

種々の tight デザインの存在・非存在問題について

坂内英一 (Eiichi Bannai)

九大・数理 (Graduate School of Mathematics Kyushu University)

この原稿は上記タイトルで行った数理研研究集会「符号と暗号の代数的数理」の講演内容 (黒板による) をかなり忠実に再現したものです。まず前半では、デザインとは何か? Tight デザインとは何か? ということ、球面デザインの考察に重点を置いて、非専門家に向けて説明することを試みました。次に後半では、主に球面デザインの概念の拡張であるユークリッドデザインの概念について説明し、最近の坂内悦子 (九大数理) との共同研究である、Tight Euclidean 4-デザインの分類問題に関する新しい結果を紹介し、あまり細かい技術的なことはここでは述べませんので、詳細は最後に挙げた文献表にある論文を参照していただければと思います。

1 コードとデザイン, 特に tight デザイン

まず、いろいろなコードの概念を説明し、デザインの概念とどのような関係にあるかを述べます。

コードとは?

(V, d) を距離空間とします。例えば、 $V = F_q^n, d = \text{Hamming 距離}$ 、が一つの例ですし、 $V = S^{n-1}, d = \text{球面上の測地線距離 (あるいは } R^n \text{ での直線距離)}$ も一つの例です。最初の例では V は有限個の点からなる集合であり (アソシエーションスキームのひとつの例でもあり)、後の例では、 V はもちろん無限集合です。リーマン対称空間の一つの例でもあります。

部分集合 $X \subset V$ に対して、

$$d(X) = \text{Min}\{d(x, y) | x, y \in X, x \neq y\}$$

と定義します。

- 与えられた $|X|$ に対して $d(X)$ を最大にすること、あるいは、
- 与えられた d_0 に対して $d(X) \geq d_0$ のもとに $|X|$ を最大にすること、がコード理論の目的と言えます。

先に述べた $V = F_q^n$ の場合が通常符号理論で考察されているものであり、 $V = S^{n-1}$ の場合が球面上のコード理論です。後者の場合の例を見てみましょう。

• $V = S^{n-1}, d_0 = \pi/3$ (ただし測地線距離を用いる. R^n 中の直線距離では $d_0 = 1$) とする. このとき, $d(X) \geq d_0$ のもとでの $|X|$ の最大値が n 次元の kissing number $\tau(n)$ と呼ばれるもので, $d(X) \geq d_0$ のもとに $|X|$ の決定は興味ある問題です. よく知られているように,

$$\tau(2) = 6,$$

$$\tau(3) = 12,$$

$$\tau(4) = 24 \text{ または } 25,$$

$$\tau(5) = 40 \text{ と } 46 \text{ の間},$$

$$\tau(8) = 240$$

$$\tau(24) = 196560$$

が知られています. $n \leq 3$ と $n = 8, 24$ のみに対して正確な値が知られていて, それ以外の n に対してはいずれも未解決であることに注意してください. なお, 2003 年秋にロシアの Oleg Musin の $\tau(4) = 24$ を証明したという論文がプレプリントとして公表され, 現在検証中です. この報告集が発行されたときまでには正しいか否かが確定していると期待されます.

デザインとは?

コードの目的を要約すると, 上で述べたように, 「その元である 2 点の間の距離の最小値ができるだけ離れているような (すなわちできるかぎり局所的にばらばらになっているような) 部分集合」を求めることでしたが, デザインの目的は, 「全体を近似する良い部分集合」を求めることになります. 近似するとはどういう意味か, 具体例で見てみましょう.

組合せ論的デザイン (通常のデザイン)

$t \leq k \leq v, \lambda$ をいずれも自然数とし, V を $|V| = v$ となる集合, $V^{(k)}$ で V の k 個の元からなる部分集合の全体を表す. $B \subset V^{(k)}$ に対して, $B \subset V^{(k)}$, あるいは (V, B) , が $t(v, k, \lambda)$ design (単に t -デザインとも言う) であるとは, 任意の $T \in V^{(t)}$ に対して, $\lambda(T) = |\{B \in B \mid T \subset B\}|$ が T によらずに一定であることで定義する. この値を λ で表す. 通常 $B \neq V^{(k)}$ と仮定する. この時次の定理が成り立つことが良く知られている.

