数理解析研究所講究録 1359 巻 2004 年 13-29

距離行列で表される2次形式の極値問題

元富山大学　　泉野　佐一 (Saichi Izumino)
Faculty of Education, Toyama University
不二越工業高校　中村　登 (Noboru Nakamura)
Fujikoshi-kogyo Senior Highschool

1　問題設定

先に Ozeki の不等式 [3, 8] について調べていたとき，次のような問題に出合った.

$$x, y, z \geq 0, \quad x + y + z = k \ \ (\text{一定})$$

のとき，2 次形式

$$u = axy + bxz + cyz \ \ (a, b, c > 0\ ;\ \text{定数})$$

の最大値 $u_{\max}$ を求めること．答えは $a \geq b \geq c$ と仮定して，

$$\delta = 2ab + 2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2$$

とおいたとき，$\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ならば $\delta > 0$ で，

$$u_{\max} = \begin{cases} \dfrac{abc}{\delta} k^2 & \text{if } a \leq b + c \\ \dfrac{a}{4} k^2 & \text{if } a \geq b + c \end{cases}$$

ところで，上記問題に関連して n 個の実数 $x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \geq 0$ は不要) についての不等式

$$(1.1) \qquad (u :=) \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq \frac{n-1}{2n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

が成り立つことが確かめられる．これから，

$$\max\left\{\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\ ;\ \sum_{i=1}^{n} x_i = k\right\} = \frac{n-1}{2n}k^2$$

がただちに導かれる．($x_1 = \cdots = x_n = k/n$ とおけばよい．)

いま，n 次の（正方）行列 A_0，$F(=F_n)$，n 次のベクトル $x \in R^n$ を

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

とおくと，先の (1.1) は

$$\frac{1}{2}(A_0 x, x) \le \frac{n-1}{2n}(Fx, x)$$

と書き表される．($(\cdot,\cdot)$ は内積を表す．) これは行列不等式

(1.2) $$A_0 \le \frac{n-1}{n}F$$

と同値である．いま，一般の 2 次形式

(1.3) $$v = \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} \ge 0)$$

について対応する行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (a_{ij} = a_{ji} \ge 0)$$

を定義したとき，$v = \dfrac{1}{2}(Ax, x)$ と表される．このとき，A について，(1.2) のような不等式

(1.4) $$A \le \lambda F \qquad \exists\,\lambda > 0$$

を得たい．かかる λ の下限を λ_A とするならば，すべての $a_{ij}(i \ne j)$ が 1 となっている (1.1) と同様に，(1.3) について

$$v_{\max} = \frac{1}{2}\lambda_A k^2$$

が得られることも容易に証明できる．なお，A_0，A のように $a_{ij}=a_{ji}\geq 0$, $a_{ii}=0$ となる行列を距離行列 (distance matrix) と呼んでいる本 [7, p. 184] があり，ここではこの呼び方をすることにした．

ところで，$x_i\geq 0$ の条件がないとき，上記 (1.4) を満たす $\lambda>0$ が存在しないことがある．実際，$n=3$, $k=1$ とし，

$$A:=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\leq\lambda\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad \exists\,\lambda>0$$

とすると，$x=(x_1,x_2,x_3)^t=(s,1-2s,s)^t$ に対して

$$(Ax,x)=2s^2\leq\lambda=\lambda(Fx,x)$$

となり，$|s|$ が十分大きいとき，この不等号は成り立たない．

いま，(1.4) を満たす $\lambda>0$ が存在するとき, A は 'F-bounded above' (F-b.a.) と呼ぶことにする．このとき，問題として

(i) A が F-b.a. となる条件を求めること，

(ii) A が F-b.a. のとき (1.4) を満たす λ の下限 λ_A，あるいは (1.3) の $v_{\max}$ を求めること，

(iii) $x_i\geq 0$ の条件を付け加えたときの $v_{\max}$ を求めること

などが考えられる．これらについて報告したい．

2 A が F-b.a. となる条件

n 次行列 $C=(c_{ij})$ (c_{ij} は実数) に対して

$$C_{(i_1\ldots i_r)}=\begin{bmatrix}c_{i_1i_1}&\cdots&c_{i_1i_r}\\\vdots&\ddots&\vdots\\c_{i_ri_1}&\cdots&c_{i_ri_r}\end{bmatrix}\qquad(1\leq r\leq n,\ \ 1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n)$$

を C の首座小行列 (principal minor) という．

対称行列の非負性 ($C\geq 0\Longleftrightarrow(Cx,x)\geq 0,\ x\in R^n$) の判定について次のことが知られている．

