数理解析研究所講究録 1362 巻 2004 年 205-214

Error Analysis of Galerkin Approximations for Compactly Perturbed Equations

Takuya TSUCHIYA [1] (土屋 卓也) [2]

この論文では，主要項に compact 項を付け加えた線形あるいは非線形方程式に対する Galerkin 近似の誤差について考察する．述べる結果はすでに知られているものだが，主要な有限要素法の教科書には書かれていないようなので，ここで説明し，特に若い人の注意を喚起したい．なお，この論文の述べた内容を，講義ノートとしてまとめたものを，[7] においた．

1 inf-sup 条件，離散 inf-sup 条件

まず，良く知られている結果を復習しよう．この節の定理の証明は，文献 [1] を参照のこと．X, Y を Hilbert 空間とし，その内積，norm を，$\|\cdot\|_X$, $(\cdot,\cdot)_X$, $\|\cdot\|_Y$, $(\cdot,\cdot)_Y$ のように表す．また，Y の双対空間（dual space）を Y' と表す．さて，X, Y 上定義された双線形写像（bilnear form）$a : X \times Y \to \mathbb{R}$ が連続であるとは，a が次の条件を満たすことであった:

$$\exists M > 0, \quad |a(x,y)| \le M\|x\|_X\|y\|_Y, \quad \forall x \in X,\ \forall y \in Y. \tag{1.1}$$

連続双線形写像 $a : X \times Y \to \mathbb{R}$ と与えられた $f \in Y'$ に対して，次の方程式を考える:

$$\text{Find } x \in X \quad \text{such that} \quad a(x,y) = f(y), \quad \forall y \in Y. \tag{1.2}$$

この方程式(1.2)が任意の $f \in Y'$ について一意解を持つための必要十分条件は，次の定理で与えられる [1, Theorem 5.2.1]:

定理 1.1 連続双線形写像 $a(x,y)$ に対して，方程式(1.2)が任意の $f \in Y'$ に対して一意解を持つためには，a が次の *2* つの条件を満たすことが必要十分である*:*

$$C_1 := \inf_{\substack{x\in X \\ \|x\|_X=1}} \sup_{\substack{y\in Y \\ \|y\|_Y\le 1}} |a(x,y)| > 0 \tag{1.3}$$

$$\sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|_X=1}} |a(x,y)| > 0, \quad \forall y \in Y, \quad y \ne 0. \tag{1.4}$$

さらに，(1.2)の解 $x \in X$ は，次の評価式を満たす*:* $\|x\|_X \le \|f\|_{Y'}/C_1$. □

[1]Department of Mathematical Sciences, Ehime University
[2]愛媛大学理学部数理科学科, tsuchiya@math.sci.ehime-u.ac.jp

次に，$X_h \subset X, Y_h \subset Y$を有限次元部分空間とすると，(1.2)に対するGalerkin近似は，

$$\text{(1.5)} \qquad \text{Find } x_h \in X_h \quad \text{such that} \quad a(x_h, y_h) = f(y_h), \quad \forall y_h \in Y_h.$$

で定義される．この時，(1.5)の解（**Galerkin解**と呼ぶ）$x_h \in X_h$の誤差について，次の定理が成り立つ [1, Theorem 6.2.1]:

定理 1.2 X，Yを*Hilbert*空間とし，連続双線形写像$a : X \times Y \to \mathbb{R}$は，定理*1.1*の条件(1.3), (1.4)を満たすとする．また，有限次元部分空間$X_h \subset X, Y_h \subset Y$に対して，

$$\text{(1.6)} \qquad C_h := \inf_{\substack{x_h \in X_h \\ \|x_h\|_X = 1}} \sup_{\substack{y_h \in Y_h \\ \|y_h\|_Y \le 1}} |a(x_h, y_h)| > 0$$

$$\text{(1.7)} \qquad \sup_{\substack{x_h \in X_h \\ \|x_h\|_X = 1}} |a(x_h, y_h)| > 0, \quad \forall y_h \in Y_h, \quad y_h \neq 0.$$