定理 (一般化された Fisher の不等式, RayChaudhuri-Wilson)

(V, B) が t -デザインかつ $t = 2s$ ならば

$$b := |B| \geq \binom{v}{s}$$

が成り立つ.

なお, 上で等号を満たすような $2s$ -デザインを tight $2s$ -デザインとよぶ. tight $2s$ -デザインの分類問題は多くの仕事が行なわれているが (Enomoto-Ito-Noda-Bremner, Bannai), $t = 2s \geq 8$ の場合は完全な解決には至っていない.

ベクトル空間, Hamming スキームにおけるデザイン

$V = \mathbb{F}_q^n$ において $C \subset V$ を線形コード (ベクトル部分空間) とする. C が t -デザインであるとは,

$$d(C^\perp) - 1 \geq t$$

が成り立つことで定義する. ここで $C^\perp = \{x \in \mathbb{F}_q^n \mid x \cdot y = 0, \forall y \in C\}$ である. ここで $x \cdot y$ は \mathbb{F}_q^n の通常の内積を意味する. この時 C が t -デザインであるための必要十分条件は

C が orthogonal array of strength (at least) t であることが知られている (この orthogonal array という概念は純粋に組合せ論的概念であり、講演ではこの概念を説明したがここでは省略する.)

なお、上の定義からわかるようにデザインの強さ t の概念は双対コードの最小距離と本質的に対応するという具合にコードとデザインは密接に関係している。ただし、一般には双対コードの概念がいつも定義できるとは限らない。それを代数的なレベルで (実際の双対コードがなくても) 双対コードに類するもの考えることにより、一般にデザインの概念を導入することが出来たことが、Delsarte 理論の成功の鍵であったといえる。なお、コードではサイズ $|X|$ を $d(X)$ 一定のもとで出来るだけ大きくしたかった訳であるが、デザインでは t が一定のもとで、できるだけサイズ $|X|$ を小さくしたいということになる。一般にその自然な下限を求めることがデザイン理論において重要になる。

C が F_q^n の $2s$ -デザインであれば $|C| \geq \sum_{i=0}^s (q-1)^i \binom{n}{i}$ が成り立つ。組合せデザインの場合と同様に、上で等号を満たすような $2s$ -デザインを tight $2s$ -デザインとよぶ。tight $2s$ -デザインの分類問題は多くの仕事が行なわれているが (Cameron, Delsarte, Noda, Hong など)、 t の大きい場合は $q=2$ の場合を除けば分類は完成している。 $q=2$ の場合のみは完全には解決されていない。

球面デザイン

定義 $X \subset S^{n-1}$, $|X| < \infty$, は次の条件を満たす時 t -デザインであると言う。

$$\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

が高々 t 次の任意の多項式 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して成り立つ。ただし左辺の積分は単位球面上の通常の積分を表す。

- 任意の t と n に対して S^{n-1} における t -デザインが存在する (Seymour-Zaslavsky, 1984)。ただし存在は証明されているが具体的な構成は大きな t に対しては ($n \geq 3$ の時) 未解決である。
- X が S^{n-1} における t -デザインならば次の Fisher 形の不等式が知られている (Delsarte-Goethals-Seidel, 1977)。

$$|X| \geq \begin{cases} \binom{n-1+s}{s} + \binom{n-1+s-1}{s-1}, & t = 2s \text{ の時} \\ 2 \binom{n-1+s}{s}, & t = 2s+1 \text{ の時} \end{cases}$$

この不等式を以下 (★) で表すことにする。

上の不等式で等号が成り立つ時 X は tight な t -デザインであると言う。

定理 (Bannai-Damerell, 1979/80)

$X \subset S^{n-1}$ ($n \geq 3$) が tight な t -デザインならば $t = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 11$ である。

注意: $n = 2$ の tight な t -デザインは正 n 角形の頂点の集合からなる。以下 $n \geq 3$ を仮定する。tight な 1-デザインは antipodal な (すなわち原点に対して対称な) 2点である。

tight な 2-デザインは regular simplex の $n+1$ 個の頂点からなる.

tight な 3-デザインは generalized octahedron の $2n$ 個の頂点からなる. 従って tight 1-, 2-, 3-デザインは任意の次元 n に対して存在する.

tight 4-デザインは $n = (2m+1)^2 - 3$ ときのみ存在の可能性がある. ここで m は自然数であり $m = 1, 2$ の時は tight-4 デザインの存在は知られているが $m \geq 3$ の時はいずれの m に対しても存在・非存在は知られていなかった.