補題 2.1. ([5, p. 161], [6, p. 567].) n 次対称行列 C の階数 (rank) を $r=\mathrm{rank}C$ とするとき，C が非負 (nonnegative) であるための必要十分条件は，C の適当な首座小行列の nest

$$C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_r \quad (C_k = C_{(i_1 \dots i_k)})$$

で $$\det C_1 > 0, \dots, \det C_r > 0$$
となるものが存在すること．

特に $r = n$ のとき，C が正値ならば C のすべての首座小行列式は正であり，逆も成り立つ．

いま

$$B(\lambda) = \lambda F - A$$

とおくとき, A が F-b.a. となる条件 (1.4) は，$\exists\lambda > 0$ $s.t.$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda - a_{12} & \dots & \lambda - a_{1n} \\ \lambda - a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda - a_{n-1,n} \\ \lambda - a_{n1} & \dots & \lambda - a_{n,n-1} & \lambda \end{bmatrix} \geq 0 \tag{2.1}$$

となる．この条件は補題 2.1 から，$B(\lambda)$ の階数を $r(\lambda)$ とすると，適当な首座小行列の nest $B_1(\lambda) \subset \cdots \subset B_{r(\lambda)}(\lambda)$ で

$$\det B_k(\lambda) > 0 \qquad (k = 1, \dots, r(\lambda))$$

となるものが存在するということになる．$r(\lambda)$ について，$\mu > \lambda$ ならば，各 k に対して

$$B_k(\mu) = B_k(\lambda) + (\mu - \lambda)F_k \geq B_k(\lambda)$$

だから $\det B_k(\mu) > 0$．したがって, $r(\mu) \geq r(\lambda)$ であり，いま,

$$r^* = \sup\{r(\lambda)\ ;\ \lambda > 0\}\ (\leq n)$$

とする．これは $B(\lambda) = \lambda F - A$ の最大階数ということになる．そこでいま

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda > 0\ ;\ r(\lambda) = r^*\}$$

とおく．こうすると，以上のことから

A が F-b.a.
$\Longleftrightarrow \exists r^* \in \{1, \dots, n\},\ B_1(\lambda) \subset \cdots \subset B_{r^*}(\lambda),$
$\quad \mathrm{rank}\ B(\lambda) = r^*,\ \det B_k(\lambda) > 0\ \ for\ \ \lambda > \exists\lambda_0,\ k = 1, \dots, r^*.$

そこで $\det B_k(\lambda)$ $(1 \leq k \leq r^*)$ についてよりくわしく計算してみる. $A_k = A_{(i_1 \ldots i_k)}$ となるが, 便宜上, これを $(a_{ij})_{i,j=1}^k$ とかく.

$$\det B_k(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & \lambda - a_{12} & \ldots & \lambda - a_{1k} & 1 \\ \lambda - a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda - a_{k-1,k} & 1 \\ \lambda - a_{k1} & \ldots & \lambda - a_{k,k-1} & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \ldots & -a_{1k} & 1 \\ -a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{k-1,k} & 1 \\ -a_{k1} & \ldots & -a_{k,k-1} & 0 & 1 \\ -\lambda & \ldots & -\lambda & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \ldots & -a_{1k} & 1 \\ -a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{k-1,k} & 1 \\ -a_{k1} & \ldots & -a_{k,k-1} & 0 & 1 \\ -\lambda & \ldots & -\lambda & -\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \det \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \ldots & -a_{1k} & 1 \\ -a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{k-1,k} & 1 \\ -a_{k1} & \ldots & -a_{k,k-1} & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(-1)^k \det \left[\begin{array}{c|c} A_k & (1 \ldots 1)^t \\ \hline (1 \ldots 1) & 0 \end{array} \right] - (-1)^{k-1} \det A_k.$$

いま,

$$\Delta(A_k) = (-1)^k \det \left[\begin{array}{c|c} A_k & (1 \ldots 1)^t \\ \hline (1 \ldots 1) & 0 \end{array} \right], \quad D(A_k) = (-1)^{k-1} \det A_k$$

と記すことにすると,

$$\det B_k(\lambda) = \lambda \Delta(A_k) - D(A_k). \tag{2.2}$$

このことと, 後ほど示す事実 (定理 3.8 (2)):

$$\det \begin{bmatrix} \Delta(A_{k-1}) & D(A_{k-1}) \\ \Delta(A_k) & D(A_k) \end{bmatrix} \geq 0 \tag{$*$}$$

を用いて，次の定理を示すことができる.

