数理解析研究所講究録 1364 巻 2004 年 118-137

ある可積分系における固有関数の分布関数の漸近挙動

慶應義塾大学理工学部数理科学科　楯 辰哉 (Tatsuya Tate)
Department of Mathematics, Keio University

1 はじめに

本文章の内容は B. Shiffman と S. Zelditch 両教授との共同研究に基づくものである. この記事に関する詳細は文献 [STZ] とそこに引用されている文献を参照されたい.

ここでの主題は固有関数の分布関数の漸近挙動の問題である.

一般に "固有関数の漸近挙動の問題" と一言でいうと, 実にさまざまな問題が挙げられる. 例えば考察すべき "固有関数" 自身さまざまで, コンパクト多様体上の (ベクトル束の切断に作用する) ラプラシアン (あるいは非コンパクト多様体上の離散スペクトルを持つ一般の楕円型作用素) の固有関数や, 群作用の固有関数, また, それらの相空間 (phase space) 上へのさまざまな型での持ち上げ ("microlocal lift") などである.

更に "漸近挙動" についても実にさまざまな側面があり, 高エネルギー極限, 半古典的極限など, 極限をとる操作自身が多様である. また, 考察すべき固有関数の漸近挙動にまつわる問題としては,

(1) 絶対値 2 乗 (またはその "microlocal lift") の弱収束先.
(2) L^p-ノルム $(2 \leq p \leq \infty)$ の評価 (漸近挙動).
(3) 絶対値 2 乗 (またはその "microlocal lift") の各点での漸近挙動.
(4) 分布関数 $\mathrm{vol}(x\,;\,|\varphi_\lambda(x)|^2 > t)$ (t は正の数) の漸近挙動.

などを挙げる事ができる. 例えば「量子エルゴード問題」と呼ばれる有名な問題があるが, それは, 古典系がエルゴード的である場合の固有関数, あるいはその何らかの意味での相空間上への持ち上げに関して, 上記の問題 (1) を考察する分野である. また問題 (3) については, 直交多項式の理論で古典的に知られている Plancherel-Rotach の Hermite, Laguerre 多項式に対する漸近公式が有名である.

ここで, 後の主定理の証明の概要を説明する際の対比のために, Hermite 関数に対する Plancherel-Rotach 公式を紹介しておく. (もちろんこの公式を以下で用いるわけではない.)

任意の非負の整数 n に対して Hermite 関数 h_n は以下で定義されるような実数直線 $\mathbb{R}$ 上

の Schwarts クラスの関数である:

$$h_n(x) := c_n(-1)^n e^{x^2/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x^2}),$$
$$c_n = \frac{1}{\pi^{1/4}(2^n n!)^{1/2}}, \quad \|h_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1. \tag{1}$$

ここで定数 $c_n > 0$ は関数 h_n が $L^2(\mathbb{R})$-ノルムが 1 となるための正規化定数である. Hermite 関数 h_n は $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底となることが知られているが, これは次で定義される harmonic oscillator と呼ばれる $\mathbb{R}$ 上の 2 階楕円型微分作用素の固有関数系となっている:

$$\widehat{H} := -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + x^2, \quad \widehat{H}h_n = \lambda_n h_n, \quad \lambda_n = 2n+1. \tag{2}$$

このとき Plancherel-Rotach 公式は以下のように述べられる:

定理 1.1 (Plancherel-Rotach) ε, ω, c を正の定数で $\varepsilon < \omega$ とする. このとき次のような漸近挙動が成り立つ.

(a) $x = \sqrt{\lambda_n}\cos\phi$, $\varepsilon \le \phi \le \pi - \varepsilon$ に対して次が成り立つ:

$$|h_n(x)|^2 = \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_n}\sin\phi}\left[\sin^2\left(\tfrac{\lambda_n}{4}(\sin(2\phi) - 2\phi) + \tfrac{3\pi}{4}\right) + O(1/n)\right].$$

(b) $x = \sqrt{\lambda_n}\cosh\phi$, $\varepsilon \le \phi \le \omega$ に対して次が成り立つ:

$$|h_n(x)|^2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}\sinh\phi}e^{-\frac{1}{2}\lambda_n(\sinh 2\phi - 2\phi)}(1 + O(1/n)).$$

(c) $x = \sqrt{\lambda_n}\cosh\phi$, $\varepsilon \le \phi \le \omega$ に対して次が成り立つ:

$$|h_n(x)|^2 = \frac{3^{2/3}2^{1/6}}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}(A(t)^2 + O(n^{-2/3})),$$

ただし $A(t)$ は Airy 関数をあらわす.

上記の公式は Hermite 関数の, ポテンシャル x^2 の壁の影響をあらわしている. つまり上記の公式 (a) はポテンシャルの内部での挙動をあらわしており, 古典的に許された領域であって, そこでは固有関数は振動している. 公式 (b) ではポテンシャル壁の外部での挙動をあらわしており, トンネル効果で指数減衰している. もっとも難しいのは変わり点付近, つまりポテンシャルの壁の部分であり, ここでは Airy 関数で近似されている. Plancherel-Rotach 公式の詳細については [Sz] を参照されたいが, このような各点での詳しい漸近挙動の公式は, 上記のその他の問題をも解決しうる可能性があること, 特に後述する本文章の主定理はその例となっていることを, ここでは強調しておく.

上記の問題は, 偏微分方程式論からの興味だけでなく, 極限が多様体の幾何学を反映しているため, 幾何学的にきわめて興味深い問題である. 例えば問題 (4) は Yau も彼の '問題集' ([Y]) に, 微分形式に作用するラプラシアンの固有関数について取り上げられている. (微分形式のラプラシアンは関数に作用するそれより更に幾何学的な情報を持っていると考えると, その問題設定はむしろ自然である.) また本来量子論において半古典極限をとるという操作によって, 対応する古典系の情報が得られるという直感を信じれば, これらは力学系に関連した問題としても, 興味深いものと思われる.

しかしこれらの問題を完全に理解することはきわめて困難であり, 例えば上記の問題 (4), つまり我々がここで考察する問題について今まで知られていた数学的に厳密な, それも完全に極限を書ききった結果は, 少なくとも我々の認識では Kurlberg-Rudnick ([KR]) の, 2 次元トーラス上の双曲的線型変換の "Hecke 固有関数" に関する結果のみである. また, 数学的な結果は数少ないにも関わらず, 物理的には Mirlin など ([Mi], [MF]) によって, 局在の起こる系の固有関数について問題 (4) は盛んに研究されているようである. そこで局在の起こりうる系の代表例として完全可積分系, それも, むしろ簡潔で理想的な系において, 上記の問題 (4) について数学的に厳密な解答を得ることは, 幾何学的な興味に留まらず, 物理的にも意味のある物である.

我々はこのような認識の下, "toric Kähler 多様体" と呼ばれる相空間とその上の理想的な可積分系に対して, その系の固有関数の漸近挙動を考察するに至った.

この文章では固有関数の分布関数の漸近挙動に主題を置くが, 我々が考察した系においては, 上記の問題の全てに対して解答を得る事ができる. 実際, 後に分布関数の漸近挙動についての主定理を紹介するが, その証明には上記の問題 (2), (3) の解決が重要なカギとなる事に, あらかじめ注意しておく.

2 設定の背景

通常 "固有関数" というと, なんらかの多様体上の楕円型作用素の固有関数を意味する. しかし我々が以下で考察する固有関数は, 楕円型作用素の固有関数ではない. つまり (解析学における) 通常の設定とは異なっている. よって, 以下で考察する設定の必然性が, そもそも問われることになる. この補助的な章では, 以下での考察の舞台となる設定の背景について, 簡単に説明する.

量子力学の一般的な記述方法としては Schrödinger 形式とよばれるものがある. これは広くなじみのある記述方法である. つまりある配位空間 B 上の量子は, ハミルトニアンと呼ばれる B 上の関数に作用する楕円型作用素の固有値をエネルギー順位とし, 固有値に対応する固有関数が, 対応するエネルギーでのその粒子の定常状態をあらわすと考える. 古典粒子の相空

間は B の余接束 T^*B であり, ハミルトニアンの主表象 (古典力学のハミルトニアン) が定義されている空間である.

