数理解析研究所講究録 1357 巻 2004 年 31-37

Hochschild cohomology of an algebra associated with a circular quiver

古谷 貴彦 (Takahiko FURUYA)
東京理科大学理学研究科
眞田 克典 (Katsunori SANADA)
東京理科大学理学部
(Department of Mathematics, Tokyo University of Sience)

Abstruct. We consider two kinds of algebras. First we describe the structure of some subalgebras of basic self-injective Nakayama algebras and we give its projective bimodule resolution. Next we give a projective bimodule resolution of an algebra $A = K\Gamma/(f(X^s))$, where $K\Gamma$ is the path algebra of a circular quiver Γ with s vertices over a commutative ring K, $f(x)$ is a monic polynomial over K and X is the sum of all arrows. Finally we compute the Hochschild cohomology group of A.

1 序論

K を可換環とし s を正の整数とする．Γ を s 個の vertex $e_1, \ldots, e_s$ および s 個の arrow $a_1, \ldots, a_s$ をもつ circular quiver (oriented cycle や cyclic quiver とも言われる) とする．したがって，各 $1 \leqslant i \leqslant s$ に対して $a_i = e_{i+1}a_ie_i$ が path algebra $K\Gamma$ の中で成り立つ．ここで，a_i および e_i の添字は s を法として考えるものとする．

X を $K\Gamma$ におけるすべての arrow の和とする: $X = a_1 + \cdots + a_s$. K が体のとき basic self-injective Nakayama algebra は次の形をしている ([EH]):

$$K\Gamma/(X^k) =: B_s^k.$$

ただし，$k \geqslant 2$ である．[EH] では，B_s^k の周期的 projective bimodule resolution が与えられ，Hochschild cohomology ring $\mathrm{HH}^*(B_s^k)$ が計算されている．また，同様な結果が [BLM], [L] でも与えられている．ここでは，B_s^k のある subalgebra および，K 上の monic な多項式 $f(x)$ に対する多元環 $K\Gamma/(f(X^s))$ を考察する．

$K\Gamma$ の元 $e_1, \ldots, e_s, X^t$ から生成される subalgebra を $B_s(t)$ で表すことにする: $B_s(t) = K[e_1, \ldots, e_s, X^t]$. ただし $1 \leqslant t < k$ とする．B_s^k の subalgebra $B_s^k(t)$ を，写像 $B_s(t) \xrightarrow{i} K\Gamma \xrightarrow{\pi} B_s^k$ の合成の像によって定義する．ここで，i は埋め込み，π は自然な全射である．$\mathrm{Ker}\,\pi i = B_s(t) \cap (X^k)$ なので，$B_s^k(t) \simeq B_s(t)/B_s(t) \cap (X^k)$ となる．特に $B_s^k(1) = B_s^k$ である．第 2 節では $B_s^k(t)$ の構造を述べ (定理 1)，第 3 節ではその projective bimodule resolution を与える (定理 2).

また，第4節では，K 上の monic な多項式 $f(x)$ に対し，多元環 $A := K\Gamma/(f(X^s))$ の周期2の projective bimodule resolution を与える (定理 3)．第5節では，$s \geqslant 2$ のときの Hochschild cohomology group $\mathrm{HH}^t(A)$ の構造を述べる (定理 4)．特に，K が体，$f(x) = x^m$ $(m \geqslant 1)$ のとき，A は B_s^{ms} に一致する．一方，$s = 1$ のとき，A は $K[x]/(f(x))$ に他ならず，Holm によって周期2の projective bimodule resolution が与えられ，Hochschild cohomology ring $\mathrm{HH}^*(A)$ が計算されている ([H])．

2 $B_s^k(t)$ の構造

K を体とし，s, k を $s \geqslant 1, k \geqslant 2$ を満たす整数とする．t が $1 \leqslant t < k$ を満たす整数のとき，整数 q および r $(0 \leqslant r < t)$ が存在して $k = qt + r$ となる．このとき，$r \neq 0$ ならば $B_s(t) \cap (X^k) = B_s(t) \cap \left(X^{(q+1)t}\right)$ なので $B_s^k(t) \simeq B_s^{(q+1)t}(t)$ となる．したがって k が t の倍数であるときを考えれば十分である: $k = qt$ $(q \geqslant 2)$．s と t の最大公約数を d で表し，$s = s'd, t = t'd$ とおく．