定理 2.2.
(1) · $\Delta(A_1)=1,\ D(A_1)=0.$
· $2\le k\le r^*$ のとき，$\Delta(A_k)>0, D(A_k)>0.$
· $r^*<n$ で $r^*<k\le n$ のとき，$\Delta(A_k)=D(A_k)=0.$
ただし，A_k は A の任意の首座小行列とする.
(2) $r^*=\rho:=\mathrm{rank}\ A.$
(3) $\lambda^*:=\dfrac{D(A_\rho)}{\Delta(A_\rho)}=\max\limits_{1\le k\le\rho}\dfrac{D(A_k)}{\Delta(A_k)}$, $\lambda>\lambda^*$ のとき, $A\le\lambda F.$

略証. (1) $r^*=2\le n$ のときは計算で容易にわかる. $2<r^*\le n$ で $3\le k\le r^*$ とする. このとき

$$\Delta(A_{k-1})>0,\ D(A_{k-1})>0\ \Rightarrow\Delta(A_k)>0,\ D(A_k)>0$$

を示したい. まず十分大きいすべての λ に対して

$$\det B_k(\lambda)=\lambda\Delta(A_k)-D(A_k)>0$$

だから $\Delta(A_k)\ge 0$ となり，次の 2 つの case が考えられる.

Case 1 : $\Delta(A_k)>0$ のとき，$D(A_k)\le 0$ を仮定すると

$$\Delta(A_{k-1})D(A_k)\ -\ \Delta(A_k)D(A_{k-1})<0.$$

これは $(*)$ に反する. したがって $D(A_k)>0.$

Case 2 : $\Delta(A_k)=0$ のとき，$(*)$ より $\Delta(A_{k-1})D(A_k)\ge 0.$
つまり $\qquad D(A_k)\ge 0.$
しかし，十分大きいすべての $\lambda>0$ に対して

$$\det B_k(\lambda)=-D(A_k)>0$$

だから，$D(A_k)<0$ でなければならない. これは矛盾である. よって $\Delta(A_k)\ne 0$. (つまりこのような case はおこらない.)

(2) まず，A の階数が ρ だから r ($r>\rho$) 次の首座小行列式はすべて 0 となる. (1) より，$\det A_{r^*}\ne 0$. したがって，$r^*\le\rho$. 次に，$\rho>r^*$ ならば, ある首座小行列 A_ρ について $D(A_\rho)=(-1)^{\rho-1}\det A_\rho\ne 0$. これは (1) の $D(A_\rho)=0$ に矛盾する. よって $\rho=r^*$.

(3) $(*)$ より容易に不等式

$$\frac{D(A_{k-1})}{\Delta(A_{k-1})}\le\frac{D(A_k)}{\Delta(A_k)}\quad(k=2,\dots,\rho)$$

を得る．これから求める不等式を得る．

例 1. $n=3,\ A=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} (=A_3)$

$A_2=\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ とする．

$\Delta(A_2)=2a,\ D(A_2)=a^2, \Delta(A_3)=2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2(=\delta)$,
$D(A_3)=2abc.$

$a,b,c>0,\ \delta>0$ ならば，$\Delta(A_k), D(A_k)>0\ \ (k=2,3)$ で A は F-b.a. となり

$$\lambda^*=\frac{D(A_3)}{\Delta(A_3)}=\frac{2abc}{\delta}.$$

例 2. $n=4,\ A=\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & d & 0 & f \\ c & e & f & 0 \end{bmatrix} (=A_4)$

$A_2=\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & d \\ b & d & 0 \end{bmatrix}$ とする．

$\Delta(A_2)=2a,\ D(A_2)=a^2,\ \Delta(A_3)=2ab+2ad+2bd-a^2-b^2-d^2$,
$D(A_3)=2abd$,
$\Delta(A_4)=2\{(a+f)\widetilde{af}+(b+e)\widetilde{be}+(c+d)\widetilde{cd}-abd-ace-bcf-def\}$,
$D(A_4)=af\cdot\widetilde{af}+be\cdot\widetilde{be}+cd\cdot\widetilde{cd}.$
$(\widetilde{af}=-af+be+cd,\ \widetilde{be}=af-be+cd,\ \ \widetilde{cd}=af+be-cd.)$

したがって，$\Delta(A_k), D(A_k)>0\ \ (k=2,3,4)$ ならば A は F-b.a. で，

$$\lambda^*=\frac{D(A_4)}{\Delta(A_4)}.$$

Remark. 距離行列と三角形の面積，四面体の体積 ([1, p. 247]) について

(1) 平面上の 3 点 P_1, P_2, P_3 を頂点とする三角形の面積を S とする．
$P_iP_j=d_{ij}$ とし，

$$T_3=\begin{bmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$S=\frac{1}{4}\{\Delta(T_3)\}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\left\{-\det\begin{bmatrix}0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & 1\\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & 1\\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(2) 空間の 4 点 P_1,P_2,P_3,P_4 を頂点とする四面体の体積を V とする. $P_iP_j=d_{ij}$ とし，行列 T_4 を

$$T_4=\begin{bmatrix}0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2\\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2\\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2\\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0\end{bmatrix}$$

とおくと，$V=\frac{1}{12\sqrt{2}}\{\Delta(T_4)\}^{\frac{1}{2}}$.

