operatorname{Ker} \pi \rtimes \langle \tau, \omega \rangle.$$

Brauer–Wong [2] の議論を注意深く, まねして

補題 2.3

$$N_G(U, e_U)/C_G(U) = \begin{cases} \langle \tau \rangle, \\ \langle \tau, \omega \rangle^{\chi} & \exists\, \chi \in \operatorname{Ker}\pi \cap C(\tau). \end{cases}$$

がわかる. さて,

補題 2.4 $\operatorname{Ker}\pi = \{\sigma \in \operatorname{Aut} U \mid u^{\sigma} \equiv u \mod \langle a^2, b^2 \rangle\}$ に属する自己同型はコホモロジー環 $H^*(U, k)$ に自明に作用する.

により

命題 2.5 (i) $N_G(U, e_U)/C_G(U) \simeq \mathbf{Z}/(2)$ ならば, 任意の $\zeta \in H^*(W, k)$ は補題 2.1 の条件 (U) を満たす.

(ii) $N_G(U, e_U)/C_G(U) \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$ ならば元 $\zeta \in H^*(W, k)$ が補題 2.1 の条件 (U) を満たすためには

$$(\mathrm{res}_U\, \zeta)^{\omega} = \mathrm{res}_U\, \zeta$$

であることが必要十分である.

2.4 $N_G(V, e_V)/VC_G(V)$

四元数群 $Q = \langle e, f \rangle$ の自己同型 τ, ω を

$$\tau : \begin{cases} e \longmapsto f \\ f \longmapsto e \end{cases}, \quad \omega : \begin{cases} e \longmapsto f \\ f \longmapsto e^{-1} f \end{cases}$$

と定義すると

補題 2.6

$$\operatorname{Aut} Q = \operatorname{Inn} Q \rtimes \langle \tau, \omega \rangle, \quad \langle \tau, \omega \rangle \simeq \mathrm{GL}(2, 2).$$

V において Q と $\langle c \rangle$ はともに特性部分群である. Q の自己同型 σ に対して, 写像

$$\widehat{\sigma} : V \longrightarrow V; x \longmapsto \begin{cases} x^{\sigma} & x \in Q, \\ x & x \in \langle c \rangle \end{cases}$$

は, 自己同型 σ は $Q \cap \langle c \rangle = Z(Q)$ に自明に作用するから, well-defined であり, かつ自己同型である. 明らかに, 写像

$$i : \operatorname{Aut} Q \longrightarrow \operatorname{Aut} V; \sigma \longmapsto \widehat{\sigma}$$

は群の単射準同型である. また, 中心 $\langle c \rangle$ の自己同型 γ に対して

$$\widehat{\gamma} : V \longrightarrow V; x \longmapsto \begin{cases} x & x \in Q, \\ x^{\gamma} & x \in \langle c \rangle \end{cases}$$

は, 自己同型 γ は $Q \cap \langle c \rangle = Z(Q)$ に自明に作用するから, well-defined であり, かつ自己同型である. 明らかに, 写像

$$j : \operatorname{Aut}\langle c \rangle \longrightarrow \operatorname{Aut} V; \gamma \longmapsto \widehat{\gamma}$$

は群の単射準同型である.

補題 2.7 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Aut}\, V = j(\mathrm{Aut}\langle c\rangle) \times i(\mathrm{Aut}\, Q),\\
&\mathrm{Aut}\langle c\rangle \simeq j(\mathrm{Aut}\langle c\rangle),\ \mathrm{Aut}\, Q \simeq i(\mathrm{Aut}\, Q),\\
&|\,\mathrm{Aut}\, V\,| = 2^{n-1}{\cdot}4{\cdot}6 = 2^{n+2}{\cdot}3,\\
&\mathrm{Inn}\, V = i(\mathrm{Inn}\, Q),\ \mathrm{Aut}\, V = \mathrm{Inn}\, V \rtimes (j(\mathrm{Aut}\langle c\rangle) \times \langle \widehat{\tau}, \widehat{\omega}\rangle).
\end{aligned}$$

Alperin–Brauer–Gorenstein [1] の議論を注意深くまねして

補題 2.8

$$N_G(V, e_V)/VC_G(V) = \begin{cases} \langle \widehat{\tau}\widehat{\omega}\rangle, \\ \langle \widehat{\tau}, \widehat{\omega}\rangle \end{cases}$$

であることがわかり,

命題 2.9 (i) $N_G(V, e_V)/C_G(V) \simeq \mathbf{Z}/(2)$ ならば, 任意の $\zeta \in H^*(W, k)$ は補題 2.1 の条件 (V) を満たす.