補題 2.1

(i) 集合 $\left\{X^{nt}e_{i+xt} \mid 0 \leqslant n < q, 1 \leqslant i \leqslant d, 0 \leqslant x < s'\right\}$ は $B_s^{qt}(t)$ の K-基底である．

(ii) 集合 $\{X^{nd}e_{i+xd} \mid 0 \leqslant n < q, 1 \leqslant i \leqslant d, 0 \leqslant x < s'\}$ は $B_s^{qd}(d)$ の K-基底である． □

以降，$B_s^{qt}(t)$ と $B_s^{qd}(d)$ の vertex および arrow を区別するため $B_s^{qd}(d)$ の idempotent を f_i，すべての arrow の和を Y で表すことにする．

補題 2.1 によってベクトル空間としての同型

$$\Phi : B_s^{qt}(t) \longrightarrow B_s^{qd}(d);\ X^{nt}e_{i+xt} \longmapsto Y^{nd}f_{i+xd}$$
$$(0 \leqslant n < q,\ 1 \leqslant i \leqslant d,\ 0 \leqslant x < s').$$

を得る．

命題 2.2 Φ は多元環の同型写像である． □

各 $1 \leqslant i \leqslant d$ に対して，$A_i := \bigoplus_{\substack{0 \leqslant n < q,\\ 0 \leqslant x < s'}} KY^{nd}f_{i+xd}$ と定める．このとき，A_i は $B_s^{qd}(d)$ の両側イデアルで，

$$B_s^{qd}(d) = \bigoplus_{i=1}^{d} A_i \tag{1}$$

となる．以降，A_i と $B_{s'}^q$ の vertex および arrow を区別するために，$B_{s'}^q$ の vertex を g_i，すべての arrow の和を Z で表すことにする．

いま，ベクトル空間の同型写像を次のように定義する:

$$\Psi : B_{s'}^q \longrightarrow A_i;\quad Z^n g_x \longmapsto Y^{nd}f_{i+(x-1)d} \quad (0 \leqslant n < q, 1 \leqslant x \leqslant s').$$

命題 2.3 Ψ は多元環の同型写像である. □

この節のはじめの議論, (1), 命題 2.2, 2.3 によって $B_s^k(t)$ の構造に関する次の定理を得る:

定理 1 s,k,t を $s \geqslant 1, k \geqslant 2, 1 \leqslant t < k$ を満たす整数とする. d を s と t の最大公約数とし, $s' := s/d$ とする. このとき, $k/t \leqslant q$ を満たす最小の q に対して次の多元環の同型が存在する:

$$B_s^k(t) \simeq \bigoplus_{i=1}^{d} B_{s'}^{q} \quad (\text{多元環としての直和}).$$

□

3 $B_s^k(t)$ の周期的 projective resolution

s,k,t を $s \geqslant 1, k \geqslant 2, 1 \leqslant t < k$ を満たす整数とする. [EH] ですでに与えられている B_s^k の周期的 projective resolution と定理 1 を用いて, $B_s^k(t)$ の projective bimodule resolution を構成することができる. この節では $B_s^k(t)$ の projective bimodule resolution を直接構成する.

q を $k/t \leqslant q$ を満たす最小の整数とする. $B_s^k(t) (\simeq B_s^{qt}(t))$ を B とおく. 以降, $\otimes_K$ を $\otimes$ で表し, B の包絡多元環 $B \otimes B^{op}$ を B^e で表す. B の自己同型 $\beta : B \to B$ を $e_i \mapsto e_{i-1}, a_i \mapsto a_{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ によって定義する. 左 B^e-加群 Q_0, Q_1 を $Q_0 = \bigoplus_{i=1}^{s} Be_i \otimes e_i B$, $Q_1 = \bigoplus_{i=1}^{s} Be_{i+t} \otimes e_i B$ とおく.