3　$A\le\lambda F$ を満たす $\lambda>0$ の下限と (Ax,x) の条件付極値

$$\mathbf{1_n}=(1,\ldots,1)^t\in R^n$$

と定義すると，

$$(x,\mathbf{1_n})=\sum_{i=1}^{n}x_i,\ F=\mathbf{1_n}\otimes\mathbf{1_n},\ (Fx,x)=(x,\mathbf{1_n})^2$$

などがいえる．いま，A は F-b.a. として，

$$\lambda_A=\inf\{\lambda>0\ ;\ A\le\lambda F\},$$

$$\mu_A=\sup\{(Ax,x)\ ;\ (x,\mathbf{1_n})=1\}$$

と定義する．このとき次が成り立つ.

定理 3.1. A が F-b.a. のとき,

$$\lambda_A = \mu_A. \tag{3.1}$$

A が F-b.a を仮定しないとき (先の定義の下で)

$$\lambda_A < \infty \Longleftrightarrow \mu_A < \infty$$

であり, したがって一方を仮定すれば $\lambda_A = \mu_A$ となる.

証明. A が F-b.a. とし, $\lambda > \lambda_A$ とする. すると,
$(x, \mathbf{1_n}) = 1$ のとき,

$$(Ax, x) \leq \lambda(Fx, x) = \lambda(x, \mathbf{1_n})^2 = \lambda.$$

したがって,

$$(Ax, x) \leq \lambda_A.$$

これから

$$\mu_A \leq \lambda_A.$$

次に逆方向の不等式を得たい. まず $(x, \mathbf{1_n}) \neq 0$ のとき, $y = \dfrac{1}{(x, \mathbf{1_n})}x$ とおくと, $(y, \mathbf{1_n}) = 1$ だから

$$(Ay, y) \leq \mu_A.$$

つまり,

$$(Ax, x) \leq \mu_A(x, \mathbf{1_n})^2 = \mu_A(Fx, x).$$

$(x, \mathbf{1_n}) = 0$ のときは, $x_\epsilon = x + \epsilon\mathbf{1_n}$, $\epsilon > 0$ とおいて, $(x_\epsilon, \mathbf{1_n}) \neq 0$ から

$$(Ax_\epsilon, x_\epsilon) \leq \mu_A(Fx_\epsilon, x_\epsilon).$$

$\epsilon \to 0$ ならしめて

$$(Ax, x) \leq \mu_A(Fx, x)(= 0).$$

したがって, すべての $x \in R^n$ に対して

$$(Ax, x) \leq \mu_A(Fx, x).$$

つまり,

$$A \le \mu_A F.$$

よって

$$\mu_A \ge \lambda_A.$$

これから

$$\mu_A = \lambda_A. \qquad \text{(他の証明は略.)}$$

先に, 定理 2.2 で ($\rho = \mathrm{rank}A$ として)

$$\lambda > \lambda^* = \frac{D(A_\rho)}{\Delta(A_\rho)} \Rightarrow A \le \lambda F$$

を示した. したがって λ_A の定義から

$$\lambda^* \ge \lambda_A = \mu_A \tag{3.2}$$

が成り立つことになる. (あとから示すように実はこの 3 者は等しい.)
次に $\mu_A(=\lambda_A)$ は, $(x, \mathbf{1_n}) = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ の条件の下で

$$v := \frac{1}{2}(Ax, x) = \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

の極値の 2 倍だから, これは Lagrange の乗数法で求めることができる:

$$w = v - \mu(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)$$

とおいて, 各 x_i で偏微分して連立方程式

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \sum_{j \in \{\bar{i}\}} a_{ij} x_i x_j - \mu = 0 \tag{3.3}$$

$$(i = 1, \ldots, n,\ \{\bar{i}\} = \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\})$$

を得る. これは行列 A を用いて

$$Ax = \mu \mathbf{1_n} \tag{3.4}$$

と表される. A が可逆 (invertible) と仮定すれば

$$x = \mu A^{-1} \mathbf{1_n}.$$

$(x, \mathbf{1_n}) = 1$ の条件から $\mu(A^{-1}\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n}) = 1$. これから

$$\mu = \frac{1}{(A^{-1}\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n})}.$$