(ii) $N_G(V, e_V)/VC_G(V) \simeq \mathrm{GL}(2, 2)$ ならば元 $\zeta \in H^*(W, k)$ が補題 2.1 の条件 (V) を満たすためには

$$(\mathrm{res}_V\, \zeta)^{\omega} = \mathrm{res}_V\, \zeta$$

であることが必要十分である.

2.5 結論

以上により, $H^*(G, b)$ は $N_G(U, e_U)/C_G(U)$ と $N_G(V, e_V)/VC_G(V)$ により完全に分類されることがわかった.

主ブロックで考えると,

$$E = \langle x, y\rangle, \quad F = \langle z, t\rangle$$

とおくと

$$\begin{aligned}
N_G(U)/C_G(U) \simeq \mathrm{GL}(2,2) &\Longleftrightarrow N_G(E)/N_G(E) \simeq \mathrm{GL}(2,2),\\
N_G(V)/VC_G(V) \simeq \mathrm{GL}(2,2) &\Longleftrightarrow E \sim_G F
\end{aligned}$$

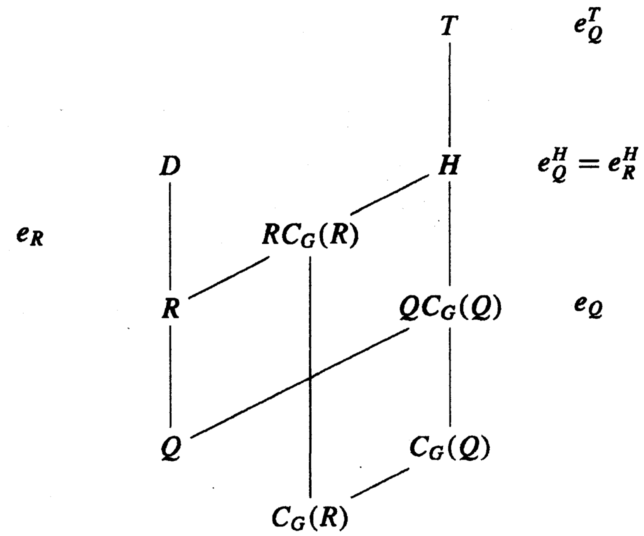
であるから, Okuyama–Sasaki [6] の分類により, $H^*(G, b)$ も記述できる.

3 defect 群が正規であるブロックのコホモロジー環

3.1 defect 群が正規であるブロックのコホモロジー環

kG のブロックイデアル b の defect 群 D が G で正規であると仮定する. (D, e_D) を Sylow b-subpair とする. (Q, e_Q) を $(Q, e_Q) \le (D, e_D)$ である任意の b-subpair とし, $T =$

$N_G(Q, e_Q)$ とおく. $R = N_D(Q)$ は e_Q^T の defect 群である. $R \lhd T$ であり, R は e_Q^T のただひとつの defect 群である. $H = N_D(Q)C_G(Q)$ とおく.



$(Q, e_Q) \lhd (R, e_R)$ である. 以上のもとで, Frattini 論法により

補題 3.1

$$T = H \cdot N_T(R, e_R) = C_G(Q) \cdot N_T(R, e_R)$$

が成り立つ. 特に, $Q \lhd D$ のとき, $N_G(Q, e_Q) = C_G(Q)N_G(D, e_D)$ である.

この事実を用いて, 次が得られる.

命題 3.2 b を G のブロックイデアルとする. D を b の defect 群とし, (D, e_D) を Sylow b-subpair とする. D が G で正規ならば

$$H^*(G, b) = H^*(D, k)^{N_G(D, e_D)}$$

である. 特に, $H = N_G(D, e_D)$ とおき, $c = e_D^H$ とおくと, $H^*(G, b) = H^*(H, c)$ が成り立つ.