ここで $B = \mathbb{R}^m$ の場合には古典力学の相空間は $\mathbb{R}^{2m}$ であって, それは m 次元複素ベクトル空間と考える事ができる: $T^*\mathbb{R}^m = \mathbb{C}^m$. このように考えると相空間 $\mathbb{C}^m$ には "複素構造" が入り, そして相空間 $\mathbb{C}^m$ 上の正則関数を考える事が可能になる.

このような観点にたった量子力学の記述方法は Bargmann 形式と呼ばれる事がある. つまり, 古典系の相空間を $\mathbb{C}^m$ に (標準的な) 複素構造を考えた物とする. 対応する量子状態空間は, いわゆる Bargmann 空間

$$H^0(\mathbb{C}^m) = \{f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C} : \text{ 正則}\, ; \, f \in L^2(\mathbb{C}^m; e^{-|z|^2} d\ell(z))\}$$

(但し $d\ell(z)$ は $\mathbb{C}^m$ 上の Lebesgue 測度) であると考える. もちろん量子の状態は記述方法によって異なっては都合が悪く, 実際 $L^2(\mathbb{R}^m)$ と $H^0(\mathbb{C}^m)$ の間には, Bargmann 変換と呼ばれる標準的な unitary 同型が存在する. よって, このような複素構造を持つ多様体, つまり複素多様体を相空間と考えることは Bargmann 形式の類似とみなせる.

ここで一つ強い要請を置く. つまり, 相空間がコンパクト (化されている) という要請である.

そこで我々は相空間 (M, ω) としてコンパクトな Kähler 多様体を考える. (ω は Kähler 形式をあらわす. つまり (M, ω) は複素多様体で ω はその上の symplectic 形式で複素構造 J で $\omega(J\cdot, \cdot)$ が正定値となるようなものである.)

しかしながらコンパクトな複素多様体上の正則関数は定数しかない. そこで我々は, "正則な切断を十分に持つ" 正則複素直線束 $L \to M$ を考える. ここで "正則な切断を十分に持つ" という条件を, L の曲率が与えられた Kähler 形式になっている (この条件を "$c_1(L) = \omega$" と書き表わす) という仮定に置き換える. そして L 上の Hermite 計量を用いて $L \to M$ の正則切断全体 $H^0(M, L^{\otimes N})$ にヒルベルト空間としての L^2-内積を導入し, $H^0(M, L^{\otimes N})$ を Bargmann 空間の類似物, つまり量子状態空間と考える. M のコンパクト性によって $H^0(M, L^{\otimes N})$ は実際に有限次元となっている.

そこで, 以下ではこのような設定において, コンパクトな相空間 (Kähler 多様体) (M, ω) に, ある "理想的な" 可積分系を考える. このとき我々は自然と "toric 多様体" という概念に到達することを, 次章で説明する.

3　Toric 多様体と可積分系

これ以後は (M, ω) で複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体を表すものとする. しかし以下の内容に対しては (M, ω) はコンパクト symplectic という仮定のみでよい.

3.1 Toric Kähler 多様体

まず, toric Kähler 多様体の定義を与えておく. 以下で与える定義では ((M,ω) を滑らかな多様体と仮定している) 特異点のある toric (代数) 多様体は考えていない事に注意しておく.

定義 3.1 M が (特異点のない) 射影的代数多様体であって, M の上に $(\mathbb{C}^*)^m$ (複素トーラス) が M に作用し, この作用が (*Zariski*) 稠密な軌道を持ち, 更に, M 全体への作用が複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^m$ の自分自身への作用の拡張になっているとき, M を, *toric Kähler* 多様体と呼ぶ.

これは代数幾何学的な定義であるが, 特異点の無い場合には toric Kähler 多様体は "Kähler 多様体 (symplectic 多様体) とその上の特殊な可積分系のペア" と考えることが出来ることを次に説明する.

3.2 可積分系

一般に symplectic 多様体 (M,ω) の上の可積分系とは, $\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$ としたとき, m 個の M 上の滑らかな関数 $\{f_1,\ldots,f_m\}$ で, 以下を満たすものによって記述される系である:

(1) $\{f_i,f_j\}=0$ が任意の $i,j=1,\ldots m$ に対して成り立つ. 但し $\{\cdot,\cdot\}$ は symplectic 形式 ω から自然に定まる Poisson bracket を表す.
(2) $df_1,\ldots,df_m$ は M のある稠密開集合内の各点で一次独立である.

我々は, コンパクト Kähler 多様体 (M,ω) 上にこのような可積分系 $\{f_1,\ldots,f_m\}$ を考える. ここで, 上記の条件 (2) において, $df_1,\ldots,df_m$ は M 全体で一次独立と仮定する. このとき, 我々は, 以下で定まるような $\mathbb{R}^m$ の M への (ω を保つ) 作用を得る:

$$t\cdot z=\varphi^m_{t_m}\circ\cdots\circ\varphi^1_{t_1}(z),\quad t=(t_1,\ldots,t_m)\in\mathbb{R}^m,\quad z\in M.$$

但しここで, $t\in\mathbb{R}$ に対して φ^j_t $(j=1,\ldots,m)$ は関数 f_j の Hamilton ベクトル場の生成する流れである. この $\mathbb{R}^m$ の作用, つまり可積分系の作用は, 単に symplectic 構造を保つだけでなく, 次のように定義される "moment map" と呼ばれる, 幾何学では極めて重要な写像を持っている:

$$\mu: M\to\mathbb{R}^m,\quad \mu(z)=(f_1(z),\ldots,f_m(z)),\quad z\in M.$$

このような状況において toric 多様体を得るには, 次の要請を課さなければならない.

要請: 可積分系 $\{f_1,\ldots,f_m\}$ で定まる M 上の Hamilton 的 $\mathbb{R}^m$ 作用は, M 上の実 m 次元のトーラス T^m の作用を引き起こす.

このとき実は次が知られている.

定理 3.2 (Delzant [De], Guillemin [Gu]) 上記の要請の下に, トーラス $\mathbf{T}^m$ がコンパクト *Kähler* 多様体 (M,ω) に効果的に作用していると仮定する. このとき (M,ω) は *toric Kähler* 多様体となる.

上の定理は, 代数幾何学的な概念である toric 多様体が, コンパクトで特異点のない場合には特に Kähler 多様体とその上の可積分系の pair として捉えることが出来ることを主張している.

上記の要請の下に Kähler 多様体 (M,ω) は toric 多様体としての構造を持つことが分かったのだが, 上記の要請は, 極めて強い条件である事に注意しておく. 実際, 上記の要請は積分 $\{f_1,\ldots,f_m\}$ たちの生成する Hamilton 流 $\varphi_t^1,\ldots,\varphi_t^m$ が全て周期的, または $\{f_1,\ldots,f_m\}$ の生成する Lie 環から, 非退化条件を満たす新たな積分で, それらの Hamilton 流が周期的となる, という条件である.

このように力学的に toric 多様体を捉えることで概念的にはわかりやすくなった. しかし, 実際に解析を行う際には, このような抽象的な概念では扱いにくい. しかも我々の目標は, toric 多様体という可積分系に対応した固有関数, つまり, 複素直線束上の正則切断で, 何らかの意味で "固有関数" となっている物を解析することが目標である. これらを解析するには, そもそもこれらがどのような構造を持っているのか, あるいはこれらがどのようにして構成されるものなのか, ということを考える必要がある. そのためにまず moment map について簡単に説明する.

3.3 Moment map と polytope

実際にどのようにトーリック多様体が構成されるかを考える前に, toric 多様体は何で決まっているか, そして, 複素直線束としてどのような物を我々は考えるべきなのかを考える. 上述のように, toric Kähler 多様体 (M,ω) は Hamilton 的 $\mathbf{T}^m$-作用を許容する ($\dim_{\mathbb{C}} M = m$ に注意).