さらに

$$x = \frac{1}{(A^{-1}\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n})} A^{-1}\mathbf{1_n} (= x^*). \tag{3.5}$$

v は最大値 $v_{\max} = \dfrac{1}{2}\mu_A$ をもつことから，この $x = x^*$ に対する v の値の 2 倍が (Ax, x) の極値 (最大値) となる．つまり

$$\mu_A = (Ax^*, x^*) = \frac{1}{(A^{-1}\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n})}.$$

以上のことをまとめると，次がいえる．

定理 3.2. A が F-b.a. で可逆のとき

$$\mu_A = 2v_{\max} = \frac{1}{(A^{-1}\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n})} \tag{3.6}$$

であり，この値 μ_A は $x (= x^*) = \dfrac{1}{(A^{-1}\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n})} A^{-1}\mathbf{1_n}$ で実現される．

さらに実は (3.6) の値 μ_A が $\lambda^* = \dfrac{D(A_n)}{\Delta(A_n)}$ $(A_n = A)$ に等しく，また，A の可逆性を仮定しないときには，

$$\mu_A = \lambda^* = \frac{D(A_\rho)}{\Delta(A_\rho)} = \frac{1}{(A_\rho^{-1}\mathbf{1_n},\ \mathbf{1_n})}$$

が成り立つ．$(\rho = \mathrm{rank}A.)$　これらのことを示すために以下 2, 3 の準備をする．

行列 $A = (a_{ij})$ の adjugate と呼ばれる adj$A$ を

$$\mathrm{adj}A = (A_{ij})^t \quad (A_{ij} \text{ は } a_{ij} \text{ の余因子})$$

と定義する．このとき，

$$A \cdot (\mathrm{adj}A) = (\mathrm{adj}A) \cdot A = (\det A)I. \quad (I = I_n \text{ は } n \text{ 次単位行列.})$$

したがって A が可逆，つまり $\det A \neq 0$ のとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{adj}A).$$

次のことはよく知られている.

補題 3.3. ([4, p. 73], [5, p. 256]) A を n 次の行列とし,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ c^t & e \end{bmatrix},\ b,\ c \in R^n\ (b = (b_1, \ldots, b_n)^t,\ c = (c_1, \ldots, c_n)^t),\ e \in R$$

とする. このとき,

$$\det \tilde{A} = e \cdot (\det A) - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} b_i c_j = e \cdot (\det A) - ((\mathrm{adj}A)b, c). \tag{3.7}$$

補題 3.4. A が可逆のとき,

$$(A^{-1}\,\mathbf{1_n},\,\mathbf{1_n}) = -\frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{bmatrix} A & \mathbf{1_n} \\ \mathbf{1_n}^t & 0 \end{bmatrix} = \frac{\Delta(A)}{D(A)}. \tag{3.8}$$

証明. (3.6) と (3.7) ($b = c = \mathbf{1_n}, e = 0$ とおく) から

$$\begin{aligned}(A^{-1}\mathbf{1_n},\,\mathbf{1_n}) &= \frac{1}{\det A}((\mathrm{adj}\ A)\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n}) \\ &= -\frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{bmatrix} A & \mathbf{1_n} \\ \mathbf{1_n}^t & 0 \end{bmatrix} = \frac{\Delta(A)}{D(A)}.\end{aligned}$$

A が必ずしも可逆でないとき $\rho = \mathrm{rank}A$ として, (3.8) で A を A_ρ と置き換えて

$$(A_\rho^{-1}\mathbf{1}_\rho, \mathbf{1}_\rho) = \frac{\Delta(A_\rho)}{D(A_\rho)}(= \lambda^*)\ .$$

このことを用いると

定理 3.5. A が F-b.a. のとき,

$$\lambda_A = \mu_A = \frac{1}{(A_\rho^{-1}\mathbf{1}_\rho, \mathbf{1}_\rho)} = \frac{D(A_\rho)}{\Delta(A_\rho)} = \lambda^*.$$

証明. (3.2) の逆向き $\lambda^* \leq \mu_A$ をいえばよい.
これは, $(A_\rho x, x) \leq \mu_A(F_\rho x, x) = \mu_A(x, \mathbf{1}_\rho)^2$ ($x \in R^\rho$) で, $x = A_\rho^{-1}\mathbf{1}_\rho$ とおいて得られる.

