数理解析研究所講究録 1358 巻 2004 年 69-76

活性・不活性大腸菌モデル方程式の数学解析

大阪大学大学院・工学研究科　八木厚志 (Atsushi Yagi)
Department of Applied Physics,
Osaka University

1 序文

本報告では，活性・不活性大腸菌モデル方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d_u \Delta u - \nabla\cdot\{u\nabla\chi(C)\} & \\ \qquad\qquad +\omega g(n,u)u - f(n,u)u - au, & (0,\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial n}{\partial t} = d_n\Delta n - g(n,u)u, & (0,\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial C}{\partial t} = d_C\Delta\chi + \alpha u - \beta C, & (0,\infty)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \dfrac{\partial n}{\partial\nu} = \dfrac{\partial C}{\partial\nu} = 0, & (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ u(x,0)=u_0(x), \quad n(x,0)=n_0(x), \quad C(x,0)=C_0(x), & \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

に対して大域解を構成する問題を考察する。本モデルは，領域 Ω 内で培養された大腸菌が形成するパターンに関して，活性バクテリアと不活性バクテリアに着目してその形成過程を記述するために 三村昌泰 教授により導入されたものである。

ここで，領域 Ω は 2 次元有界領域とする。未知関数 $u(x,t)$ は活性バクテリアの分布密度，$n(x,t)$ は養分の分布密度，$C(x,t)$ は化学物質の濃度分布をそれぞれ表す。大腸菌，養分，化学物質は拡散するとし，それらの拡散係数を $d_u>0$, $d_n>0$ および $d_C>0$ とする。移流項 $-\nabla\cdot\{u\nabla\chi(C)\}$ は，走化性の効果を表し大腸菌は自身で産出する化学物質の濃度勾配の高い方へと移動することを示す。関数 $\chi(C)$ は与えられた，C について単調増加な関数で，感応性関数と呼ばれる。$g(n,u)$ は大腸菌の養分摂取率を表し，$\omega g(n,u)$ は大腸菌の増殖率を表す，$\omega>0$ は正定数である。$f(n,u)$ は大腸菌の死亡率を表し，$a>0$ は活性大腸菌の不活性化率を表す。$\alpha>0$ は誘因化学物質の産出率を，$\beta>0$ は化学物質の分解率をそれぞれ表している。未知関数はすべて境界上で Neumann 条件を満たしているとする。与えられた初期関数 $u_0(x)$, $n_0(x)$, $C_0(x)$ に対して (1.1) の大域解を構成し，さらに解のノルム評価を行う。

不活性バクテリアの分布密度 $w(x,t)$ は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = au, \qquad (0,\infty)\times\Omega$$

で与えられるが，これは u のみから直接決まるので，方程式系からは外して考えることができる。

本報告では，以下の条件を仮定する。領域 Ω は 2 次元有界領域で境界は $\mathcal{C}^3$ 級とする。感応性関数は，C についての滑らかな関数で条件

$$\sup_{0\le C<\infty} |\chi^{(i)}(C)| < \infty, \qquad i = 1,\, 2,\, 3 \tag{1.2}$$

を満たすとする。関数 $g(n,u)$ は滑らかな非負関数で，以下の条件

$$0 \le g(n,u) \le \mu(n+1), \qquad n\ge 0,\ u\ge 0, \tag{1.3}$$

$$|g(n,u)-g(\widetilde{n},\widetilde{u})| \le \mu\{|n-\widetilde{n}|+(n+\widetilde{n})|u-\widetilde{u}|\}, \quad n,\widetilde{n}\ge 0,\ u,\widetilde{u}\ge 0 \tag{1.4}$$

を満たすとする。同様に，$f(n,u)$ も滑らかな関数で

$$\delta u - \nu n \le f(n,u) \le \nu(n+1)(u+1), \qquad n\ge 0,\, u\ge 0, \tag{1.5}$$

$$|f(n,u)-f(\widetilde{n},\widetilde{u})| \le \nu\{(u+\widetilde{u}+1)|n-\widetilde{n}|+(n+\widetilde{n}+1)|u-\widetilde{u}|\}, \qquad n,\widetilde{n}\ge 0,\ u,\widetilde{u}\ge 0 \tag{1.6}$$