S^{n-1} における tight 5-デザインの存在は S^{n-2} における tight 4-デザインの存在と同値である. 従って S^{n-1} における tight 5- デザインは $n = 3$ または $n = (2m+1)^2 - 2$ の時のみ存在の可能性がある. ($m = 1, 2$ のとき、それぞれ、 $n = 7, 23$, であり、 $|X| = 56, 552$ である. 群として、 $W(E_7), Co_3$ が関係する.)

tight 7-デザインは $n = 3l^2 - 4$ の時のみ存在の可能性がある. ここで l は 2 以上の自然数であり $l = 2, 3$ に対しては存在が知られているが $l \geq 4$ の場合はいずれの l に対しても存在・非存在は知られていなかった. ($l = 2, 3$ のとき、それぞれ、 $n = 8, 23$, であり、 $|X| = 240, 4600$ である. 群としては、 $W(E_8), Co_2$ が関係する.)

tight 11-デザインが存在するならば $n = 24$ であり Leech 格子の minimum ベクトルからなる 196560 個の点の集合である.

従って $n \geq 3$ かつ $t = 4, 5, 7$ の場合のみが未解決で残されている.

これらの残された $t = 4, 5, 7$ の場合は長い間進展が見られなかったが最近次の新しい結果が得られた、ただし、まだ残されている場合が多く残っている.

定理 (Bannai-Munemasa-Venkov-Pétermann, preprint)

$X \subset S^{n-1}$ ($n \geq 3$) が tight な 5-デザインならば ($n = (2m+1)^2 - 2$ であり、 $m = 1, 2$ に対しては存在が知られているが) $m = 3, 4$ に対しては非存在が示される. さらに、無限個の m に対しても非存在が証明される.

$X \subset S^{n-1}$ ($n \geq 3$) が tight な 7-デザインならば ($n = 3l^2 - 4$ であり、 $l = 2, 3$ に対しては存在が知られているが) $l = 4, 5$ に対しては非存在が示される. さらに、無限個の l にたいしても非存在が証明される.

上で述べたように、球面上の tight デザインの分類問題はおおきな進展があった. また、組合せデザインにおける tight デザインの分類問題 (Johnson アソシエーションスキームにおける tight デザインの分類問題と考えられる), ベクトル空間 F_q^n における tight デザインの分類問題 (Hamming アソシエーションスキームにおける tight デザインの分類問題と考えられる), など色々の研究があるが詳細はここでは略す. t -デザイン, tight デザインの概念は一般の Q -polynomial アソシエーションスキームにおいて拡張され, そこでの tight デザインの分類問題もいろいろと考えられている. 球面上の t -デザイン, tight デザインの概念は $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ (実数体, 複素数体, 4元数体, Cayley octaves) の上の射影空間の上でも自然に拡張されている. (Delsarte-Goethals-Seidel, Neumaier, Hoggar, Bannai-Hoggar 参照.) 最近実 Grassmann 空間の上で t -デザインの概念が自然に定義され (Bachoc-Coulangéon-Nebe) またそこでの tight デザインの概念も考えられている (Bachoc-Bannai-Coulangéon). ただし tight デザインの分類問題には手がついていない. t -デザインの概念は他の一般のランクのコンパクトな対称空間に自然に拡張されると思われるがまだ正確に書いたものはない. 複素 Grassmann 空間の場合については三浦佳子の九大修士論文 (2004) 参照.

いずれにせよ, 上の拡張はコンパクトな空間に t -デザインの概念を定義することであつ

たが、非コンパクトな空間（例えばユークリッド空間、あるいは非ユークリッド空間）に t -デザインの概念を定義することは、そのうえの積分が一般には発散して定まらないこともあり、容易ではない。

講演の後半部はユークリッド空間上の t -デザインの概念、tight デザインの分類問題について考えた。

2 ユークリッド空間における t -デザインと tight t -デザイン

まず、球面デザインを拡張する重み付き球面デザインの概念を定義する。

定義

$X \subset S^{n-1}, |X| < \infty,$

$\omega : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ のとき、

(X, ω) が次の条件を満たすとき、球面上の重み ω 付き t -デザインであると言う。

$$\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) \omega(x) d\sigma(x) = \frac{1}{\omega(X)} \sum_{x \in X} \omega(x) f(x)$$