補題 3.6. A が可逆で

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & 0 \end{array}\right],\ (A^{-1}b, b) = \gamma \neq 0$$

とする．このとき $\tilde{A}$ も可逆で

$$\tilde{A}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} - \dfrac{1}{\gamma}(A^{-1}b)(A^{-1}b)^t & \dfrac{1}{\gamma}A^{-1}b \\ \hline \dfrac{1}{\gamma}(A^{-1}b)^t & -\dfrac{1}{\gamma} \end{array}\right].$$

証明． 例えば $\tilde{A}$ と上記右辺の行列を乗じて容易に I_{n+1} を得る．

補題 3.7. 補題 3.6 と同じ仮定の下で

$$(\tilde{A}^{-1}\mathbf{1}_{n+1}, \mathbf{1}_{n+1}) = (A^{-1}\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n}) - \frac{1}{\gamma}\{(A^{-1}b, \mathbf{1_n}) - 1\}^2. \tag{3.9}$$

特に

$$(\tilde{A}^{-1}\mathbf{1_{n+1}}, \mathbf{1_{n+1}}) \leq (A^{-1}\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n}). \tag{3.10}$$

証明． 補題 3.6 より

$$(\tilde{A}^{-1}\,\mathbf{1_{n+1}}, \mathbf{1_{n+1}}) = \left(\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} - \dfrac{1}{\gamma}(A^{-1}b)(A^{-1}b)^t & \dfrac{1}{\gamma}A^{-1}b \\ \hline \dfrac{1}{\gamma}(A^{-1}b)^t & -\dfrac{1}{\gamma} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{1_n} \\ \hline 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{1_n} \\ \hline 1 \end{array}\right]\right)$$

$$= \left(\left[\begin{array}{c} A^{-1}\mathbf{1_n} - \dfrac{1}{\gamma}(A^{-1}b)(A^{-1}b)^t + \dfrac{1}{\gamma}A^{-1}b \\ \hline \dfrac{1}{\gamma}(A^{-1}b)^t\mathbf{1_n} - \dfrac{1}{\gamma} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{1_n} \\ \hline 1 \end{array}\right]\right)$$

$$= (\tilde{A}^{-1}\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n}) - \frac{1}{\gamma}((A^{-1}b)(A^{-1}b)^t\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n}) + \frac{1}{\gamma}(A^{-1}b, \mathbf{1_n}) + \frac{1}{\gamma}(A^{-1}b)^t\mathbf{1_n} - \frac{1}{\gamma}$$

$$= (A^{-1}\mathbf{1_n}, \mathbf{1_n}) - \frac{1}{\gamma}\{(A^{-1}b, \mathbf{1_n}) - 1\}^2.$$

定理 3.8. $\{A_k\}_{2\leq k\leq n}$ を A の首座小行列の nest とする．
(1) A_{k-1} が可逆，A_k の k 列目の上部 $(k-1)$ 次列ベクトルを

$a = (a_{1k}, \ldots, a_{k-1,k})^t$ とする．つまり，$A_k = \left[\begin{array}{c|c} A_{k-1} & a \\ \hline a^t & 0 \end{array}\right]$.

このとき，$(A_{k-1}^{-1}a, a) \neq 0$ ならば

$$(A_k^{-1}\mathbf{1_k}, \mathbf{1_k}) = (A_{k-1}^{-1}\mathbf{1_{k-1}}, \mathbf{1_{k-1}}) - \frac{1}{(A_{k-1}^{-1}a, a)}\{(A_{k-1}^{-1}a, \mathbf{1_{k-1}}) - 1\}^2.$$

(2) $\det \begin{bmatrix} \Delta(A_{k-1}) & D(A_{k-1}) \\ \Delta(A_k) & D(A_k) \end{bmatrix} = (\det A_k[k; \mathbf{1}_k])^2 \geq 0.$

ここで $A_k[k; \mathbf{1_k}]$ は行列 A_k の k 列目を $\mathbf{1_k}$ で置き換えたものである．

証明． (1) 補題 3.7 の (3.9) で A を A_{k-1}, $b = a$ とおけばよい．
(2) $D(A_{k-1}) \neq 0$, $D(A_k) \neq 0$ (つまり A_{k-1}, A_k は可逆) として証明すれば十分．このとき，

$$(A_{k-1}^{-1}a, a) = \frac{D(A_k)}{D(A_{k-1})} \neq 0$$

だから，補題 3.4 の (3.8) (n を k とおいたもの) と (1) より，

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(A_k)}{D(A_k)} &= (A_k^{-1}\mathbf{1_k}, \mathbf{1_k}) \\ &= (A_{k-1}^{-1}\mathbf{1_{k-1}}, \mathbf{1_{k-1}}) - \frac{1}{(A_{k-1}^{-1}a, a)}\{(A_{k-1}^{-1}a, \mathbf{1_{k-1}}) - 1\}^2 \\ &= \frac{\Delta(A_{k-1})}{D(A_{k-1})} + \frac{\det A_{k-1}}{\det A_k}\{(A_{k-1}^{-1}a, \mathbf{1_{k-1}}) - 1\}^2.\end{aligned}$$