を満たすとする，ここで $\delta>0,\, \mu>0,\, \nu>0$ はいずれも正の定数を表す。

2 準備

Ω は 2 次元有界領域でその境界は $\mathcal{C}^3$ 級とする。$s\ge 0$ について $H^s(\Omega)$ は Sobolev 空間を表す。$s>\frac{3}{2}$ について，$n\in H^s(\Omega)$ とすると Neumann 境界条件 $\frac{\partial n}{\partial\nu}=0$ は意味をもつ。そこで $s>\frac{3}{2}$ について

$$H^s_N(\Omega) = \{u\in H^s(\Omega);\ \tfrac{\partial n}{\partial \nu}=0 \ \text{on}\ \partial\Omega\}$$

と定義する。

$H^1(\Omega)$ の反双対空間を $H^1(\Omega)'$ とする。$L^2(\Omega)$ とその反双対空間 $L^2(\Omega)'$ を同一視して Banach 空間の 3 つ組み $H^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset H^1(\Omega)'$ を導入する。空間 $H^1(\Omega)$ 上で反双線形形式

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\overline{v}\,dx + \alpha\int_\Omega u\overline{v}\,dx, \qquad u,\, v\in H^1(\Omega)$$

を考える，ただし $\alpha > 0$ は正定数である。明らかにこの形式は $H^1(\Omega)$ 上で連続かつ強圧的であることが分かる。変分法の一般論（[1, Chap. IV]）から，$H^1(\Omega)$ から $H^1(\Omega)'$ への同型作用素 $\Lambda+\alpha$ が定まる，Λ は $H^1(\Omega)'$ の閉線形作用素でもあり，さらに一般論からこの空間において解析的半群を生成することが分かる。この作用素は，ラプラス作用素 $-\Delta$ に一般化された意味の Neumann 境界条件を課した作用素の空間 $H^1(\Omega)'$ における realization とみなされる。

指数 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ について，$\Lambda+\alpha$ の分数べきの定義域は

$$\mathcal{D}((\Lambda+\alpha)^\theta) = [L^2(\Omega), H^1(\Omega)]_{2\theta-1} = H^{2\theta-1}(\Omega)$$

を満たすことが示される。次に，Λ の $L^2(\Omega)$ 部分を考えると，Λ は正値自己共役作用素であり，$0 \leq \theta \leq 1, \theta \neq \frac{3}{4}$ について

$$\mathcal{D}((\Lambda+\alpha)^\theta) = \begin{cases} H^{2\theta}(\Omega), & \text{if } 0 \leq \theta < \frac{3}{4}, \\ H_N^{2\theta}(\Omega), & \text{if } \frac{3}{4} < \theta \leq 1 \end{cases}$$

が成り立つ。さらに，Λ の $H^1(\Omega)$ 部分を考えるとその定義域は $H_N^3(\Omega)$ となる。同様に，$0 \leq \theta \leq 1, \theta \neq \frac{1}{4}$ について

$$\mathcal{D}((\Lambda+\alpha)^\theta) = \begin{cases} H^{2\theta+1}(\Omega), & \text{if } 0 \leq \theta < \frac{1}{4}, \\ H_N^{2\theta+1}(\Omega), & \text{if } \frac{1}{4} < \theta \leq 1 \end{cases}$$

が成り立つ。

最後に，$\nabla\cdot\{u\nabla\chi\}$ の定義の拡張について考える。関数 χ が $(\Lambda+\alpha)^{-1}(L^2(\Omega))$ に属するとすれば，$\chi \in H_N^2(\Omega)$ より Neumann 条件がみたされること，さらに

$$\int_\Omega |u\nabla\chi\nabla\overline{v}|\,dx \leq \|u\|_{L^2}\|\nabla\chi\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}\|\chi\|_{H^{2+\epsilon}}\|v\|_{H^1}$$

が成り立つことに注意して，$u \in L^2(\Omega)$ かつ $\chi \in H_N^{2+\epsilon}(\Omega)$ に対して $\nabla\cdot\{u\nabla\chi\} \in H^1(\Omega)'$ を

$$\langle \nabla\cdot\{u\nabla\chi\}, v\rangle = -\int_\Omega u\nabla\chi\nabla\overline{v}\,dx \qquad \text{for all } v \in H^1(\Omega) \tag{2.1}$$