が成り立つと仮定する．この時，定理*1.1*より，任意の$f \in Y'$に対して方程式(1.2), (1.5)はそれぞれ一意解$x^0 \in X, x_h^0 \in X_h$を持つ．さらに，誤差$\|x^0 - x_h^0\|_X$に対して，次の評価が成り立つ:

$$\text{(1.8)} \qquad \|x^0 - x_h^0\|_X \le \left(1 + \frac{M}{C_h}\right) \inf_{w_h \in X_h} \|x^0 - w_h\|_X.$$

ここで，Mは(1.1)に出て来る正定数である．□

系 1.3 定理*1.2*の条件が成り立っているとせよ．さらに$h > 0$に依存しない定数ηが存在し，

$$\text{(1.9)} \qquad \inf_{\substack{x_h \in X_h \\ \|x_h\|_X = 1}} \sup_{\substack{y_h \in Y_h \\ \|y_h\|_Y \le 1}} |a(x_h, y_h)| =: C_h \ge \eta > 0$$

となっていると仮定する．このとき，

$$\lim_{h \to 0} \inf_{w_h \in X_h} \|x^0 - w_h\|_X = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \|x^0 - x_h^0\|_X = 0$$

が成り立つ．□

Remark: (1) 条件(1.3)を，**inf-sup条件**，**Babuška-Brezzi-Kikuchi条件**などと呼ぶ．条件(1.9)は，**離散inf-sup条件**と呼ばれ，有限要素解析のさまざま場面で現れる重要なものである．

(2) 定理1.2の証明を見ると，Galerkin解x_h^0は，真の解x^0をある射影作用素Π_hで射影したものであることがわかる: $x_h^0 = \Pi_h x^0$. また，次の評価が成り立つ:

$$\text{(1.10)} \qquad \|\Pi_h\|_{\mathcal{L}(X,X)} \le \frac{M}{C_h} \le \frac{M}{\eta}.$$

よって，補題1.3の仮定(1.9)が成り立っていれば，$\|\Pi_h\|_{\mathcal{L}(X,X)}$は$h$によらず一様に有界である．

2 Compact作用素による摂動

前節では，方程式(1.2)のGalerkin近似の誤差について復習した．この節では，(1.2)にcompact項を付け加えた方程式のGalerkin近似を考えるが，その前に，Fink-Rheinboldtにより与えられたGalerkin解の特徴付けを紹介する [4].

連続双線形写像aは，前節の定理の仮定を満たすとする．線形作用素$A \in \mathcal{L}(X, Y')$を，aを用いて

$$\langle Ax, y\rangle := a(x, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

と定義すると，AはXとY'の間の同型写像を与える．すると(1.2)は，Y'上の方程式$Ax = f$に書き直すことができ，また一意解xは，$x = A^{-1}f$と書ける．

有限次元部分空間$X_h \subset X$, $Y_h \subset Y$を考える．この時，定理1.2の条件が成り立つとすると，上の(1.2)のGalerkin近似方程式(1.5)は，一意解$x_h \in X_h$を持つ．この対応$X \ni x \mapsto x_h \in X_h$により，射影作用素$\Pi_h : X \to X_h$を定義できた．Galerkin解$x_h \in X_h$は，射影$\Pi_h$と作用素$A$を使って，$x_h = \Pi_h x = \Pi_h A^{-1} f$と書けることに注意する．また，$A|_{X_h} : X_h \to Y_h'$は，$X_h$と$Y_h'$の間の同型写像になるので，作用素$P_h$を$P_h := A\Pi_h A^{-1}$と定義すると，$P_h$は$Y'$から$Y_h'$への射影作用素になる．

ここで，作用素$F_h : X \to Y'$を

$$F_h(x) := (I_{Y'} - P_h)Ax + P_h F(x), \quad F(x) := Ax - f, \quad x \in X \tag{2.1}$$

と定義する．ただし，$I_{Y'}$は，Y'上の恒等写像である．この作用素F_hを，**Fink-Rheinboldtの離散化作用素**と呼ぶことにしよう．この時，次の補題が成り立つ:

補題 2.1 (Fink-Rheinboldt [4]) 作用素$F_h : X \to Y'$を(2.1)で定義するとき，$x \in X$が方程式$F_h(X) = 0$の解であるための必要十分条件は，$x \in X_h$であり，かつ$x = \Pi_h A^{-1} f$である（つまり，$x \in X_h$は，*Galerkin*解である）ことである．

証明: 証明は簡単なので省略する．[4, Lemma 5.1] を参照．□

F_hの定義はもっと簡単になるが，(2.1)のように定義しておくと，非線形方程式への拡張が容易になることが，後にわかるだろう．

つぎに，別の連続双線形写像$b : X \times Y \to \mathbb{R}$を導入し，上の方程式を$b$によって“摂動した”方程式

$$a(w, y) + b(w, y) = f(y), \quad \forall y \in Y \tag{2.2}$$

を考えることにしよう．もちろん，この方程式のGalerkin解$w_h \in X_h$は，

$$a(w_h, y_h) + b(w_h, y_h) = f(y_h), \quad \forall y_h \in Y \tag{2.3}$$

によって定義される．上と同様に，連続双線形写像$b : X \times Y \to \mathbb{R}$から

$$\langle Bx, y\rangle := b(x, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y \tag{2.4}$$

によって，作用素 $B \in \mathcal{L}(X, Y')$ が定義される．方程式(2.2)は，$Ax + Bx = f \in Y'$ と書くことができる．また，Galerkin 方程式(2.3)は，

$$\langle Aw_h, y_h \rangle = \langle -Bw_h + f, y_h \rangle, \quad \forall y_h \in Y_h$$

と書けるが，これは w_h が $w_h = \Pi_h A^{-1}(-Bw_h + f)$ という X_h 上の方程式の解であることを意味する．ここで，$F(x) := Ax + Bx - f$ とおいた上で(2.1)で作用素 $F_h : X \to Y$ を定義すると，方程式 $F_h(w) = 0$ は

$$\begin{aligned}(I_{Y'} - P_h)Aw + P_h(Aw + Bw - f) &= (A + P_hB)w - P_hf \\ &= A(w + \Pi_h A^{-1}(Bw - f)) = 0\end{aligned}$$

と書けるので，補題 2.1 は再び成り立つ．

以上の準備のもとで，方程式(2.2)に対する Galerkin 近似方程式の解 w_h の誤差について考察しよう．次の定理が成り立つ:

定理 2.2 以下を仮定する．

(1) 連続双線形写像 $a : X \times Y \to \mathbb{R}$ は，定理 *1.1* の条件を満たす．

(2) 有限次元部分空間 $X_h \subset X$, $Y_h \subset Y$ と a の組み合わせに対して，定理 *1.2*, 系 *1.3* の仮定が成り立つ．

(3) 方程式(1.2)の真の解 $x \in X$ を，その *Galerkin* 解 $x_h \in X_h$ に対応させる射影 Π_h に対して，

$$\lim_{h \to 0} \|x - \Pi_h x\|_X = 0, \quad \forall x \in X \tag{2.5}$$

が成り立つ．

(4) 連続双線形写像 $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ から(2.4)によって定義される作用素 $B \in \mathcal{L}(X, Y')$ は，*compact* であり，写像 $A + B \in \mathcal{L}(X, Y')$ は，X と Y' の間の同型写像である．

この時，十分小さい $h > 0$ に対しては，(2.2)の真の解 w に対する *Galerkin* 近似方程式(2.3)は一意解 $w_h \in X_h$ を持ち，さらに次の誤差評価が成り立つ:

$$\|w_h - \Pi_h w\|_X \leq C \|w - \Pi_h w\|_X. \tag{2.6}$$

ただし，C は，h に依存しない正定数である．

Fredholm の交代定理より，$\mathrm{Ker}(A + B) = \{0\}$ ならば $A + B$ が同型写像になることがわかる．定理 2.2 を示すために，まず次の補題を示そう:

補題 2.3 射影作用素 $P_h : Y' \to Y_h'$ が，

$$\|P_h\|_{\mathcal{L}(Y', Y')} \leq C, \qquad \lim_{h \to 0} \|f - P_h f\|_{Y'} = 0, \quad \forall f \in Y'$$