ここで各項に $D(A_{k-1})D(A_k)(= -(\det A_{k-1})(\det A_k))$ を乗ずると

$$\begin{aligned}\Delta(A_k)D(A_{k-1}) &= \Delta(A_{k-1})D(A_k) - (\det A_{k-1})^2\{(A_{k-1}^{-1}a, \mathbf{1_{k-1}}) - 1\}^2 \\ &= \Delta(A_{k-1})D(A_k) - \{((\mathrm{adj}A_{k-1})a, \mathbf{1}_{k-1}) - \det A_{k-1}\}^2.\end{aligned}$$

補題 3.3 の (3.7) ($b = \mathbf{1_{k-1}}$, $c = a$, $e = 1$ とおく) から

$$\Delta(A_{k-1})D(A_k) - \Delta(A_k)D(A_{k-1}) = \left(\det \left[\begin{array}{c|c} A_{k-1} & \mathbf{1}_{k-1} \\ \hline a^t & 1 \end{array}\right]\right)^2.$$

したがって

$$\det \begin{bmatrix} \Delta(A_{k-1}) & D(A_{k-1}) \\ \Delta(A_k) & D(A_k) \end{bmatrix} = (\det A_k[k; \mathbf{1}_k])^2.$$

この等式は，しかし，$D(A_{k-1}) = 0$，あるいは $D(A_k) = 0$ としても，やはり成り立つことは明らかである．

4 非負領域での極値

(Ax,x) の最大値をこれまでは和一定条件 $(x,\mathbf{1_n})=1$ のみの下で考えてきた．ここでは非負条件

$$(4.1) \qquad x \geq 0 \text{ つまり } x_1,\ldots,x_n \geq 0$$

をつけ加えたとき，極値問題はどうなるか 2, 3 考えたい．しかし A が F-b.a. となる場合のみを考える．前節の (3.5) から，A が可逆で $x^* = A^{-1}\mathbf{1_n}/(A^{-1}\mathbf{1_n},\mathbf{1_n}) \geq 0$ ならば，x^* が (4.1) を満たし問題はない．ρ ($=$ rank A) $< n$ で A_ρ が可逆のとき，$x_\rho^* = A_\rho^{-1}\mathbf{1}_\rho/(A_\rho^{-1}\mathbf{1}_\rho,\mathbf{1}_\rho) \geq 0$ ならば，x_ρ^* 以外の残りの成分を 0 とおいてできる n 次ベクトルを x^* とおけば，これが (4.1) を満たすものとなる．

補題 4.1. A が F-b.a. ならば (Ax,x) は

$$\pi\ (=\pi_n) = \{x \in R^n\ ;\ (x,\mathbf{1_n}) = 1\}$$

において，concave である．つまり，$x,y \in \pi$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $\beta = 1-\alpha$ に対して

$$(4.2) \qquad (A(\alpha x+\beta y),\alpha x+\beta y) \geq \alpha(Ax,x)+\beta(Ay,y).$$

証明． $(Ax,y)=(x,Ay)=(Ay,x)$ などに注意する．

$$(A(\alpha x+\beta y),\alpha x+\beta y)-\alpha(Ax,x)-\beta(Ay,y)$$
$$= -\alpha\beta\{(Ax,x)-2(Ax,y)+(Ay,y)\} = -\alpha\beta(Az,z),\ z=x-y.$$

ところで，F-b.a. の条件より，$\exists\lambda_A > 0$ s.t. $A \leq \lambda_A F$. したがって

$$(Az,z) \leq \lambda_A(F_z,z) = \lambda_A(z,\mathbf{1_n})^2 = \lambda_A((x,\mathbf{1_n})-(y,\mathbf{1_n}))^2 = 0.$$

これから (4.1) を得る．非負領域での極値を考えるために，π ($=\pi_n$) の非負領域について次の定義をすると都合がよい．

$$\pi_+(=\pi_{n,+}) = \{x \in R^n\ ;\ x \geq 0,\ (x,\mathbf{1_n}) = 1\},$$

$$\partial\pi_+(=\partial\pi_{n,+}) = \{x \in \pi_+\ ;\ \exists i\ s.t\ x_i = 0\}\ (=\pi_+ \text{ の境界}).$$