定理 2 左 B^e-加群の次の完全系列が存在する:

$$0 \longrightarrow {}_1B_{\beta^{-qt}} \xrightarrow{\iota} Q_1 \xrightarrow{\psi} Q_0 \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0. \tag{2}$$

ここで, π は multiplication, 左 B^e-加群の homomorphisms ψ, ι は

$$\psi(e_{i+t} \otimes e_i) = e_{i+t}\left(X^t \otimes 1 - 1 \otimes X^t\right) e_i,$$
$$\iota(e_i) = e_i \left(\sum_{j=0}^{q-1} X^{qt-t-jt} \otimes X^{jt} \right) e_{i-qt} \quad (1 \leqslant i \leqslant s).$$

によって与えられる. よって, この完全系列を通して B の周期 $2 \cdot \dfrac{\mathrm{lcm}(s',q)}{q}$ の projective bimodule resolution を得る. □

証明の概要. Left B-homomorphisms $h_{-1} : B \to Q_0, h_0 : Q_0 \to Q_1, h_1 : Q_1 \to B$ を

$$h_{-1}(x) = x \left(\sum_{j=1}^{s} e_j \otimes e_j \right) \quad \text{for } x \in B,$$

$$h_0(e_i \otimes X^{mt} e_{i-mt}) = \begin{cases} 0 & \text{if } m = 0, \\ -e_i \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} X^{jt} \otimes X^{mt-jt-t} \right) e_{i-mt} & \text{if } 1 \leqslant m < q, \end{cases}$$

$$h_1(e_{i+t} \otimes X^{mt} e_{i-mt}) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leqslant m < q-1, \\ e_{i+t} & \text{if } m = q-1. \end{cases}$$

によって定める．このとき，$\{h_{-1}, h_0, h_1\}$ は (2) の contracting homotopy である:

$$\pi h_{-1} = id_B, \quad h_{-1}\pi + \psi h_0 = id_{Q_0}, \quad h_0\psi + \iota h_1 = id_{Q_1}, \quad h_1\kappa = id_B.$$

□

4 $K\Gamma/(f(X^s))$ の周期的 projective resolution

K を可換環とし，Γ を s 個の vertex $e_1, \dots, e_s$ および s 個の arrow $a_1, \dots, a_s$ をもつ circular quiver とする．X を path algebra $K\Gamma$ におけるすべての arrow の和とする: $X = a_1 + \cdots + a_s$．このとき，すべての path は X および e_i を用いて表すことができる．実際，e_i を始点とする長さが $p\,(\geqslant 1)$ の path は $X^p e_i\,(= a_{i+p-1} \cdots a_i)$ と表すことができる．

n を正の整数とし，$f(x)$ を K 上の次数 n の monic な多項式とする: $f(x) = x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0$．多元環 $K\Gamma/(f(X^s))$ を A で表すことにする．A の K-基底として $\{X^j e_i | \ 1 \leqslant i \leqslant s, 0 \leqslant j \leqslant ns-1\}$ をとることができるので，$\mathrm{rank}_K A = ns^2$ である．この節では，A の周期 2 の projective bimodule resolution を与える．

左 A^e-projective modules を次のように定義する:

$$P_0 = \bigoplus_{i=1}^{s} Ae_i \otimes e_i A, \quad P_1 = \bigoplus_{i=1}^{s} Ae_{i+1} \otimes e_i A.$$

さらに，左 A^e-homomorphisms $\phi : P_1 \to P_0, \kappa : A \to P_1$ を

$$\phi(e_{i+1} \otimes e_i) = e_{i+1}\,(X \otimes 1 - 1 \otimes X)\,e_i,$$
$$\kappa(e_i) = e_i \left(\sum_{j=1}^{n} k_j \left(\sum_{l=0}^{js-1} X^l \otimes X^{js-l-1} \right) \right) e_i \quad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant s$$

で定義する．$\pi : P_0 \to A$ は multiplication とする．

定理 3 左 A^e-加群としての次の完全系列が存在する:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\kappa} P_1 \xrightarrow{\phi} P_0 \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0. \tag{3}$$

よって，この完全系列を通して A の周期 2 の projective A^e-resolution を得る:

$$\cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0. \tag{4}$$

ただし，$d_1 = \phi, d_0 = \kappa\pi$ である．

証明. Left A-homomorphisms $h_{-1} : A \to P_0$, $h_0 : P_0 \to P_1$, $h_1 : P_1 \to A$ を

$$h_{-1}(x) = x \left(\sum_{j=1}^{s} e_j \otimes e_j \right) \quad \text{for } x \in A,$$

$$h_0(e_i \otimes X^m e_{i-m}) = \begin{cases} 0 & \text{if } m = 0, \\ -e_i \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} X^j \otimes X^{m-j-1} \right) e_{i-m} & \text{if } 1 \leqslant m \leqslant ns - 1, \end{cases}$$

$$h_1(e_{i+1} \otimes X^m e_{i-m}) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leqslant m \leqslant ns - 2, \\ e_{i+1} & \text{if } m = ns - 1 \end{cases}$$