を満たすとする．ただし，C は $h > 0$ に依存しない正定数である．この時，任意の *compact* 作用素 $K \in \mathcal{K}(X, Y')$ に対して，$\lim_{h \to 0} \|(I_{Y'} - P_h)K\|_{\mathcal{L}(X, Y')} = 0$ が成り立つ．

証明: 背理法による．補題の主張が成り立たないとしよう．すると，ある正数$\varepsilon > 0$が存在し，任意の正整数kに対してある$h < 1/k$があって，

$$\|(I_{Y'} - P_h)K\|_{\mathcal{L}(X,Y')} \geq \varepsilon$$

となっている．このようなhについては，ある$x_k \in X$が存在して，

$$\|x_k\|_X \leq 1, \quad \|(I_{Y'} - P_h)Kx_k\|_{Y'} \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

となっている．作用素Kの compact 性より，$\{x_k\}$の適当な部分列$\{x_{k'}\}$をとると，列$\{Kx_{k'}\}$はあるfに強収束する: $\lim_{k'\to\infty}\|Kx_{k'} - f\|_{Y'} = 0$. よって，

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2} \leq \|(I_{Y'} - P_h)Kx_{k'}\|_{Y'} &\leq \|(I_{Y'} - P_h)f\|_{Y'} + \|(I_{Y'} - P_h)(f - Kx_{k'})\|_{Y'} \\ &\leq \|(I_{Y'} - P_h)f\|_{Y'} + (1 + C)\|f - Kx_{k'}\|_{Y'} \to 0\end{aligned}$$

となり矛盾を得る．□

定理 2.2 の証明: まず，$w_h \in X_h$が Galerkin 近似方程式(2.3) の解になるためには，

$$F_h(w_h) = 0 \Longleftrightarrow (A + P_hB)w_h = P_hf \Longleftrightarrow A(w_h + \Pi_hA^{-1}Bw_h) = A\Pi_hA^{-1}f$$

が必要十分条件であることを思い出そう．ただし，$P_h := A\Pi_hA^{-1}$であった．ここで，$h > 0$に依存しない定数$L > 0$が存在し，十分小さなすべての$h > 0$について

$$\|(A + P_hB)v_h\|_{Y'} \geq L\|v_h\|_X, \quad \forall v_h \in X_h \tag{2.7}$$

が成り立つことを示そう．最初に，(1.9), (1.10), (2.5) に注意すると，射影$P_h : Y' \to Y_h'$は補題 2.3 の仮定を満たすので，$\lim_{h\to 0}\|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X,Y')} = 0$であることを注意する．さらに，

$$\begin{aligned}\|(A + P_hB)v_h\|_{Y'} &= \|(A + B)v_h - (I_{Y'} - P_h)Bv_h\|_{Y'} \\ &\geq \left(\|(A + B)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y',X)} - \|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X,Y')}\right)\|v_h\|_X\end{aligned}$$

なので，

$$\frac{1}{2}\|(A + B)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y',X)} \geq \|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X,Y')}$$

となるように$h > 0$を十分小さくすれば，$L := \frac{1}{2}\|(A + B)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y',X)}$に対して(2.7)が成り立つ．不等式(2.7)は，作用素$(A + P_hB)|_{X_h} : X_h \to Y_h'$が単射であることを意味する．部分空間$X_h$は有限次元で，定理 1.2 の仮定より$X_h$と$Y_h$の次元は同じなので，$(A + P_hB)|_{X_h} : X_h \to Y_h'$は同型写像を与える．よって，Galerkin 解$w_h$の一意存在が示された．

不等式(2.6)は，$w_h - \Pi_hw$を(2.7)のv_hに代入し，

$$(A + P_hB)(w_h - \Pi_hw) = P_hB(w - \Pi_hw)$$

を使えば$C := L^{-1}\|P_hB\|_{\mathcal{L}(X,Y')} = 2\|(A + B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y',X)}\|P_hB\|_{\mathcal{L}(X,Y')}$として得られる．□