でもって定義する。このとき

$$\|\nabla\cdot\{u\nabla\chi\}\|_{H^{1'}} \leq C\|u\|_{L^2}\|\chi\|_{H^{2+\epsilon}}, \qquad u \in L^2(\Omega),\ \chi \in H_N^2(\Omega)$$

が成り立つ。

3 局所解の構成

局所解の構成に当たっては，非線形抽象放物型発展方程式の理論を適用する。そのために，基礎空間として積空間

$$X=\left\{\begin{pmatrix}u\\n\\C\end{pmatrix};\ u\in H^1(\Omega)',\ n\in L^2(\Omega),\ C\in H^1(\Omega)\right\} \tag{3.1}$$

を固定する。前節で準備された線形作用素 Λ を用いて，X における線形作用素 A を

$$AU=\begin{pmatrix}d_u\Lambda+a & 0 & 0\\ 0 & d_n\Lambda+1 & 0\\ -\alpha & 0 & d_C\Lambda+\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\n\\C\end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix}u\\n\\C\end{pmatrix}\in\mathcal{D}(A),$$

$$\mathcal{D}(A)=\left\{\begin{pmatrix}u\\n\\C\end{pmatrix};\ u\in H^1(\Omega),\ n\in H^2_N(\Omega),\ C\in H^3_N(\Omega)\right\} \tag{3.2}$$

により定める。さらに，X における非線形作用素 F を

$$F(U)=\begin{pmatrix}-\nabla\cdot\{u\nabla\chi(C)\}+\omega g(n,u)u-f(n,u)u\\ n-g(n,u)u\\ 0\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}u\\n\\C\end{pmatrix}\in\mathcal{D}(F),$$

$$\mathcal{D}(F)=\left\{\begin{pmatrix}u\\n\\C\end{pmatrix};\ u\in H^{1-\varepsilon}(\Omega),\ n\in H^{2-\varepsilon}_N(\Omega),\ C\in H^{3-\varepsilon}_N(\Omega)\right\}$$

により定める，ここで ε は $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ であるように固定された正数である。

所で，$u\in L^2(\Omega)$ と $C\in H^{2+\varepsilon}_N(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned}\|\nabla\cdot\{u\nabla\chi(C)\}\|_{(H^1)'}&\le C\|u\nabla\chi(C)\|_{L^2}\\ &\le C\|u\|_{L^2}\|\nabla\chi(C)\|_{H^{1+\varepsilon}}\le\|u\|_{L^2}p(\|C\|_{H^2})\|C\|_{H^{3-\varepsilon}}\end{aligned}$$

であること，$u\in L^2(\Omega)$ と $n\in H^{2-\varepsilon}(\Omega)$ に対して

$$\|g(n,u)u\|_{L^2}\le\mu\|n+1\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\le C\|n+1\|_{H^{2-\varepsilon}}\|u\|_{L^2}$$

であること，および $u\in H^{1-\varepsilon}(\Omega)$ と $n\in H^1(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned}\|f(n,u)u\|_{H^{1'}}&\le\nu\|(n+1)(u+1)u\|_{L^{2/(1+2\varepsilon)}}\\ &\le\nu\|n+1\|_{L^{2/\varepsilon}}\|u\|_{L^2}\|u+1\|_{L^{2/\varepsilon}}\le C\|n+1\|_{H^1}\|u\|_{L^2}\|u+1\|_{H^{1-\varepsilon}}\end{aligned}$$

であることに注意する，ここで C は適当な定数，$p(\cdot)$ は適当な単調増加関数を表す。この評価式より，F が well-defined であることが分かる。さらに，指数 $\eta = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ について

$$\mathcal{D}(A^\eta) \subset \mathcal{D}(F)$$

となることが分かる。この包含関係は $\eta < 1$ に着目すると，非線形作用素 F が解析的半群の生成作用素 A の摂動として扱うことができることを示している。

以上の考察を踏まえて，Cauchy 問題 (1.1) を積空間 X における次の形の半線形抽象放物型発展方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U), \qquad 0 < t < \infty, \\ U(0) = U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ n_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.3}$$

として定式化することにする。

半線形抽象放物型方程式の研究はすでに長年行われている（[2] 参照）。ここでは，既存の結果の中でも精密化された結果の一つである大崎・八木 [3, Theorem 3.1] を適用する。上で定められた F は実際，仮定の (1.2) $\sim$ (1.6) から次のような Lipschitz 条件