一般に Hamilton 的トーラス作用 (トーラスの次元は任意で良い) を許容する symplectic 多様体 (M,ω) に対して, その moment map $\mu : M \to \mathfrak{t}_r \cong \mathbb{R}^r$ (r はトーラスの次元) の像は polytope (有限集合の凸包) となることが知られている (Atiyah, Guillemin-Sternberg の定理). しかし, 我々の状況, つまり symplectic 多様体 (M,ω) に M の (実) 次元の半分のトーラスが Hamilton 的に作用している場合, モーメント写像の像である polytope は, いわゆる Delzant 条件を満たすことが知られている.

ここで参考のため Delzant 条件を書き下しておく.

Delzant 条件： $P \subset \mathbb{R}^m$ を polytope (多面体, 有限集合の凸包) とする. P が *Delzant polytope* であるとは, P の任意の頂点 p に対して, 頂点 p から出る辺の個数がちょうど m であって, $\mathbb{Z}^m$ の $\mathbb{Z}$-基底 $\{v_1, \ldots, v_m\}$ が存在して, 頂点 p から出ている辺は $p + tv_j$, $t \geq 0$ の型をしているものをいう.

例えば, 任意の次元 m に対して, $\mathbb{R}^m$ 内の標準基底 (と原点) の凸包である標準単体は Delzant polytope である. 次の補題は toric 多様体の一般論からも知られているが, 我々は以下で具体的な構成法の概要を見ることにする.

補題 3.3 $P \subset \mathbb{R}^m$ を Delzant polytope とする. このとき *toric Kähler* 多様体 (M_P, ω_P) とその上の Hermite 複素直線束 $L_P \to M_P$ で次を満たすものが存在する.

(1) モーメント写像 $\mu_P : M_P \to \mathbb{R}^m$ の像は与えられた Delzant polytope P と一致する.
(2) 複素直線束 L_P 上の *Hermite* 計量 h の曲率は, *Kähler* 形式 ω_P と一致する.
(3) 任意の自然数 N に対して複素直線束 $L_P \to M_P$ の正則切断全体の空間を $H^0(M_P, L_P^{\otimes N})$ と表す. ここにはトーラス $\mathbf{T}^m$ が引き戻しで作用しているが, このトーラス作用の固有空間分解は次のように与えられる.

$$H^0(M_P, L_P^{\otimes}) = \bigoplus_{\gamma \in NP \cap \mathbf{Z}^m} \mathbb{C} \cdot \chi_\gamma^P. \tag{3}$$

但しここで χ_γ^P はトーラス作用の (同時) 固有値 $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ の (同時) 固有ベクトルを表す.

次節ではこの補題にあらわれる toric Kähler 多様体とその上の複素直線束の構成法 (の一つ) を概説するが, その前に補題の主張, 特に式 (3) について説明しておく.

まず, トーラス $\mathbf{T}^m$ は複素多様体 M に正則に作用することに注意する. 従って正則切断の引き戻しはまた正則となっており, $\mathbf{T}^m$ は $H^0(M_P, L_P^{\otimes N})$ に作用する. トーラスは可換群であるから, その元全てを同時対角化することが出来る. このとき固有値としてあらわれる数の組は整数の組, つまり格子 $\mathbb{Z}^m$ の元となる. これを上式 (3) では "γ" と表している. 固有ベクトル χ_γ^P は文字通り $\mathbf{T}^m$-作用の固有ベクトルであるが, この場合は極めて単純なものである. つまり, (M_P, ω_P) が toric 多様体であることから, M_P には複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^m$ が作用しており, この $(\mathbb{C}^*)^m$-作用は稠密な開軌道を持つ. それを同様に $(\mathbb{C}^*)^m$ と表すことにすると, $(\mathbb{C}^*)^m$ 上で χ_γ^P は γ を重みとする単項式, つまり次で与えられる:

$$\chi_\gamma^P(z) = z^\gamma = z_1^{\gamma_1} \cdots z_m^{\gamma_m}, \quad z = (z_1, \ldots, z_m) \in (\mathbb{C}^*)^m \subset M_P. \tag{4}$$

式 (3) の重要なところは全ての同時固有値 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{Z}^m$ が重複度 1 であること, そして, その固有値 γ は必ず polytope NP 内の格子の点であり, NP 内の格子点は全て固有値としてあらわれるということである.

3.4 構成法

ここでは, 上記の補題 (3.3) にあらわれる toric Kähler 多様体とその上の複素直線束の構成法を簡単に説明しておく. なお以下の構成法は [GKZ] にも紹介されている.

まず $P \subset \mathbb{R}^m$ を polytope とする. もちろん P は有限個の格子点 $P \cap \mathbb{Z}^m = \{\alpha(1), \dots, \alpha(d+1)\}$ の凸包として表されている. $c = (c_{\alpha(1)}, \dots, c_{\alpha(d+1)}) \in (\mathbb{C}^*)^{d+1}$ をゼロでない複素数の $d+1$ 個の組として一つ固定する. このとき次で写像 Φ_P を定義する:

$$\Phi_P : (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{C}P^d, \quad \Phi_P(z) := [c_{\alpha(1)} z^{\alpha(1)} : \cdots : c_{\alpha(d+1)} z^{\alpha(d+1)}]. \tag{5}$$

例えば一般の polytope P に対して (5) で定まる写像 $\Phi_P : (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{C}P^d$ が埋め込みになるには,

$$\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(P \cap \mathbb{Z}^m), \quad \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha - \beta;\, \alpha, \beta \in P \cap \mathbb{Z}^m\}$$

が共に $\mathbb{Z}^m$ と一致すれば十分であり, P が Delzant 条件を満たしていれば上記の式が満たされ, よって $\Phi_P : (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{C}P^d$ は埋め込みとなる.

埋め込み $\Phi_P : (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{C}P^d$ を monomial embedding と呼ぶことにする.

Monomial embedding $\Phi_P : (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{C}P^d$ の像 $\Phi_P((\mathbb{C}^*)^m)$ の Zariski 閉包を M_P とおく. そして包含写像も $\Phi_P : M_P \to \mathbb{C}P^d$ と表すことにする. この集合 M_P は定義により代数多様体である (一般にはいわゆる normality を持たないし特異点を持っている). ここで多面体 P が Delzant 条件を満たすと仮定すると M_P が滑らかな多様体であることを示すことが出来る. つまり, この時点で M_P は, $\mathbb{C}P^d$ 上の Fubini-Study Kähler 形式 ω_{FS} の包含写像による引き戻し $\omega_P := \Phi_P^* \omega_{\mathrm{FS}}$ によって Kähler 多様体となっている. また元々の monomial embedding $\Phi_P : (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{C}P^d$ は複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^m$ のそれ自身への作用と, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^d$ への次で定まる作用：

$$z.[\zeta_1 : \cdots : \zeta_{d+1}] := [z^{\alpha(1)}\zeta_1 : \cdots : z^{\alpha(d+1)}\zeta_{d+1}], \quad z \in (\mathbb{C}^*)^m, \quad [\zeta_1 : \cdots : \zeta_{d+1}] \in \mathbb{C}P^d \tag{6}$$

について同変 (equivariant) である. この作用は Zariski 位相で連続であることが分かり, 我々は $(\mathbb{C}^*)^m$ の M_P への作用をへる. また定義により monomial embedding Φ_P の像と複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^m$ との同一視により, このように定まった $(\mathbb{C}^*)^m$ の M_P への作用は稠密な開軌道 $\Phi_P((\mathbb{C}^*)^m) \cong (\mathbb{C}^*)^m$ を持つことが分かる.