系 2.4 定理 *2.2* の仮定が全て成り立っているとする．この時，十分小さい $h > 0$ に対して，方程式(2.2)の真の解 w とその *Galerkin* 解 w_h の誤差評価として，次の不等式が成り立つ:

$$\|w - w_h\|_X \leq (1 + C)\|w - \Pi_h w\|_X \leq (1 + C)\left(1 + \frac{M}{\eta}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|w - v_h\|_X.$$

ただし，M, η, C は，それぞれ定理 *1.2*, 系 *1.3*, 定理 *2.2* に現れる正定数である．よって，特に

$$\lim_{h \to 0} \inf_{v_h \in X_h} \|w - v_h\|_X = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \|w - w_h\|_X = 0$$

が成り立つ．□

Remarks: (1) この節で述べた結果は，[3] に書いてある.（この文献 [3] は電気通信大学の加古孝先生に教えて頂きました．感謝いたします.）しかし，その他の主要な教科書に書かれていないので，いろいろな人によりいろいろな形で再発見されている．例えば，[5], [6] などをみよ．加古孝先生自身も，[3] を読む前に，この節の結果を見つけていたそうです．

(2) 上の議論を注意深く読むと，compact 作用素 $B : X \to Y'$ の線形性は，“ほとんど” 使っていないことがわかる．実際，上の議論は B が非線形 compact 作用素の場合に直ちに拡張できる．それを次の節で説明しよう．

3 非線形写像の場合への拡張

前節までで，連続双線形写像から定義される線形方程式と，その compact 作用素による摂動に対する Galerkin 近似解の存在と誤差について議論した．この節では，これまでの議論が，あるタイプの非線形方程式に直ちに拡張されることをみる．

考える方程式は次のようなものである．X, Y を Hilbert 空間とし，連続双線形写像 $a : X \times Y \to \mathbb{R}$ は，定理 1.1 の条件を満たすとする．線形作用素 $A : X \to Y'$ は，a から定義される線形作用素である（つまり，$\langle Ax, y\rangle := a(x, y), \forall x \in X, \forall y \in Y$ である）．Hilbert 空間 X のある開集合 $U \subset X$ 上で定義された（非線形）作用素 $\mathcal{B} : U \to Y'$ が与えられたとして，$f \in Y'$ に対して方程式

$$\langle Ax, y\rangle + \langle \mathcal{B}(x), y\rangle = \langle f, y\rangle, \quad \forall y \in Y$$

を考える．あるいは，$f \in Y'$ も作用素 $\mathcal{B}$ にこめて考えるとして（つまり，$\mathcal{B}(x) - f$ をあらためて $\mathcal{B}(x)$ と書くことにして），

$$\langle Ax, y\rangle + \langle \mathcal{B}(x), y\rangle = 0, \quad \forall y \in Y \tag{3.1}$$

を考えることしてもよい．

さて，方程式 $Ax+\mathcal{B}(x)=0$ の解 x の Galerkin 近似解の存在とその誤差について議論するが，その際次のことを仮定しよう．X, Y は Hilbert 空間で，$X_h \subset X$, $Y_h \subset Y$ は有限次元部分空間である．

仮定 3.1 (1) 非線形作用素 $\mathcal{B}$ は，U 上で C^1 級である．方程式 $F(x) := Ax+\mathcal{B}(x)=0$ の解 $x_0 \in U$ が存在し，かつ $DF(x_0)=A+D\mathcal{B}(x_0) \in \mathcal{L}(X,Y')$ は X と Y' の間の同型写像を与える．
(2) *Fréchet* 微分 $\mathcal{B}(x_0) \in \mathcal{L}(X,Y')$ は，*compact* 作用素であり，双線形写像 $a: X\times Y \to \mathbb{R}$ は，定理 *1.1* の仮定を満すとする．
(3) 有限次元部分空間 $X_h \subset X$, $Y_h \subset Y$ と a の組み合わせに対して，定理 *1.2*, 系 *1.3* の仮定が成り立つ．
(4) 方程式(1.2)の真の解 $x \in X$ を，その *Galerkin* 解 $x_h \in X_h$ に対応させる射影 Π_h に対して，

$$\lim_{h\to 0}\|x-\Pi_h x\|_X = 0, \quad \forall x \in X$$

が成り立つ．
(5) 作用素 $F := A+\mathcal{B}: U \to Y'$ の *Fréchet* 微分 $DF(x)=A+D\mathcal{B}(x)$ は，任意の開凸集合 $\mathcal{O}\subset U$ 上で *Lipschitz* 連続であるとする: つまり，各開凸集合 $\mathcal{O}\subset U$ に対して正定数 $C(\mathcal{O})$ が存在し，

$$\|DF(x)-DF(y)\|_{\mathcal{L}(X,Y')} \le C(\mathcal{O})\|x-y\|_X, \quad \forall x,y \in \mathcal{O}$$