が高々 t 次の任意の多項式 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して成り立つ。ここで、 $\omega(X) = \sum_{x \in X} \omega(x)$ とする。

(なお、この式は球面上の cubature formula あるいは quadrature formula と呼ばれる。)

注意. 球面上の重み ω 付き t -デザインについても、重みのついていない通常の球面上のデザインの不等式 (★) と全く同じ式が成り立つことが解析 (近似理論) の分野では古くから知られていたといえる。従って、厳密な意味では Delsarte-Goethals-Seidel の不等式 (★) は新しくなかったとも言える。しかし、それは、組合せ論の立場からの研究に優れた視点と大きな刺激を与え、以後のこの理論の進展に非常におおきな影響を与えた。(逆にその組合せ論の立場からの研究は現在解析の側からの研究にも影響を与えていると思われる。) なお、重みのついていない球面上のデザインの不等式において、等号が成り立つならば、重みは定数重みなければいけないことが示される。従って、球面上の tight デザインについては、重みのついていない通常のデザインのみを考えれば良いことになる。

次に、ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 上の重み付き t -デザインの概念を述べる。

定義 (Neumaier-Seidel, 1988, Delsarte-Seidel, 1989)

$X \subset \mathbb{R}^n, |X| < \infty,$

$\omega : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ のとき、

(X, ω) が次の条件を満たすとき、ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 上の重み ω 付き t -デザインであると言う。

$$\sum_{i=1}^p \frac{\omega(X_i)}{|S_i|} \int_{S_i} f(x) \omega(x) d\sigma(x) = \sum_{x \in X} \omega(x) f(x)$$

が高々 t 次の任意の多項式 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して成り立つ。

ここで、 $S_i (i = 1, 2, \dots, p)$ を X と交わる原点を中心とする同心球の全体とする。また、 $X_i = X \cap S_i$ とする。

なお, $S_i = \{0\}$ の時も許されるとするが, このときは,
 $\frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} f(x) d\sigma(x) = f(0)$ とする.

重みつきユークリッドデザインについては, 次の結果が知られている.

定理 (Delsarte, Neumaier, Seidel, 1989)

(X, ω) を \mathbf{R}^n における $2e$ -デザインとする. この時

$$\left. \begin{array}{l} e \text{ が偶数または } 0 \notin X \text{ の時は } p \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \text{ であれば} \\ e \text{ が奇数かつ } 0 \in X \text{ の時は } p \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \text{ であれば} \end{array} \right\}$$

$$|X| \geq \binom{n+e}{e}.$$

が成り立つ.

なお, 上で等号の成り立つとき, (X, ω) を (重みつき) tight $2e$ -デザインと呼ぶ. そのようなものの分類問題を考えたい. $t=4$ かつ重み $\omega(x)$ が定数の時, そのようなものの分類が可能というのがこの講演での主定理である. (坂内悦子との共同研究による.)

主定理 (Bannai-Bannai, preprint)

(X, ω) を \mathbf{R}^n における tight 4-デザインとする. weight が定数であるならば

$$X = \{0\} \cup \{S^{n-1} \text{ 上の tight 4-デザイン}\} \text{ である.}$$

ただしここでは球面 S^{n-1} の半径は必ずしも 1 とは限らないものを考えている.

主定理の証明の概略については, 次の節で述べる. なお, ユークリッド空間における tight デザインは, 球面の場合と異なり, 重みが定数重みであるということはいえない. Delsarte-Neumaier-Seidel は重みが定数であるかそうでないかに関わらず, 自明でない tight $2e$ -デザイン ($2e \geq 4$) の非存在を予想しているが, 次の反例が見つかった. ただし, $2e \geq 6$ の場合にはまだ具体的な反例は知られていない.

例

$X = X_1 \cup X_2$, X_1 と X_2 は次の座標で与えられる \mathbf{R}^2 の 2 つの正三角形とする.

$$X_1 = \left\{ (1, 0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\},$$

$$X_2 = \left\{ (-r, 0), \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right), \left(\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}r}{2}\right) \right\}$$

$$X \text{ 上の weight } w \text{ を } w(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_1 \text{ の場合} \\ \frac{1}{r^2} & x \in X_2 \text{ の場合.} \end{cases}$$

この時 X は 4-デザインであり 2 つの同心球面上にあり $|X| = 6$ である.