さて次に moment map を調べることにする. 実トーラス $\mathbf{T}^m$ は式 (6) で定まる複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^m$ の M_P への作用から定義されている. この作用を次のように書き直す. まず $\mathbf{T}^m$ の $\mathbb{C}P^d$ への次で定まる作用を考える:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi}.[\zeta_1:\cdots:\zeta_{d+1}] &= [e^{i\langle\varphi,\alpha(1)\rangle}\zeta_1:\cdots:e^{i\langle\varphi,\alpha(d+1)\rangle}\zeta_{d+1}], \\ \varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)&\in\mathbb{R}^m,\quad [\zeta_1:\cdots:\zeta_{d+1}]\in\mathbb{C}P^d. \end{aligned} \tag{7}$$

$\mathbf{T}^m$ の M_P への作用は, 上記の作用の制限になっていることに注意する. この $\mathbf{T}^m$ の $\mathbb{C}P^d$ への作用は埋め込み

$$\iota:\mathbf{T}^m\to\mathbf{T}^{d+1},\quad \iota(e^{i\varphi})=(e^{i\langle\varphi,\alpha(1)\rangle},\ldots,e^{i\langle\varphi,\alpha(d+1)\rangle})$$

と, 標準的な $\mathbf{T}^{d+1}$ の $\mathbb{C}P^d$ への作用の合成によって定まっている. 標準的な $\mathbf{T}^{d+1}$ の $\mathbb{C}P^d$ への作用は Hamilton 的であって, その moment map は次で与えられる:

$$\mu_d:\mathbb{C}P^d\to\mathfrak{t}^*_{d+1}\cong\mathbb{R}^{d+1},\quad \mu_d([\zeta_1:\cdots:\zeta_{d+1}])=\frac{1}{\sum_{j=1}^{d+1}|\zeta_j|^2}(|\zeta_1|^2,\ldots,|\zeta_{d+1}|^2). \tag{8}$$

従って, 作用 $\mathbf{T}^m \curvearrowright M_P$ の moment map $\mu_P: M_P\to\mathfrak{t}_m\cong\mathbb{R}^m$ は以下のような写像の合成で与えられる:

$$\mu_P: M_P\xrightarrow{\Phi_P}\mathbb{C}P^d\xrightarrow{\mu_d}\mathfrak{t}^*_{d+1}\xrightarrow{d\iota^*}\mathfrak{t}_m, \tag{9}$$

但しここで, 写像 $d\iota^*:\mathfrak{t}^*_{d+1}\to\mathfrak{t}^*_m$ は $\iota:\mathbf{T}^m\to\mathbf{T}^{d+1}$ によって定まる Lie 環の間の写像 $d\iota:\mathfrak{t}_m\to\mathfrak{t}_{d+1}$ の双対写像である. 式 (9) を用いて moment map $\mu_P: M_P\to\mathfrak{t}^*_m$ の稠密開軌道 $(\mathbb{C}^*)^m$ 上への制限の具体的な形を計算すると, 以下のようになる:

$$\mu_P(z)=\frac{1}{\sum_{\beta\in P\cap\mathbf{Z}^m}|c_\beta z^\beta|^2}\sum_{\beta\in P\cap\mathbf{Z}^m}|c_\beta z^\beta|^2\beta,\quad z\in(\mathbb{C}^*)^m. \tag{10}$$

式 (10) より特に稠密開軌道 $(\mathbb{C}^*)^m$ の moment map による像は与えられた Delzant polytope P の内部 P^o と一致し, 従って M_P の像は (M_P が $(\mathbb{C}^*)^m$ の閉包であることより) polytope P と一致する.

更に, $\mathbb{C}P^d$ 上の Fubini-Study Kähler 形式 ω_{FS} は, いわゆる hyperplane bundle $\mathcal{O}(1)$ の曲率として実現される. そこで $L_P:=\Phi_P^*\mathcal{O}(1)$ と定義すれば $L_P\to M_P$ は正則複素直線束であって, $\mathcal{O}(1)$ 上の Fubini-Study Hermite 計量 h_{FS} の L_P への制限 h_P の曲率は ω_P と一致する: $c_1(L_P)=\omega_P$.

式 (3) については [Fu] を参照されたい. 以下に Delzant polytope P が最も単純な場合, つまり $m=1$ で P が閉区間の場合の例で, この章で説明した構成法, 並びに式 (3) を見ていくことにする.

例： $m=1$ として $P=[0,d]\subset\mathbb{R}^1$ とする．但し d は正の整数である．このとき $P\cap\mathbb{Z}=\{0,1,\ldots,d\}$ である．P は明らかに Delzant 条件を満たす．固定する複素数 $c_\alpha\in\mathbb{C}^*$ $(\alpha\in P\cap\mathbb{Z})$ は任意で良いが，ここでは簡単のため次のように取る：

$$c_\alpha := \binom{d}{\alpha}^{1/2}, \quad \alpha\in P\cap\mathbb{Z}=\{0,1,\ldots,d\}.$$

このとき monomial embedding $\Phi_P:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}P^d$ は次のようになる：

$$\Phi(z)=[c_0:c_1z:\cdots:c_{d-1}z^{d-1}:c_dz^d], \quad z\in\mathbb{C}^*.$$

この写像は実は次の Veronese 写像の $\{[z_0:z_1]\in\mathbb{C}P^1;\, z_0\neq 0\}$ 上での局所表現である：

$$\Psi:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}P^d, \quad \Psi([z_0:z_1]):=[c_0z_0^d:c_1z_0^{d-1}z_1:\cdots:c_{d-1}z_0z_1^{d-1}:c_dz_1^d].$$

Veronese 写像 $\Psi:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}P^d$ は embedding となっており，monomial embedding Φ_P の像の閉包は Veronese 写像の像 $\Psi(\mathbb{C}P^1)\cong\mathbb{C}P^1$ と一致する．従って $M_P=\mathbb{C}P^1$ である．この場合にトーラス $\mathbf{T}^1=S^1$ の $M_P=\mathbb{C}P^1$ を書き下すと，以下のようになる：

$$e^{i\theta}[z_0:z_1]=[z_0:e^{i\theta}z_1], \quad [z_0:z_1]\in M_P=\mathbb{C}P^1, \quad e^{i\theta}\in S^1.$$

Moment map $\mu_P:\mathbb{C}P^1\to\mathfrak{t}_1^*\cong\mathbb{R}$ は式 (10) より

$$\mu_P([z_0:z_1])=\frac{d|z_1|^2}{|z_0|^2+|z_1|^2}, \quad [z_0:z_1]\in\mathbb{C}P^1$$

となることが分かり，従って特に $\mu_P(\mathbb{C}P^1)=[0,d]=P$ となる．$\mathcal{O}_d(1)\to\mathbb{C}P^d$ を hyperplane bundle とする．つまり $\mathcal{O}_d(1)$ は $\mathbb{C}P^d$ 上の "tautological 直線束" J_d の双対束である．：$\mathcal{O}_d(1)=J_d^*$. tautological 直線束 J_d は，点 $[\zeta]\in\mathbb{C}P^d$ $(\zeta\in\mathbb{C}^{d+1}\setminus\{0\})$ 上のファイバーが ζ で定まる $\mathbb{C}^{d+1}$ 内の複素一次元の部分空間である．このことから特に，$\mathcal{O}_d(p)=\mathcal{O}_d(1)^{\otimes p}$ と書き表わすと，正則切断全体の集合 $H^0(\mathbb{C}P^d,\mathcal{O}_d(p))$ は自然に $\zeta\in\mathbb{C}^{d+1}$ についての p 次斉次多項式全体の空間と同一視される．

そこで $M_P\cong\mathbb{C}P^1$ 上の正則複素直線束 $L_P\to M_P$ と M_P 上の Kähler 形式 ω_P を以下で定義する：

$$L_P:=\Phi_P^*\mathcal{O}_d(1), \quad \omega_P=\Phi_P^*\omega_{\mathrm{FS}d},$$

ただし，$\omega_{\mathrm{FS}d}$ は $\mathbb{C}P^d$ 上の Fubini-Study 形式であって，これは直線束 $\mathcal{O}_d(1)\to\mathbb{C}P^d$ の曲率である．このとき簡単な計算によって $\omega_P=d\omega_{\mathrm{FS}1}$ ($\omega_{\mathrm{FS}1}$ は $\mathbb{C}P^1$ 上の Fubini-Study 形式) となることが分かる．従って $L_P\cong\mathcal{O}_1(d)$ となって次が分かる．

$$H^0(M_P,L_P^{\otimes N})=H^0(\mathbb{C}P^1,\mathcal{O}_1(Nd))=\bigoplus_{\alpha=0}^{Nd}\mathbb{C}\cdot\widehat{\chi}_\alpha,$$

$$\widehat{\chi}_\alpha([z_0:z_1])=z_0^{Nd-\alpha}z_1^\alpha, \quad \alpha=[0,Nd]\cap\mathbb{Z}=\{0,1,\ldots,Nd\}.$$

従って開軌道 $\mathbb{C}^* = \{[1:z] \in \mathbb{C}P^1;\, z \in \mathbb{C}^*\}$ では weight 関数 $\widehat{\chi}_\alpha$ は $\chi_\alpha(z) = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C}^*$ となっている. これは式 (3) に他ならない.