定理 4.2. A が F-b.a., $(Ax^*,x^*)=\mu_A$ とし，$x^* \notin \pi_+$, つまり $\exists x_i^* < 0$ とする．このとき，

$$(4.3) \qquad \max_{x\in\pi_+}(Ax,x) = \max_{y\in\partial\pi_+}(Ay,y).$$

特に $x_1^*, \ldots, x_{n-1}^* \geq 0,\ x_n^* < 0$ (x_i^* は x^* の i 成分) のとき

(4.4) $$\max_{x \in \pi_+} (Ax, x) = \max_{y \in \pi_{n-1,+}} (A_{n-1}y, y).$$

証明. $x \in \pi_+$ とし

$$x(\alpha) = \alpha x + (1-\alpha)x^* \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

とおく. 補題 4.1 を用いると

$$\begin{aligned}(Ax(\alpha), x(\alpha)) - (Ax, x) &\geq \alpha(Ax, x) + (1-\alpha)(Ax^*, x^*) - (Ax, x) \\ &= (1-\alpha)(\mu_A - (Ax, x)) \geq 0.\end{aligned}$$

したがって

$$(Ax(\alpha), x(\alpha)) \geq (Ax, x).$$

いま,

$$\alpha^* = \min\{\alpha > 0\ ;\ x(\alpha) \geq 0\}$$

とおくと, $x(\alpha^*) \in \pi_+$ で, $x(\alpha^*)$ の少なくとも 1 つの成分が 0.
したがって $x(\alpha^*) \in \partial\pi_+$ となり, (4.3) を得る.
次に $x_1^*, \ldots, x_{n-1}^* \geq 0,\ x_n^* < 0$ のときは,

$$x(\alpha^*) = [y,\ 0]^t, \quad y = [x_1(\alpha^*)\ \ \ldots\ \ x_{n-1}(\alpha^*)]^t$$

と書けば, $y \in \pi_{n-1}$ となり, これから (4.4) を得る.

例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} (= A_4)$$

$$A_1 = [0],\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

とすると, $\Delta(A_1) = 1,\ D(A_1) = 0,\ \Delta(A_2) = 6,\ D(A_2) = 9,\ \Delta(A_3) = 27,$ $D(A_3) = 18,\ \Delta(A_4) = 12,\ D(A_4) = 27$ となり, A は F-b.a.. このとき,

$$\mu_A = \frac{D(A_4)}{\Delta(A_4)} = \frac{9}{4},\quad x^* = \frac{1}{4}[3, 3, 1, -3]^t. \quad (x_1^*, x_2^*, x_3^* > 0,\ x_4^* < 0.)$$

$$\max_{x \in \pi_{4,+}} (Ax, x) = \max_{x \in \pi_{3,+}} (A_3 y, y) = \frac{D(A_3)}{\Delta(A_3)} = 2.$$

Remark. 非負領域での極値問題は非線形計画法の中の2次計画法の問題といえる．2次計画法では，次のように定式化される．

2次形式: $v = (c, x) - (Ax, x)$ の最大化

$$\begin{cases} \text{非負制約条件:} & x \geq 0, \\ \text{一次制約条件:} & Bx = d. \end{cases}$$

ここで，A, B はそれぞれ $n \times n$, $m \times n$ 行列，$c \in R^n$, $d \in R^m$ とする．(この場合，通常は A が正値 $(A > 0)$ と仮定されている.)

本稿で取り扱った極値問題をこれに当てはめてみると

$c = 0$,

$-A$ が n 次距離行列,

$B = (1, \ldots, 1)$ $(1 \times n$ 行列$)$,

$d = 1$

となるが，距離行列は正値でも負値でもないので，上記の定式化された手法を直ちに適用することはできないようである．

参考文献

[1] 岩田至康, 幾何学大辞典 2 , 基本定理と問題, 槇書店, 1979.

[2] 泉野佐一, 解析学教材研究—ある条件付極値問題, 富山大学教育学部紀要 第54号 (1999), 29-33.

[3] 大関信雄, 大関清太，不等式への招待，近代科学社, 1987.

[4] 高木貞治, 代数学講義, (改定新版), 共立出版, 1994.

[5] 遠山啓, 行列論, 共立出版, 1955.

[6] 藤原松三郎, 代数学第一巻, 内田老鶴圃, 1941.

[7] A. Basilevsky, *Applied Matrix Algebra in Statistical Science*, New York, 1983.

[8] S. Izumino, H. Mori and Y. Seo, *On Ozeki's inequality*, J. Inequal. Appl., **2** (1998), 235-253.