3 主定理の証明の概略および補足

次の補題が主定理の証明において重要である.

- 補題 X が \mathbb{R}^k の p 個の同心球面上の tight $2e$ -デザインであり $0 \notin X$ であれば次の (1), (2) および (3) が成り立つ.
- (1) $\|x\| = \|y\|$ であれば $w(x) = w(y)$ が成り立つ. すなわち w は各 X_i 上で定数値をとる.
 - (2) 各 $i, 1 \leq i \leq p$, に対して X_i は高々 e -距離集合である.
 - (3) もし w が X 全体で定数値をとるならば $p \leq e$ が成り立つ.

X を \mathbb{R}^k の weight が定数である tight 4-デザインとする. 上の補題より同心球面の個数 p は高々 3 である. $p=3$ の時は $0 \in X$ ということである. 一方 Delsarte, Neumaier, Seidel の結果よりもし $0 \in X$ であれば $X - \{0\}$ もまた 4-デザインである. 従って $p=3$ であれば $|X| - 1 \geq \binom{n+2}{2}$ でなければならず仮定に矛盾する. 従って

- (1) $0 \notin X$ かつ X は 2 つの同心球面上にある,
 - (2) $X = \{0\} \cup \{S^{n-1} \text{ 上の tight 4-デザイン}\}$
- のいずれかである. 以下 (1) がおこらないことの証明の概略を述べる.

$X = X_1 \cup X_2$ とし X_i は原点を中心とする半径 r_i の球面上にあるとする. $|X_1| \geq |X_2|$ としておく. 補題により X_i 高々 2 距離集合であるが n が少し大きければ (すなわち $n \geq 7$ ならば) X_1 は 2-距離集合でなければならない.

ここで次の定理が重要な役割を果たす.

定理 (Larman-Rogers-Seidel, 1977)

X を \mathbb{R}^k の 2-距離集合とする. その 2 つの距離を α, β とする. $|X| > 2n + 3$ が成り立てば自然数 k が存在して $\alpha^2 : \beta^2 = k : k - 1$ が成り立つ.

$\alpha^2 : \beta^2 = k : k - 1$ が成り立てば $(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2})^2 = (2k - 1)^2$ が成り立つことを注意しておく.

さて $X, 0 \notin X$, を前述の様に 2 つの同心球面上の tight 4-デザインとする. この時 tight 4-デザインの定義式を使って $n, |X_1|, R_1 = r_1^2$ の (R_1 に関しては 3 次) 多項式 F が存在して $F(n, |X_1|, R_1) = 0$ になることが分かる. また X_1 の異なる 2 点間の距離を α, β とすると tight 4-デザインの定義式を使って n, X_1 および R_1 の有理式 G が存在して $(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2})^2 = G(n, X_1, R_1)$ と表すことができる. Larman-Rogers-Seidel の定理によれば $G(n, X_1, R_1)$ は奇数の 2 乗でなければならない. また $F(n, |X_1|, R_1) = 0$ の情報により n を固定すると $G(n, X_1, R_1)$ は X_1 に関して単調に減少していること, $n + 6 > G(n, X_1, R_1) > n + 3$ 等が分かり $(2k - 1)^2 = n + 4$ または $n + 5$ でなければならないことが分かる. いずれの場合もその様な $n, |X_1|$ の組合わせがあり得ないことを示すことができる. これらの証明は初等的な微積分だけを用いて行われたがコンピューターによる数値実験によって不等式を予想してのち理論的に証明をつけるという形でなされた.

なお, $n \leq 6$ の場合はそれぞれ特別な考察によって証明することができるが, ここでは詳細は述べないことにする. ([12], [13] 参照.)

以上で主定理, すなわち, Tight Euclidean 4-designs with constant weight の分類が出来た. 詳しくは [2] 参照. また, 日本語の解説としては数理研シンポジウム (2002 年 12 月) 報告集講究録 Vol 1327 の坂内悦子による記事も参照されたい.

この主定理で述べたのと類似の方法を用いて次ぎの場合も解かれた.

(i) Tight Gaussian 4-designs with constant weight あるいは Tight Gaussian 4-designs on 2 concentric spheres の分類. ([3] 参照.)