3.5 問題設定

前節の補題 3.3 を用いて問題を具体的に設定する. 任意の自然数 N に対して複素直線束 $L_P^{\otimes N} \to M_P$ の正則切断 $H^0(M_P, L_P^{\otimes N})$ には Hermite 計量 $h_N := (\Phi_P^* h_{\mathrm{FS}})^N$ から定まる自然な L^2-内積:

$$\langle s, t \rangle_N := \int_{M_P} h_N(s(z), t(z))\, d\,\mathrm{vol}_{M_P}(z)$$

が定まり, 有限次元 Hilbert 空間となっている. ここで h_{FS} は $\mathcal{O}_d(1) \to \mathbb{C}P^d$ の Fubini-Study 計量であり $\mathrm{vol}_{M_P} = \frac{1}{m!}\omega_P^{\wedge m}$ は Kähler 形式 ω_P から定まる自然な体積要素である. この内積は $\mathbf{T}^m$-作用が ω_P を保つことから $H^0(M_P, L_P^{\otimes N})$ への $\mathbf{T}^m$-作用で不変であり, 従って基底 $\{\chi_\gamma^P;\, \gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m\}$ は直交している. しかしこれらの L^2-ノルムは正規化されていない. そこで記号をあらためて

$$\varphi_\gamma^P := \frac{1}{\|\chi_\gamma^P\|}\chi_\gamma^P, \quad \gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m$$

と定義すると, $\{\varphi_\gamma^P\}$ は $H^0(M_P, L_P^{\otimes N})$ の正規直交基底となる. 従って我々の問題は φ_γ^P の分布関数

$$D_\gamma(t) := \mathrm{vol}_{M_P}(z \in M_P;\, |\varphi_\gamma^P(z)|_{h_N}^2 > t), \quad t > 0, \quad \gamma \in NP \cap \mathbb{Z}^m \tag{11}$$

の “$N \to \infty$” としたときの漸近挙動である. つまり weight の “適切な” 列 γ_N をとり, $D_{\gamma_N}(t)$ の $N \to \infty$ としたときの漸近挙動である. Toric 多様体 M_P 上の $\mathbf{T}^m$-作用は M_P 上の可積分系であるが, その量子論的側面を記述しているのが $\mathbf{T}^m$ の $H^0(M_P, L_P^{\otimes N})$ への作用である. 従って, 例えば “半古典的極限” は, 一つの ray $\gamma_N := N\alpha$, $\alpha \in P \cap \mathbb{Z}^m$ を取ったときの $N \to \infty$ という極限と考えることができる.

このような極限の取り方を多少一般化して, 次のような定義を与える.

定義 3.4 $x \in P$ を必ずしも格子点とは限らない, polytope P の点とする. このとき, 格子点の列 $\gamma_N \in NP \cap \mathbb{Z}^m$ が点 x に対する approximate multiple (AM と省略する) とは,

$$\gamma_N = Nx + O(1) \quad (N \to \infty) \tag{12}$$

が成り立つときをいう.

ここではどのような点 $x\in P$ に対して AM $\gamma_N\in NP\cap\mathbb{Z}^m$ が存在するか，ということは問わないことにするが，例えば $x\in P\cap\mathbb{Z}^m$ の場合には $\gamma_N=Nx$ 自身が x に対する AM を与えている．点 $x\in P$ とそれに対する AM $\gamma_N\in NP\cap\mathbb{Z}^m$ が与えられているとして，分布関数

$$D_{\gamma_N}(t) :== \mathrm{vol}_{M_P}(z\in M_P\,;\,|\varphi^P_{\gamma_N}(z)|^2_{h_N}>t) \tag{13}$$

の $N\to\infty$ としたときの漸近挙動を調べることが我々の次章以後の具体的な問題である．

4 主結果

この章では主結果を述べ，定理の主張について解説する．我々の問題は式 (13) で定義される分布関数 $D_{\gamma_N}(t)$ の $N\to\infty$ での漸近挙動であるが，t を固定するか，あるいは何らかの列 t_N を取ってくるかによって違った漸近挙動を示すことは，想像にかたくない．そこでまず $t>0$ を固定したときの $D_{\gamma_N}(t)$ そのものの漸近挙動に関する結果を述べる．

定理 4.1 Polytope P の内点 $x\in P^o$ をとり，$\gamma_N\in NP\cap\mathbb{Z}^m$ を点 x の approximate multiple とする．このとき，固定した任意の $t>0$ に対して次が成り立つ:

$$D_{\gamma_N}(t)\sim\frac{(\pi m)^{m/2}}{c(P,x)\Gamma(m/2+1)}\left(\frac{\log N}{N}\right)^{m/2}, \tag{14}$$

ただしここで Γ はガンマ関数であり，正の定数 $c(P,x)$ は以下で与えられる:

$$c(P,x)=\lim_{N\to\infty}\left(\tfrac{N}{2\pi}\right)^{-m/2}\|\varphi^P_{\gamma_N}\|^2_\infty. \tag{15}$$

定理 4.1 の式 (15) について，極限が存在するということも定理の主張に含まれていることに注意されたい．

定理 4.1 の式 (14) は，分布関数 $D_{\gamma_N}(t)$ そのものの漸近挙動をあらわしており，特に $((\log N)/N)^{m/2}$ のオーダーで減衰していることが分かる．ここで注意してほしいことは，式 (14) の右辺の N に依存した項の係数が $t>0$ に依存していないという事実である．分布関数 $D_{\gamma_N}(t)$ の変数 $t>0$ についての依存性があらわれてくるような漸近挙動を得るためには，t に N に依存した何らかのスケーリングを施さなくてはならないことを定理 4.1 は示唆する．つまり $t>0$ というパラメータのかわりに $t_N>0$ という N に依存した列を取るのである．ここでスケーリングの方法も，大きく二つに別れる．一つは t_N が増大するように取るスケーリング，そしてもう一つは t_N が減少するように取るスケーリングである．

次の定理は前者，つまりスケーリング t_N を増大するように取ったときの漸近挙動をあらわしている．

定理 4.2 $x \in P^o$ をとり $\gamma_N \in NP \cap \mathbb{Z}^m$ が x の approximate multiple であるとする. 分布関数 $D_{\gamma_N}(t)$ $(t>0)$ に対して, リスケールした分布関数 $F_{\gamma_N}(t)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} F_{\gamma_N}(t) &:= \left(\tfrac{N}{2\pi}\right)^{m/2} \mathrm{vol}_{M_P}(z \in M_P\,;\, |\varphi^P_{\gamma_N}(z)|^2_{h_N} > \left(\tfrac{N}{2\pi}\right)^{m/2} t) \\ &= \left(\tfrac{N}{2\pi}\right)^{m/2} D_{\gamma_N}(\left(\tfrac{N}{2\pi}\right)^{m/2} t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

このとき, 固定された任意の $t>0$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} F_{\gamma_N}(t) = \frac{1}{c(P,x)\Gamma(m/2+1)} \left(\log \frac{c(P,x)}{t}\right)^{m/2}_{+}, \tag{17}$$

但しここで, $(\log s)_+ = \log s$ $(s \geq 1)$, $=0$ $(s<1)$ であり, 正の定数 $c(P,x)$ は式 (15) で与えられる定数である.