が成り立つ．□

議論の基本となるのは，**Kantorovich の定理**（の簡略版）である．Kantorovich の定理の証明はいろいろな教科書に載っていますが，例えば，[9] を見てください．

定理 3.2 (Kantorovich の定理) *A, B* を *Banach* 空間とする．開凸集合 $\mathcal{O}\subset A$ 上で定義された作用素 $f: \mathcal{O}\to B$ は C^1 級写像で，次の仮定を満すとする:

(1) ある点 $z_0 \in \mathcal{O}$ において，*Fréchet* 微分 $Df(z_0) \in \mathcal{L}(A,B)$ は，A と B の間の同型写像であるとする．一般性を失わずに $f(z_0)\neq 0$ と仮定する．
(2) $\mathcal{O}$ 内で *Fréchet* 微分 $Df(x)$ は *Lipschitz* 連続であるとする．つまり，ある正定数 K が存在し，

$$\|Df(z_0)^{-1}(Df(x)-Df(y))\|_{\mathcal{L}(A,A)} \le K\|x-y\|_A, \quad \forall x,y\in\mathcal{O}$$

が成り立つ．
(3) 定数 η と h を，$\eta := \|Df(z_0)^{-1}f(z_0)\|_A$, $h := K\eta$ と定義すると，$h\le \frac{1}{2}$ が成り立つ．
(4) 定数 t^*, t^{**} $(t^*\le t^{**})$ を，優越方程式（*majorant equation*）$g(t) := \frac{1}{2}Kt^2 - t + \eta$ の *2* つの実解とする．さらに，$z_1 := z_0 - Df(z_0)^{-1}f(z_0)$,

$$B(z_1, t^*-\eta) := \left\{ z\in A \;\middle|\; \|z-z_1\|_A < t^*-\eta \right\}$$

と定義すると，$\overline{B(z_1, t^* - \eta)} \subset \mathcal{O}$ が成り立つ．

この時，方程式 $f(z) = 0$ の解 $z^* \in \overline{B(z_1, t^* - \eta)}$ が存在する．この解は，$B(z_0, t^{**}) \cap \mathcal{O}$ ($h < \frac{1}{2}$ の時)，あるいは $\overline{B(z_0, t^{**})} \cap \mathcal{O}$ ($h = \frac{1}{2}$ の時) で一意である．さらに，次の誤差評価が成り立つ:

$$\|z^* - z_0\|_A \le t^* = \frac{2\eta}{1 + \sqrt{1 - 2h}}. \quad \square$$

さて，方程式(3.1)の解 $x_0 \in U$ の Galerkin 近似解 $x_h \in X_h \cap U$ は，もちろん

$$\langle Ax_h, y_h\rangle + \langle \mathcal{B}(x_h), y_h\rangle = 0, \quad \forall y_h \in Y_h \tag{3.2}$$

で定義する．この Galerkin 解の局所一意存在を示すために，再び Fink-Rheinboldt の離散化作用素(2.1)

$$F_h(x) := (I_{Y'} - P_h)Ax + P_h F(x), \qquad F(x) := Ax + \mathcal{B}(x)$$

を使う．ただし，$P_h := A\Pi_h A^{-1}$ であった．Fink-Rheinboldt の離散化作用素(2.1)は，$F_h(x) = Ax + P_h\mathcal{B}(x)$ と書き直すことができることに注意すると，補題 2.1 が再び成り立つことがわかる．つぎの定理が，この節の主定理である．