3.2 Puig の定理

ここでは, 有限群 G の部分群 H のブロック c のブロックべき等元 f が条件

(O) 任意の $x \in G \setminus H$ に対して $f \cdot f^x = 0$

を満たしていると仮定する.

命題 3.2 の記号の下で, b のブロックべき等元を e とし, c のブロックべき等元を f とおくと, f は上の条件を満たし, さらに $e = \displaystyle\sum_{Hx \in H\backslash G} f^x$ である.

Puig [7] は仮定 (O) の下で

$$e = \sum_{Hx \in H\backslash G} f^x$$

とおくと,

命題 3.3 (i) e は kG のブロックべき等元である. $b = kGe$ とおく.
(ii) ブロック b と c は共通の defect 群 D をもち,
(iii) ブロック b と c は (b, c)- 加群 $M = ekGf$ により, Morita 同値である: $M \otimes_c M^* \simeq b$, $M^* \otimes_b M \simeq c$.

定理 3.4 c-subpair (P, f_P) に対して, b-subpair $(P, \widehat{f_P})$ がただひとつ定まり,

(i) $(Q, f_Q) \neq (P, f_P) \Rightarrow (Q, \widehat{f_Q}) \neq (P, \widehat{f_P})$,
(ii) $N_G(P, \widehat{f_P}) = C_G(P)N_H(P, f_P)$,
(iii) $(Q, f_Q) \leq (P, f_P) \Leftrightarrow (Q, \widehat{f_Q}) \leq (P, \widehat{f_P})$,
(iv) $(Q, f_Q) \sim_H (P, f_P) \Leftrightarrow (Q, \widehat{f_Q}) \sim_G (P, \widehat{f_P})$,
(v) 任意の b-subpair (P, e_P) に対して, ある c-subpair (P, f_P) を適当にとれば, $(P, e_P) \sim_G (P, \widehat{f_P})$.

を示した. この命題により, コホモロジー環 $H^*(G, b)$ と $H^*(H, c)$ が一致することがわかる.

しかし, Linckelmann [5] によっても, この事実は説明できる. すなわち,

命題 3.5 (i) e と f は共通の source idempotent i をもつ.
(ii) $M = ekGf$ は (G, H)- 加群 $kGi \otimes_{kD} ikH$ の直和因子である.

が成り立つ. (ii) の証明のために, (b, kD)- 加群 $X = kGi$ を考える. 相対 X- 射影元 $\pi_X = \mathrm{Tr}_D^G(i) \in Z(b)$ は可逆であることから, $b \mid kGi \otimes_{kD} ikG$, 従って, $M = bf \mid kGi \otimes_{kD} ikGf$ であることがわかる. e の取り方および条件(O) により, $M = ekGf$ は

$$M = \sum_{Ht \in H \backslash G} t(fkH)$$

と表される. また, 条件 (O) により, $fkGf = fM = \sum_{Ht \in H \backslash G} ft(fkH) = fkH$ である. 従って, $ikGf = ifkGf = ikHf = ikH$ である. すなわち, $M \mid kGi \otimes_{kD} ikH$.

従って, Linckelmann [5] Theorem 3.1 により, $H^*(G, b) = H^*(H, c)$ である.

参考文献

[1] J. L. Alperin, R. Brauer, and D. Gorenstein, Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups, Trans. Amer. Math. Soc. **151** (1970), 1–261.
[2] R. Brauer and W. J. Wong, Some properties of finite groups with wreathed Sylow 2-subgroups, J. Algebra **19** (1971), 263–273.
[3] B. Külshammer, On 2-blocks with wreathed defect groups, J. Algebra **64** (1980), 529–555.
[4] M. Linckelmann, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.
[5] ———, On splendid derived and stable equivalences between blocks of finite groups., J. Algebra (2001), 819–843.
[6] T. Okuyama and H. Sasaki, Relative projectivity of modules and cohomology theory of finite groups, Algebras and Representation Theory **4** (2001), no. 5, 405–444.
[7] L. Puig, Local block theory in p-solvable groups, The Santa Cruz Conference on Finite Groups (B. Cooperstein and G. Mason, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 37, Amer. Math. Soc., 1980, pp. 385–388.