定理 4.2 の式 (17) の右辺はリスケールした分布関数 $F_{\gamma_N}(t)$ がパラメータ $t>0$ について対数のベキのようにふるまうことを主張しているが, この "対数ベキ法則" は Mirlin たち ([Mi], [MF]) が物理的な考察の下に主張している結果と, 少なくとも見かけ上は一致している.

定理 4.2 で重要なことは, リスケーリング $t \mapsto (\frac{N}{2\pi})^{m/2} t$ を施したとき, 対応する分布関数 $F_{\gamma_N}(t)$ は極限 $N \to \infty$ でほとんど元の多様体 M_P の情報を含んでいない, いわばユニバーサルな結果となっていることである. 実際, 式 (17) の右辺には次元 m と polytope P と点 $x \in P^o$ に依存した定数 $c(P,x)$ のみが toric 多様体 M_P の情報を含んでいる. なお, 定数 $c(P,x)$ のもう少し具体的な形は, 次章で紹介する.

最後に, リスケーリング t_N が N について減少する状況を考える. この場合, 定理 4.1, 4.2 のような "ユニバーサル" な漸近挙動とは対照的に toric 多様体 M_P の幾何学的な量が漸近挙動に寄与する.

定理 4.3 固定された任意の $t>0$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} D_{\gamma_N}(e^{-Nt}) &= \mathrm{vol}_{M_P}(z \in (\mathbb{C}^*)^*\,;\, b^P_x(z) < \log t) \\ &= \int_{\{\rho\in\mathbb{R}^m\,;\, b^P_x(\rho)<t\}} \det A(\rho)\, d\rho. \end{aligned} \tag{18}$$

ここで任意の $\rho \in \mathbb{R}^m$ に対して $A(\rho)$ は $m \times m$ 実正定値対称行列に値をとる滑らかな関数であり, b^P_x は $(\mathbb{C}^*)^m$ 上の滑らかな実数値関数であって, $\mathbf{T}^m$ 作用で不変な関数であり, 式 (18) の右辺の積分では b^P_x を $\mathbb{R}^m$ 上の滑らかな関数とみなしている. (関数 b^P_x や行列 $A(\rho)$ の具体的な定義は次章参照.)

次章でも解説するが, 定理 4.3 にあらわれる関数 b^P_x や行列 $A(\rho)$ は, toric 多様体 M_P の moment map から定まっている. 滑らかな toric Kähler 多様体は moment map によって定

まっていると言って良く，したがって，$t \mapsto e^{-Nt}$ とリスケーリングした場合，対応する分布関数 $D_{\gamma_N}(e^{-Nt})$ はもはやユニバーサルな漸近挙動は見せず，むしろ toric 多様体 M_P の幾何学的な情報を豊富に含んだ極限を持つことが定理 4.3 によって分かる．

5 定理 4.2 の証明の概要と解説

この章では主結果，特に定理 4.2 の証明の概要を説明し，何故定理 4.2 にあらわれる "対数ベキ法則" が現れるのかを説明する．ここで，第一章で挙げた固有関数に関する問題のうち，特に各点での漸近挙動が重要な役割を果たすことを見る．

5.1 Moment map と関数 b_x^P

第 3.4 章であらわれた monomial embedding $\Phi_P : (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{C}P^d$ $(d = \#P \cap \mathbb{Z}^m)$ の係数 $c = (c_{\alpha(1)}, \dots, c_{\alpha(d+1)}) \in (\mathbb{C}^*)^{d+1}$ を $(c_\beta)_{\beta \in P\cap\mathbb{Z}^m}$ とあらわすことにする．このとき moment map $\mu_P : M_P \to \mathbb{R}^m$ の開軌道 $(\mathbb{C}^*)^m$ への制限は以下で与えられていた:

$$\mu_P(x) = \frac{1}{\sum_{\beta\in P\cap\mathbb{Z}^m}|c_\beta z^\beta|^2}\sum_{\alpha\in P\cap\mathbb{Z}^m}|c_\alpha z^\alpha|^2\alpha, \quad z \in (\mathbb{C}^*)^m \subset M_P. \tag{19}$$

Moment map $\mu_P : M_P \to \mathbb{R}^m$ は $\mathbf{T}^m$-作用で不変な写像であるから $\bar{\mu}_P : M_P/\mathbf{T}^m \to \mathbb{R}^m$ を引き起こす．また $(\mathbb{C}^*)^m \subset M_P$ であって，$\mathbb{R}^m \cong (\mathbb{C}^*)^m/\mathbf{T}^m$ でであることに注意すると，moment map は全射 $\bar{\mu}_P : \mathbb{R}^m \to P^o$ を引き起こす．この写像は具体的には次で与えられる:

$$\bar{\mu}_P(\rho) = \frac{1}{\sum_{\beta\in P\cap\mathbb{Z}^m}|c_\beta|^2 e^{\langle\beta,\rho\rangle}}\sum_{\beta\in P\cap\mathbb{Z}^m}|c_\beta|^2 e^{\langle\beta,\rho\rangle}\beta, \quad \rho \in \mathbb{R}^m. \tag{20}$$

この写像 $\bar{\mu}_P$ について実は次が知られている．

補題 5.1 写像 $\bar{\mu}_P : \mathbb{R}^m \to P^o$ は微分同型である．その微分 $A(\rho) := \partial_\rho\bar{\mu}_P(\rho)$ は $m \times m$ 正定値実対称行列であり，次によって与えられる:

$$A(\rho) = \frac{1}{\sum_{\beta\in P\cap\mathbb{Z}^m}|c_\beta|^2 e^{\langle\beta,\rho\rangle}}\sum_{\beta\in P\cap\mathbb{Z}^m}|c_\beta|^2 e^{\langle\beta,\rho\rangle}\beta\otimes\beta - \bar{\mu}_P(\rho)\otimes\bar{\mu}_P(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}^m. \tag{21}$$

上の補題の証明は [Fu] を参照されたい．また $\beta \in P \cap \mathbb{Z}^m$ に対して $\beta\otimes\beta = (\beta_i\beta_j)_{ij}$ である．補題 5.1 により

$$\rho_x^P := \bar{\mu}_P^{-1}(x) \in \mathbb{R}^m, \quad x \in P^o, \quad A(P,x) := A(\rho_x^P), \quad x \in P^o. \tag{22}$$

とおき, さらに

$$\tau_x^P(z) := \rho - \rho_x^P \in \mathbb{R}^m, \quad z = e^{\rho/2+i\theta} \in (\mathbb{C}^*)^m \tag{23}$$

とおく. このとき前章の定理にあらわれる関数 b_x^P ($x \in P^o$) は次で与えられる:

$$\begin{aligned} b_x^P(\rho) = b_x^P(z) &= \log\left(\frac{\sum_{\beta\in P\cap\mathbf{Z}^m}|c_\beta z^\beta|^2}{\sum_{\beta\in P\cap\mathbf{Z}^m} e^{-\langle\tau_x^P(z),\beta\rangle}|c_\beta z^\beta|^2}\right) - \langle\,\tau_x^P(z), x\,\rangle \\ &= \log\left(\frac{\sum_{\beta\in P\cap\mathbf{Z}\ m}|c_\beta|^2 e^{\langle\beta,\rho\rangle}}{\sum_{\beta\in P\cap\mathbf{Z}^m} e^{\langle\rho_x^P,\beta\rangle}|c_\beta|^2}\right) - \langle\,\rho-\rho_x^P, x\,\rangle, \\ z = e^{\rho/2+i\theta} &\in (\mathbb{C}^*)^m, \quad \rho,\theta\in\mathbb{R}^m, \quad x\in P^o. \end{aligned} \tag{24}$$

5.2 各点での漸近挙動とそれから導かれる性質

次の定理は Hermite 関数に対する Plancherel-Rotach 公式のこの場合における類似である (実際 Plancherel-Rotach 公式の状況よりはるかに単純であるが).