定理 3.3 仮定 *3.1* が成り立つとすると，十分小さな $h > 0$ に対して方程式(3.2)を満たす *Galerkin* 解 $x_h \in X_h$ が局所的に一意に存在し，さらに誤差評価

$$\|x_h - \Pi_h x_0\|_X \le C\|x_0 - \Pi_h x_0\|_X \tag{3.3}$$

が成り立つ．ただし，C は h に依存しない正定数である．

証明: 設定

$$\begin{aligned} A &:= X_h \text{ with norm } \|x_h\|_X, & z_0 &:= \Pi_h x_0, \\ B &:= Y_h' \text{ with norm } \|f\|_{Y'}, & f &:= F_h \end{aligned}$$

のもとで，Kantorovich の定理を応用することを考える．簡単のために，この証明内では，$B := D\mathcal{B}(x_0) \in \mathcal{K}(X, Y')$ と書く．すると，$DF_h(\Pi_h x_0) = A + P_h D\mathcal{B}(\Pi_h x_0) = A + P_h B + P_h(D\mathcal{B}(\Pi_h x_0) - B)$ である．定理 2.2 の証明と同様に，$h > 0$ に依存しない定数 $L > 0$ が存在し，十分小さなすべての $h > 0$ について

$$\|DF_h(\Pi_h x_0)v_h\|_{Y'} \ge L\|v_h\|_X, \quad \forall v_h \in X_h \tag{3.4}$$

が成り立つことを示そう．証明もほとんど同様だが，念のためにもう一度書いておく．最初に，(1.9), (1.10), (2.5) に注意すると，射影 $P_h : Y' \to Y_h'$ は補題 2.3 の仮定を満たすので，$\lim_{h\to 0} \|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X,Y')} = 0$ であることを注意する．さらに，

$$\begin{aligned} \|DF_h(\Pi_h x_0)v_h\|_{Y'} &= \|(A + B)v_h - (I_{Y'} - P_h)Bv_h + P_h(D\mathcal{B}(\Pi_h x_0) - D\mathcal{B}(x_0))v_h\|_{Y'} \\ &\ge \left(\|(A + B)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y',X)} - \omega(h)\right)\|v_h\|_X \end{aligned}$$

に注意する．ただし，

$$\omega(h) := \|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X,Y')} + \|P_h(D\mathcal{B}(\Pi_h x_0) - D\mathcal{B}(x_0))\|_{\mathcal{L}(X,Y')}$$

$$\lim_{h\to 0}\omega(h) \le \lim_{h\to 0}\|(I_{Y'} - P_h)B\|_{\mathcal{L}(X,Y')} + C\|P_h\|_{\mathcal{L}(Y',Y')}\lim_{h\to 0}\|x_0 - \Pi_h x_0\|_X = 0$$

である．よって，

$$\frac{1}{2}\|(A+B)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y',X)} \ge \omega(h)$$

となるように $h > 0$ を十分小さくすれば，$L := \frac{1}{2}\|(A+B)^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y',X)}$ に対して(3.4)が成り立つ．条件(3.4)は，Fréchet 微分 $DF_h(\Pi_h x_0)$ が X_h から Y_h' への単射であることを示している．条件より，X_h と Y_h の次元は等しいので，$DF_h(\Pi_h x_0)|_{X_h} \in \mathcal{L}(X_h, Y_h')$ は同型写像であることに注意する．つまり，Kantorovich の定理の条件 (1) は満たされる．

Kantorovich の定理の条件 (2) が成り立つことは，仮定 3.1(5) から明らかである．

次に，

$$\lim_{h\to 0}\|DF_h(\Pi_h x_0)^{-1}F_h(\Pi_h x_0)\|_X = 0 \tag{3.5}$$

であることを示す．実際，

$$\begin{aligned}
\|F_h(\Pi_h x_0)\|_{Y'} &= \|P_h F(\Pi_h x_0)\|_{Y'} \le \|P_h\|_{\mathcal{L}(Y',Y')}\|F(\Pi_h x_0) - F(x_0)\|_{Y'} \\
&\le \|P_h\|_{\mathcal{L}(Y',Y')}\left(\int_0^1 \|DF((1-t)\Pi_h x_0 + t x_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y')}dt\right)\|x_0 - \Pi_h x_0\|_X \qquad (3.6)\\
&\le CC_2\|x_0 - \Pi_h x_0\|_X \to 0, \quad h \to 0
\end{aligned}$$