によって定める．このとき，$\{h_{-1}, h_0, h_1\}$ は (3) の contracting homotopy である:

$$\pi h_{-1} = id_A, \quad h_{-1}\pi + \phi h_0 = id_{P_0}, \quad h_0\phi + \kappa h_1 = id_{P_1}, \quad h_1\kappa = id_A.$$

□

5 $K\Gamma/(f(X^s))$ の Hochschild cohomology group

この節では projective A^e-resolution (4) を用いて，$s \geqslant 2$ のときの $A = K\Gamma/(f(X^s))$ の Hochschild cohomology group $\mathrm{HH}^t(A) := \mathrm{Ext}^t_{A^e}(A, A)$ を計算する ($s = 1$ の場合は [H] 参照)．

A の中心を $Z(A)$ で表すことにする．各 $t \geqslant 1$ に対して，$\mathrm{Hom}_{A^e}(P_t, A)$ を次のようにして左 $Z(A)$-加群と見なす: $(zf)(y) := zf(y)$ $(z \in Z(A), f \in \mathrm{Hom}_{A^e}(P_t, A), y \in P_t)$．また，$(fz)(y) := f(y)z$ $(z \in Z(A), f \in \mathrm{Hom}_{A^e}(P_t, A), y \in P_t)$ と定めると $\mathrm{Hom}_{A^e}(P_t, A)$ は右 $Z(A)$-加群と見ることができる．しかし，これらの作用は一致するので，$\mathrm{Hom}_{A^e}(P_t, A)$ を単に $Z(A)$-加群とよぶことにする．(4) は周期 2 なので，各 $i \geqslant 1$ に対して，$Z(A)$-加群としての同型 $\mathrm{HH}^{i+2}(A) \simeq \mathrm{HH}^i(A)$ が存在する．したがって，$i = 0, 1, 2$ に対して $\mathrm{HH}^i(A)$ を計算すれば十分である．

補題 5.1 $Z(K\Gamma) = K[X^s]$ が成り立つ．また，環として $Z(A) \simeq K[X^s]/(f(X^s))$ である．ここで，$(f(X^s))$ は $K[X^s]$ における $f(X^s)$ から生成される両側イデアルである．したがって，環として $Z(A) \simeq K[x]/(f(x))$ である． □

いま，$Z(A)$-加群としての同型

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(Ae_i \otimes e_j A, A) \simeq e_i A e_j; \quad \phi \longmapsto \phi(e_i \otimes e_j) \quad \text{for } 1 \leqslant i, j \leqslant s$$

が存在する．これらの同型によって，次の $Z(A)$-加群の同型を得る:

$$u_0 : \mathrm{Hom}_{A^e}(P_0, A) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Hom}_{A^e}(Ae_i \otimes e_i A, A) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{s} e_i A e_i,$$

$$u_1 : \mathrm{Hom}_{A^e}(P_1, A) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Hom}_{A^e}(Ae_{i+1} \otimes e_i A, A) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{s} e_{i+1} A e_i.$$

補題 5.2 各 $1 \leqslant p \leqslant s$ に対して，$e_p A e_p = Z(A)e_p$，$e_{p+1} A e_p = Z(A) X e_p$ が成り立つ．さらに，これらの加群はそれぞれ e_p，Xe_p を基底とする free $Z(A)$-加群である． □

u_0, u_1, d_0, d_1 を用いると次の可換図式を得る:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A^e}(P_0, A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(d_1,A)"] \arrow[d, "u_0", "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{A^e}(P_1, A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(d_0,A)"] \arrow[d, "u_1", "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{A^e}(P_0, A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(d_1,A)"] \arrow[d, "u_0", "\wr"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{s} e_iAe_i \arrow[r, "d_1^*"] & \bigoplus_{i=1}^{s} e_{i+1}Ae_i \arrow[r, "d_0^*"] & \bigoplus_{i=1}^{s} e_iAe_i \arrow[r, "d_1^*"] & \cdots.
\end{tikzcd}
$$

補題 5.3 d_0^*, d_1^* はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
d_1^*(e_i) &= Xe_i - Xe_{i-1} \quad \text{for } e_i \in e_iAe_i, 1 \leqslant i \leqslant s, \\
d_0^*(Xe_i) &= X^s f'(X^s) \quad \text{for } Xe_i \in e_{i+1}Ae_i, 1 \leqslant i \leqslant s
\end{aligned}
$$