(ii) Tight optimal 4-designs on 2 concentric spheres の分類. ([4] 参照.)

これらの日本語による解説としては第 20 回代数的組合せ論シンポジウム (2003 年 7 月) 報告集の坂内英一・坂内悦子による記事も参照されたい. そこでは近似理論の方向からの研究についても少し触れている.

上記の (i), (ii), および この原稿の主定理を全て含む 「Master Theorem」として重さ ω が定数でない場合の \mathbb{R}^k の Euclidean tight 4-デザインの分類定理が強く望まれる. もしそれができれば全てはその中に含まれる. また, ここでは Tight 4-design に考察が限られてしまっているが, Tight $2e$ -designs ($e \geq 3$) に対して類似の結果が得られると望ましい. そのネックになっているのは, Larman-Rogers-Seidel の定理が 2-距離集合に関してのみであり, 3-距離集合あるいは e -距離集合 ($e \geq 3$) への拡張が現在まで得られていないことによる. Larman-Rogers-Seidel の定理の 3-距離集合あるいは e -距離集合 ($e \geq 3$) への拡張が強く望まれる.

最後に, 比較的詳しい文献表をのせてこの原稿を終える. (この原稿で引用されていない文献も含まれているが, なんらかの意味で球面デザインおよびユークリッドデザインと関連しているもののみを挙げ, アソシエーションスキームなどにおけるデザインについては挙げていない.)

References

- [1] E. Bannai and E. Bannai, *Algebraic Combinatorics on Spheres* (in Japanese) Springer Tokyo 1999.
- [2] E. Bannai and E. Bannai, *On Euclidean tight 4-designs*, preprint.
- [3] E. Bannai and E. Bannai, *Tight Gaussian 4-designs*, preprint.
- [4] E. Bannai and E. Bannai, *On Optimal Tight 4-Designs on 2 Concentric Spheres*, preprint.
- [5] E. Bannai and R. M. Damerell, *Tight spherical designs I*, J. Math. Soc. Japan 31 (1979) 199-207.
- [6] E. Bannai and R. M. Damerell, *Tight spherical designs II*, J. London Math. Soc. 21 (1980) 13-30.
- [7] E. Bannai, A. Munemasa and B. Venkov, *The nonexistence of certain tight spherical designs*, with Appendix by Y.-F. S. Pétermann, preprint.
- [8] G. E. P. Box and J. S. Hunter, *Multi-factor experimental designs for exploring response surfaces*, Ann. Math. Statist. 28, (1957)195-241

- [9] P. Delsarte, J.-M. Goethals and J. J. Seidel, *Spherical codes and designs*, Geom. Dedicata 6 (1977) 363-388.
- [10] P. Delsarte and J. J. Seidel, *Fisher type inequalities for Euclidean t -designs*, Lin. Algebra and its Appl. 114-115 (1989) 213-230.
- [11] C. F. Dunkl and Y. Xu, *Orthogonal polynomials of several variables*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 81. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. xvi+390 pp.
- [12] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, *On Euclidean sets having only two distances between points I*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 69=Indag. Math. 28 (1966) 479-488.
- [13] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, *On Euclidean sets having only two distances between points II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 69=Indag. Math. 28 (1966) 489-504.
- [14] A. Erdélyi et al. *Higher transcendental Functions, Vol II, (Bateman Manuscript Project)*, MacGraw-Hill (1953).
- [15] S. Karlin and W. J. Studden, *Tchebycheff Systems with Application in Analysis and Statistics*, Interscience, 1966.
- [16] J. Kiefer, *Optimum designs V, with applications to systematic and rotatable designs*, Proc. 4th Berkeley Sympos. 1, (1960) 381-405.
- [17] D. G. Larman, C. A. Rogers and J. J. Seidel, *On two-distance sets in Euclidean space*, Bull London Math. Soc. 9 (1977) 261-267.
- [18] A. Neumaier and J. J. Seidel, *Discrete measures for spherical designs, eutactic stars and lattices*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 91=Indag. Math. 50 (1988) 321-334.
- [19] A. Neumaier and J. J. Seidel, *Measures of strength $2e$ and optimal designs of degree e* , Sankya 54 (1991) 299-309.
- [20] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*. Fourth edition. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975. xiii+432 pp.