が成り立つので，(3.5)がわかる．よって，Lipschitz 定数 K に対して，$K\eta < \frac{1}{2}$，$\eta := \|DF_h(\Pi_h x_0)^{-1}F_h(\Pi_h x_0)\|_X$ となるように h を十分小さくとれば，Kantorovich の定理の条件 (3), (4) も満たされる．

よって，Kantorovich の定理の条件がすべて満たされるので，ある $x_h \in X_h$ が存在して，方程式 $F_h(x_h) = 0$ を満たす．補題 2.1 より，この x_h は Galerkin 近似方程式(3.2) の解である．さらに，Kantorovich の定理の最後の評価式と(3.6)より

$$\|x_h - \Pi_h x_0\|_X \le 2\eta = 2\|DF_h(\Pi_h x_0)^{-1}F_h(\Pi_h x_0)\|_X \le C\|x_0 - \Pi_h x_0\|_X$$

がわかるので，(3.3)が示される．□

系 3.4 定理 *3.3* の仮定が全て成り立っているとする．この時，十分小さい $h > 0$ に対して，方程式(3.1)の真の解 x_0 とその *Galerkin* 解 x_h の誤差評価として，次の不等式が成り立つ:

$$\|x_0 - x_h\|_X \le (1+C)\|x_0 - \Pi_h x_0\|_X \le (1+C)\left(1 + \frac{M}{\eta}\right)\inf_{v_h\in X_h}\|x_0 - v_h\|_X.$$

ただし，M, η, C は，それぞれ定理 *1.2*, 系 *1.3*, 定理 *3.3* に現れる正定数である．よって，特に

$$\lim_{h\to 0}\inf_{v_h\in X_h}\|x_0 - v_h\|_X = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{h\to 0}\|x_0 - x_h\|_X = 0$$

が成り立つ．□

Remark: この節で述べた結果も，(多分) すでによく知られている．例えば，[2] の結果は，パラメータつきの非線形方程式の有限要素近似についてであるが，(少し見掛けはちがっていても) この節で述べたことと本質的に同様な議論が展開されている．ただし，線形，非線形の場合ともまったく同様に Galerkin 近似の誤差解析の理論が展開できることを注意したのは，この論文が初めてかも知れない．この節の結果は，さらに非線形性が強い方程式に対して拡張できる [8]．しかし，そこでの結果を有限要素法の誤差解析に応用しようとすると，領域の滑らかさに強い仮定が必要である．もう少しうまい方法があるような気がするが，どうすればいいのか現時点 (2004年の初め) では良くわからない．

参考文献

[1] I. Babuška, A.K. Aziz, Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the finite element method, *in "The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations"*, edited by A.K. Aziz, Academic, 1972.

[2] F. Brezzi, J. Rappaz, P.A. Raviart, Finite dimensional approximation of nonlinear problems. Part I. Branches of nonsingular solutions, Numer. Math. 36 (1980) 1–25.

[3] S.G. Mikhlin, Variational Methods in Mathematical Physics, Pergamon, 1964.

[4] W.C. Rheinboldt, Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations, Wiley, 1986.

[5] A.H. Schatz, An Observation concerning Ritz-Galerkin methods with indefinite bilinear forms, *Math. Comp., 28* (1974) 959–962.

[6] T. Tsuchiya, K. Yoshida, S. Ishioka, Yamamoto's principle and its applications to precise finite element error analysis, *J. Comp. Appl. Math., 152* (2003) 507–532.

[7] `http://daisy.math.sci.ehime-u.ac.jp/users/tsuchiya/math/fem/`

[8] T. Tsuchiya, An application of the Kantorovich theorem to nonlinear finite element analysis, Numer. Math. 84 (1999) 121–141.

[9] T. Yamamoto, A method for finding sharp error bounds for Newton's method under the Kantorovich assumtions, Numer. Math. 49 (1986) 203–220.