定理 5.2 $x \in P^o$ として, $\gamma_N \in NP \cap \mathbf{Z}^m$ を x の approximate multiple とする. このとき

$$|\varphi_{\gamma_N}^P(z)|_{h_N}^2 = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{m/2} \frac{e^{-N(b_x(z)-\langle\tau_x^P(z),x_N\rangle)}}{\sqrt{\det A(P,x)}}(1+O(N^{-1})) \tag{25}$$

が $z \in (\mathbb{C}^*)^m$ に対して一様に成り立つ. 但しここで $x_N = \gamma_N/N - x$ とおいた.

注意: 上の定理において, 特に $x \in P^o \cap \mathbf{Z}^m$ であって, 格子点列 γ_N が $\gamma_N = Nx$ で与えられている場合, 式 (25) の指数にあらわれる関数 $\langle\,\tau_x^P(z), x_N\,\rangle$ はゼロである.

定理 5.2 の証明の詳細は [STZ] を参照されたい. ここでは定理 5.2 が何故 Hermite 関数に対する Plancherel-Rotach 公式の類似に見えるかについて, 簡単に説明しておく.

Plancherel-Rotach 公式は, 第一章で説明したように Hermite 関数の, 古典的に許された領域, 古典的に侵入不可能な領域, そしてポテンシャル壁周辺に分けた, 対応する量子定常状態 (つまり Hermite 関数) の高エネルギーでの挙動をあらわしていた.

我々の系においてはポテンシャル等の概念は明確にはあらわれていない. しかし moment map $\mu_P : M_P \to P \subset \mathbb{R}^m$ の像 (polytope) P が運動量の空間であるとするなら, その fiber $\mu_P^{-1}(x) \cong \mathbf{T}^m$ が対応する運動量をもった粒子の "配位空間" をあらわしていると考えるのである. また, approximate multiple $\gamma_N = Nx + O(1)$ に対して固有関数 $|\varphi_{\gamma_N}^P|_{h_N}^2$ は運動量 $x \in P^o$ をもつ粒子の量子論的側面をあらわしていると考える. このとき $N \to \infty$ は半古典的極限である. このような状況で, 運動量空間である polytope P 内では, 運動量 $x \in P^o$ を持つ粒子の許された領域とは, まさに一点 x であって, この粒子は系の不変トーラス $\mu_P^{-1}(x) \cong \mathbf{T}^m$ 上を

運動している．従ってこの粒子の量子論的側面 $|\varphi_{\gamma_N}^P|_{h_N}^2$ は点 x (または不変トーラス $\mu_P^{-1}(x)$) にピークを持つような関数で近似されるべきであり，しかも $\mu_P^{-1}(x)$ の外側では指数減衰していると考えられる．

我々の公式 (25) はこの直感をあらわしている．つまり，式 (25) の指数にあらわれる関数 $b_x^P(z) = b_x^P(\rho)$ $(z = e^{\rho/2+i\theta} \in (\mathbb{C}^*)^m)$ は次のような Taylor 展開を持つ:

$$b_x^P(u+\rho_x^P) = \frac{1}{2}\langle A(P,x)u, u\rangle + R(u), \quad R(u) = O(|u|^3). \tag{26}$$

つまり b_x^P は基本的に二次形式であり，付加的な項 $\langle \tau_x^P(z), x_N \rangle$ の寄与を押さえて，全体として $\mu_P^{-1}(x)$ の外側では指数減衰することが示される．

更に $\mu_P^{-1}(x)$ の周りの半径 $N^{-1/2}$ のボール $B_x(1/\sqrt{N})$ 内では $e^{N\langle \tau_x^P(z), x_N\rangle} = 1+O(N^{-1/2})$ となり，関数 b_x^P の Taylor 展開とあわせると

$$\begin{aligned} |\varphi_{\gamma_N}^P(z)|_{h_N}^2 &= \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{m/2} \frac{e^{-\langle A(P,x)u,u\rangle/2}}{\sqrt{\det A(P,x)}}(1+O(N^{-1/2})), \\ z &= e^{(\rho_x^P+u/\sqrt{N})/2+i\theta} \in B_x(1/\sqrt{N}), \quad |u| \le 1 \end{aligned} \tag{27}$$

となることが分かり，固有関数 $|\varphi_{\gamma_N}^P(z)|_{h_N}^2$ は不変トーラス $\mu_P^{-1}(x)$ 上に "局在" していることが分かる．

各点での漸近挙動 (定理 5.2) から様々なことが分かる．まず，第一章の問題のリストの問題 (1) に対する解答から述べる:

定理 5.3 $x \in P^o$ と $\gamma_N \in NP \cap \mathbb{Z}^m$ は上の通りとする．任意の連続関数 $f \in C(M_P)$ に対して，次が成り立つ:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{M_P} f(z)|\varphi_{\gamma_N}^P(z)|_{h_N}^2 \, d\,\mathrm{vol}_{M_P}(z) = \int_{\mu_P^{-1}(x)} f\, d\theta,$$

但し $d\theta$ は不変トーラス $\mu_P^{-1}(x) \cong \mathbf{T}^m$ 上の正規化された *Haar (Lebesgue)* 測度である．

次に，定理 4.1, 4.2, 4.3 にあらわれる定数 $c(P,x)$ については，定理 5.2 を用いて次が分かる:

命題 5.4 $x \in P^o$ と $\gamma_N \in NP \cap \mathbb{Z}^m$ は今まで通りとする．このとき次が成り立つ:

$$\lim_{N\to\infty} \|\varphi_{\gamma_N}^P\|_\infty^2 = \frac{1}{\sqrt{\det A(P,x)}}.$$

つまり定理 4.1 などの主定理にあらわれる定数 $c(P,x)$ は $1/\sqrt{\det A(P,x)}$ に他ならない．更に，$\varphi_{\gamma_N}^P$ の L^{2k}-ノルムは次のような漸近挙動を見せることも分かる．

定理 5.5 $x \in P^o$ と $\gamma_N \in NP \cap \mathbb{Z}^m$ は今までの通りとする．このとき任意の正の整数 k に対して次が成り立つ:

$$\|\varphi^P_{\gamma_N}\|^{2k}_{2k} = \frac{1}{k^{m/2}} \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{(k-1)m/2} \frac{1}{(\det A(P,x))^{(k-1)/2}}(1 + O_k(N^{-1})), \tag{28}$$

但しここで $\|\cdot\|_{2k}$ は L^{2k}-ノルムをあらわし，$O_k(N^{-1})$ の添字の k はこの評価が k に依存していることをあらわす．

定理 5.5 は次節において，定理 4.2 の証明に本質的な役割を果たす．

5.3 モーメント問題と定理 4.2 の結論

我々の目標は実数直線上の測度 $(|\varphi^P_{\gamma_N}|^2_{h_N})_* d\,\mathrm{vol}_{M_P}$ の分布関数，つまり式 (11) で定義される関数 $D_{\gamma_N}(t)$ $(t > 0)$ の漸近挙動に関する結果，特に定理 4.2 の導出である．そのために，定理 4.2 にあらわれるスケーリングされた分布関数 $F_{\gamma_N}(t)$ が何故あらわれるかについて，若干説明する．

まず，定理 5.5 によって $\mathbb{R}$ 上の測度 $(|\varphi^P_{\gamma_N}|^2_{h_N})_* d\,\mathrm{vol}_{M_P}$ の k 次モーメント

$$\int_{\mathbb{R}} x^k d((|\varphi^P_{\gamma_N}|^2_{h_N})_* d\,\mathrm{vol}_{M_P}) = \|\varphi^P_{\gamma_N}\|^{2k}_{2k}$$

は $N \to \infty$ のとき発散する．そこで，この量が有界になるように次の "正規化された単項式" f_{γ_N} と，M_P 上の測度 $d\mathrm{v}_N$ を考える:

$$d\mathrm{v}_N = \left(\tfrac{N}{2\pi}\right)^{m/2} d\,\mathrm{vol}_{M_P}, \quad f_{\gamma_N}(x) := \left(\tfrac{N}{2\pi}\right)^{-m/4} \varphi^P_{\gamma_N}(z), \quad z \in M_P.$$

このとき上の式と命題 5.4 より明らかに

$$\int_{M_P} |f_{\gamma_N}(z)|^2_{h_N}\, d\mathrm{v}_N = 1, \quad \lim_{N\to\infty} \|f_{\gamma_N}\|^2_\infty = c(P,x) \tag{29}$$