を満たす $Z(A)$-homomorphisms である. ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の形式的微分を表す. □

定理 4 A の Hochschild cohomology group は次のようになる:

$$
\mathrm{HH}^t(A) \simeq \begin{cases} K[x]/(f(x)) & \text{if } t = 0, \\ \mathrm{Ann}_{K[x]/(f(x))}(xf'(x)) & \text{if } t \text{ odd}, \\ K[x]/\left(xf'(x), f(x)\right) & \text{if } t \text{ even}. \end{cases}
$$

証明の概要. 一般に, 多元環の 0 次の Hochschild cohomology はその中心に同型なので, 補題 5.1 によって $\mathrm{HH}^0(A) \simeq K[x]/(f(x))$ を得る.

補題 5.2 によって $\mathrm{Im}\, d_0^*$ は $\mathrm{Ker}\, d_1^* = Z(A) \simeq K[X^s]/(f(X^s))$ の $X^s f'(X^s)$ から生成されるイデアルである. よって, $\mathrm{Im}\, d_0^* \simeq (X^s f'(X^s), f(X^s))/(f(X^s))$ となる. このことから,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{HH}^2(A) &\simeq \mathrm{Ker}\, d_1^*/\mathrm{Im}\, d_0^* \\
&\simeq K[X^s]/\left(X^s f'(X^s), f(X^s)\right) \\
&\simeq K[x]/(xf'(x), f(x))
\end{aligned}
$$

を得る.

いま, 補題 5.2 によって, 次のような $Z(A)$-加群の epimorphism を考えることができる:

$$
\psi : \bigoplus_{i=1}^{s} e_{i+1}Ae_i \longrightarrow Z(A); \quad \sum_{i=1}^{s} z_i X e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{s} z_i.
$$

このとき, 補題 5.2, 5.3 によって

$$
\psi\,(\mathrm{Ker}\, d_0^*) = \mathrm{Ann}_{Z(A)}\left(X^s f'\,(X^s)\right), \quad \mathrm{Im}\, d_1^* = \mathrm{Ker}\, \psi
$$

であることが確かめられる. このことから,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{HH}^1(A) &\simeq \mathrm{Ker}\, d_0^*/\mathrm{Im}\, d_1^* \\
&= \mathrm{Ann}_{Z(A)}\left(X^s f'(X^s)\right) \\
&\simeq \mathrm{Ann}_{k[x]/(f(x))}\left(xf'(x)\right)
\end{aligned}
$$

を得る. □

特に K が体のときは $K[x]$ は単項イデアル整域なので次を得る:

系. K が体のとき, 任意の $t \geqslant 1$ に対し, $K[x]$-加群として

$$\mathrm{HH}^t(A) \simeq K[x]/(xf'(x), f(x))$$

となる.

例 1. K が体, $f(x) = x - 1$ のとき,

$$\mathrm{HH}^0(A) \simeq K[x]/(x-1) \simeq K, \quad \mathrm{HH}^t(A) = 0 \quad (t \geqslant 1)$$

になる.

例 2. K が体, $f(x) = (x-1)^n$ $(n \geqslant 2)$ のとき,

$$\mathrm{HH}^0(A) \simeq K[x]/\left((x-1)^n\right),$$

$$\mathrm{HH}^t(A) \simeq \begin{cases} K[x]/((x-1)^n) & \text{if } \mathrm{char}\, K \mid n, \ (t \geqslant 1) \\ K[x]/((x-1)^{n-1}) & \text{if } \mathrm{char}\, K \nmid n, \ (t \geqslant 1) \end{cases}$$

となる.

参考文献

[BLM] M. Bardzell, A. Locateli and E. Marcos, *On the Hochschild cohomology of truncated cycle algebras,* Communications in Algebra **28**(3) (2000), 1615–1639.

[EH] K. Erdmann and T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n,* Forum Math. **11** (1999), 177–201.

[H] T. Holm, *Hochschild cohomology rings of algebras $k[X]/(f)$,* Contributions to Algebra and Geometry **41** (2000), 291–301.

[L] A. Locateli, *Hochschild cohomology of truncated quiver algebras,* Communications in Algebra **27**(2) (1999), 645–664.