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(\widetilde{U})\| \le p(\|A^{\frac{1}{2}}U\| + \|A^{\frac{1}{2}}\widetilde{U}\|)\{\|A^\eta(U - \widetilde{U})\| \\ + (\|A^\eta U\| + \|A^\eta \widetilde{U}\| + 1)\|A^{\frac{1}{2}}(U - \widetilde{U})\|\}, \qquad U, \widetilde{U} \in \mathcal{D}(A^\eta) \end{aligned}$$

を満たすことが確かめられる。さらに，

$$\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ n \\ C \end{pmatrix} ; u \in L^2(\Omega),\ n \in H^1(\Omega),\ C \in H^2_N(\Omega) \right\}$$

である。[3, Theorem 3.1] より次の定理が得られる。

定理 3.1. 初期関数 $0 \le u_0 \in L^2(\Omega)$, $0 \le n_0 \in H^1(\Omega)$ および $0 \le C_0 \in H^2_N(\Omega)$ に対して問題 (3.3) の局所解が，関数空間

$$\begin{cases} 0 \le u \in \mathcal{C}((0, T_{U_0}]; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{U_0}]; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{U_0}]; H^1(\Omega)'), \\ 0 \le n \in \mathcal{C}((0, T_{U_0}]; H^2_N(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{U_0}]; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{U_0}]; L^2(\Omega)) \\ 0 \le C \in \mathcal{C}((0, T_{U_0}]; H^3_N(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{U_0}]; H^2_N(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, T_{U_0}]; H^1(\Omega)) \end{cases} \tag{3.4}$$

の中に一意的に構成される。存在区間 $[0, T_{U_0}]$ は，初期値のノルム $\|u_0\|_{L^2} + \|n_0\|_{H^1} + \|C_0\|_{H^2}$ のみにより決定される。

本定理の解の非負性についての主張は，切断法により示される（[4, Section 7] 参照）。

4 ア・プリオリ評価式

定理 3.1 によれば，局所解が構成できる時間区間幅は初期関数のノルム $\|u_0\|_{L^2}$, $\|n_0\|_{H^1}$, $\|C_0\|_{H^2}$ に依存して決まる。したがって，関数空間 (3.4) に属する局所解についてこれらのノルムに関するア・プリオリ評価が示されれば大域解が構成されることになる。本節では，n_0 について条件

$$n_0 \in L^\infty(\Omega) \tag{4.1}$$

を追加してこの評価式を示す。

以下，$U = \begin{pmatrix} u \\ n \\ C \end{pmatrix}$ は区間 $[0, T_U]$ 上において関数空間 (3.4) に属する Cauchy 問題 (3.4) の局所解とする。

第一段 (1.1) の n についての拡散方程式に最大値の定理を適用すると

$$\|n(t)\|_{L^\infty} \le \|n_0\|_{L^\infty}, \qquad 0 \le t \le T_U \tag{4.2}$$

を得る。

第二段 上段の結果を考慮して，仮定 (1.3), (1.5) より

$$\begin{aligned} g(n,u)u &\le \widetilde{\mu} u, & 0 \le n \le \|n_0\|_{L^\infty},\ u \ge 0, \\ f(n,u)u &\ge \delta u^2 - \widetilde{\nu} u, & 0 \le n \le \|n_0\|_{L^\infty},\ u \ge 0 \end{aligned}$$

となるような定数 $\widetilde{\mu} > 0$ と $\widetilde{\nu} > 0$ を定める。$n(t)$ を既知関数とみると，(1.1) の方程式は u と C についての連立方程式とみなすことができるから，大崎，辻川，八木，三村 [5, Section 4] で示されたと同様のテクニックが適用できる。実際，上の条件に注意すると [5, Proposition 4.1] の証明の第一段から第四段までの議論が適用可能であることが分かり

$$\|u(t)\|_{L^2} + \|C(t)\|_{H^2} \le p_{n_0}(\|u_0\|_{L^2} + \|C_0\|_{H^2}), \qquad 0 \le t \le T_U \tag{4.3}$$

が導かれる，ここで $p_{n_0}(\cdot)$ は $\widetilde{\mu}$ と $\widetilde{\nu}$ に依存して決まる単調増加連続関数である。

第三段 (1.1) の第 2 式に Δn を乗じて Ω 上で積分すると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla n|^2 dx + d_n \int_\Omega |\Delta n|^2 dx \le \widetilde{\mu} \int_\Omega u|\Delta n|\, dx$$

を得る。ここで

$$\|\nabla n\|_{L^2}^2 \le \zeta \|\Delta n\|_{L^2}^2 + C_\zeta \|n\|_{L^2}^2, \qquad \zeta > 0$$

に注意すると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla n|^2 dx + \left(\frac{d_n}{2} - \zeta\right)\int_\Omega |\Delta n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla n|^2 \\ &\qquad \le C\|u(t)\|_{L^2}^2 + C_\zeta \|n(t)\|_{L^2} \le p_{n_0}(\|u_0\|_{L^2} + \|C_0\|_{H^2}) + C_\zeta \|n_0\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

となり，結局

$$\|n(t)\|_{H^1} \le p_{n_0}(\|u_0\|_{L^2} + \|n_0\|_{H^1} + \|C_0\|_{H^2}), \qquad 0 \le t \le T_U \tag{4.4}$$

と評価できることが分かる，ただし $p_{n_0}(\cdot)$ は初期関数 n_0 に依存して決まる単調増加連続関数である。

以上から，次の大域解の構成ができる。

定理 4.1. 初期関数 $0 \le u_0 \in L^2(\Omega)$, $0 \le n_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ および $0 \le C_0 \in H^2_N(\Omega)$ について，(1.1) の大域解が関数空間

$$\begin{aligned}
0 \le u &\in \mathcal{C}((0,\infty); H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty); H^1(\Omega)'),\\
0 \le n &\in \mathcal{C}((0,\infty); H^2_N(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,\infty); H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty); L^2(\Omega)),\\
0 \le C &\in \mathcal{C}((0,\infty); H^3_N(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,\infty); H^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty); H^1(\Omega))
\end{aligned}$$

において一意的に構成される。

さらに，解の評価式として次の結果が成り立つ。

定理 4.2. 初期関数 $0 \le u_0 \in L^2(\Omega)$, $0 \le n_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ および $0 \le C_0 \in H^2_N(\Omega)$ について，その大域解は評価式

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{H^1} + \|n(t)\|_{H^2} + \|C(t)\|_{H^3}\\
&\qquad \le \{(\sqrt{t})^{-1} + 1\} p_{n_0}(\|u_0\|_{L^2} + \|n_0\|_{H^1} + \|C_0\|_{H^2}), \qquad 0 < t < \infty
\end{aligned}$$

をみたす，ここで $p_{n_0}(\cdot)$ は n_0 に依存して決まる単調増加連続関数である。

証明. (4.3) および (4.4) で示されたように

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{L^2} + \|n(t)\|_{H^1} + \|C(t)\|_{H^2}\\
&\qquad \le p_{n_0}(\|u_0\|_{L^2} + \|n_0\|_{H^1} + \|C_0\|_{H^2}), \qquad 0 < t < \infty
\end{aligned}$$

が成り立つ。さらに，区間 $(0, T_{U_0}]$ において

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{H^1} + \|n(t)\|_{H^2} + \|C(t)\|_{H^3}\\
&\qquad \le (\sqrt{t})^{-1} p_{n_0}(\|u_0\|_{L^2} + \|n_0\|_{H^1} + \|C_0\|_{H^2}), \qquad 0 < t < T_{U_0}
\end{aligned}$$

が成り立つ，ここで $T_{U_0} > 0$ は初期関数のノルム

$$\|u_0\|_{L^2} + \|n_0\|_{H^1} + \|C_0\|_{H^2}$$

のみに依存して決まる正定数である。

以上の結果を併せることにより，定理の評価式が得られる。 □

参考文献

[1] R. Dautray and J.-L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, Vol. 1-6, Springer, Berlin, 1993.

[2] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer, Berlin, 1983.

[3] K. Osaki and A. Yagi, *Global existence for a chemotaxis-growth system in* R^2, Adv. Math. Sci. Appl. **12** (2002), 587-606.

[4] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (2nd Ed.), Springer, Berlin, 1983.

[5] K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi and M. Mimura, *Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations*, Nonlinear Analysis **51** (2002), 119-144.

[6] M. Aida, M. Efendiev and A. Yagi, *Quasilinear abstract parabolic evolution equations and exponential attractors*, to appear.