が成り立っている．そこで $\mathbb{R}$ 上の測度 ν_N, μ_N を

$$d\nu_N := (|f_{\gamma_N}|^2_{h_N})_* d\mathrm{v}_N, \quad d\mu_N(x) = x d\nu_N(x) \tag{30}$$

と定義する．このとき f_{γ_N} の測度 $d\mathrm{v}_N$ についての L^{2k}-ノルムは定理 5.5 によって，

$$M_{k-1}(\mu_N) = M_k(\nu_N) := \int_{\mathbb{R}} x^k d\nu_N(x) = \|f_{\gamma_N}\|^{2k}_{L^{2k}(d\mathrm{v}_N)} = \frac{c(P,x)^{k-1}}{k^{m/2}}(1 + O(N^{-1})) \tag{31}$$

となる．このような状況にあることが $\mathbb{R}$ 上の測度 ν_N を導入した理由であるが，測度 ν_N に対する分布関数が，実は $F_{\gamma_N}(t)$ なのである:

$$\int \chi_{(t,\infty)}(x)\, d\nu_N = F_{\gamma_N}(t) = \left(\tfrac{N}{2\pi}\right)^{m/2} D_{\gamma_N}\left(\left(\tfrac{N}{2\pi}\right)^{m/2} t\right).$$

つまりこの式によって, $F_{\gamma_N}(t)$ の極限を求めるためには, 実数直線上の測度の列 ν_N の弱収束先を求めると良いことがわかる.

ここで再び式 (29), (31) に戻る. まず式 (29) は測度 ν_N の support がパラメータ N によらない $[0,\infty)$ 内のある閉区間に含まれていることを主張している. 従って特に μ_N は弱収束先を (一意とは限らないが少なくとも一つは) 持ち, 弱収束先はコンパクトな support を持つ, $\mathbb{R}$ 上の確率測度である. また式 (31) から分かることは,

$$\lim_{N\to\infty} M_k(\mu_N) = \lim_{N\to\infty} M_{k+1}(\nu_N) = \frac{c(P,x)^k}{(k+1)^{m/2}} \tag{32}$$

という式である. つまり μ_N の弱収束先の測度のモーメントは式 (32) の右辺にあらわれる数でなければならない. ここで次の補題を示すことができる:

補題 5.6 c を正の数として, h を正の整数とする. μ を $\mathbb{R}$ 上の確率測度で, 任意の非負整数 k に対して

$$\int_{\mathbb{R}} x^k d\mu(x) = \frac{c^k}{(k+1)^{h/2}}$$

を満たしているとする. このとき μ は以下で与えられる:

$$d\mu(x) = \rho_{c,h}(x)\,dx, \quad \rho_{c,h}(x) = \frac{1}{c\Gamma(h/2)}\chi_{(0,c)}(x)(\log(c/x))^{h/2-1}.$$

ただし $\chi_{(0,c)}(x)$ は開区間 $(0,c)$ の定義関数をあらわす.

補題 5.6 を用いると任意の $t>0$ に対して $\lim_{N\to\infty} F_{\gamma_N}(t)$ が存在することが分かり, 更に

$$\begin{aligned}\lim_N F_{\gamma_N}(t) &= \int_{\mathbb{R}} r^{-1}\chi_{(t,\infty)}(r)\rho_{c(P,x),m}(r)\,dr \\ &= \frac{1}{c(P,x)\Gamma(m/2)}\int_t^{c(P,x)} r^{-1}(\log(c(P,x)/r))^{m/2-1}\,dr \\ &= \frac{1}{c(P,x)\Gamma(m/2+1)}(\log(c(P,x)/t))^{m/2}\end{aligned}$$

となり, 定理 4.2 が結論される.

5.4 対数ベキ法則の現れる一つの理由

以上が定理 4.2 の証明の概要である. 定理 4.2 の主張は Mirlin ([Mi], [MF]) などの物理学者も予言しており, (表現は異なっているものの) 彼等の予言にたいして肯定的な結果となっている. しかし上述の証明では, 何故対数ベキ法則, つまりスケーリングされた分布関数 $F_{\gamma_N}(t)$ の極限に $\log t$ のベキが現れるか, という問いに対する理由が見えにくい. この問いに対する一つの解答を得るために, 再び定理 5.2 (各点での漸近挙動) について考えてみる.

まずスケーリングされた分布関数 $F_{\gamma_N}(t)$ のスケーリングの方法を検討してみる. $F_{\gamma_N}(t)$ は式 (16) で定義されているように, パラメータ $t>0$ に N について増大する項 $(N/2\pi)^{m/2}$ をかけている. これは $|\varphi_{\gamma_N}^P|_{h_N}^2$ の等位面を押し上げている. そして更にその等位面以下の部分の体積をはかり, 再び $(N/2\pi)^{m/2}$ をかけている.

一方, 定理 5.2 の各点での漸近挙動の公式を見ると, $|\varphi_{\gamma_N}^P|_{h_N}^2$ は不変トーラス $\mu_P^{-1}(x)$ の近傍では Gaussian 関数のように "局在" し, そこを離れると指数減衰している. つまり, パラメータ $t>0$ に $(N/2\pi)^{m/2}$ をかけて等位面を押し上げることによって, より局在の中心である不変トーラス $\mu_P^{-1}(x)$ の近傍での固有関数の集まり具合を調べているわけである. そこで不変トーラス $\mu_P^{-1}(x)$ の半径 $N^{-1/2}$ のボール内での固有関数の挙動を見た式 (27) を考えてみると, これは正値対称行列 $A(P,x)$ で定まる Gaussian 関数に他ならないことが分かる.

このような状況を考慮して次の $\mathbb{R}^m$ 上の関数と測度を考える.

$$g(u) := \frac{e^{-\langle Au,u\rangle/2}}{\sqrt{\det A}}, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$
$$\nu_A := \frac{\det A}{(2\pi)^{m/2}} du,$$

ただし, A は実正定値 $m \times m$ 対称行列とする. このとき直接的な計算で次が分かる:

$$\nu_A(u \in \mathbb{R}^m \,;\, g(u) > t) = \frac{1}{c\Gamma(m/2+1)} \left(\log \frac{c}{t}\right)^{m/2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\det A}}, \quad 0 < t \leq c.$$

上の式はまさに定理 4.2 の極限公式にあらわれる式である.

つまり対数ベキ $(\log(c/t))^{m/2}$ があらわれる理由は, 固有関数が対応する不変トーラス上に, 反古典極限 $N \to \infty$ $(\hbar \to 0)$ の下で "Gaussian 関数風に" 局在していくことに由来している.

6 まとめ

以上のように, この文章では "toric Kähler 多様体" として実現される理想的な可積分系に対して, その固有関数の分布関数の漸近挙動を見てきた. そして, 特に "対数ベキ" $(\log c/t)^{m/2}$ という関数がスケーリングされた分布関数の極限としてあらわれる事が分かった. そして対数ベキが現れる理由については, 固有関数が不変トーラスに Gaussian 関数のように局在することが挙げられることが分かった.

つまり, このように固有関数が Gaussian 関数風に不変トーラス上に局在している系では, 分布関数の極限に対数ベキが現れることを期待してもおかしくはない.

なお, この文章では polytope P の内点に対してのみ, 対応する固有関数の漸近挙動を考えたが, 実際には polytope の境界にある格子点に対しても同じような結果を得ることができる. これについては [STZ] を参照されたい.

参考文献

[De] T. Delzant, Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment, *Bull. Soc. Math. France* 116 (1988), 315–339.

[Fu] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties,* Annals of Math. Study 131, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.

[GKZ] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser, Boston, 1994.

[Gu] V. Guillemin, *Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n-Spaces,* Progress in Math. 122, Birkhäuser, Boston, 1994.

[KR] P. Kurlberg and Z. Rudnick, Value distribution for eigenfunctions of desymmetrized quantum maps, *Internat. Math. Res. Notices* 2001 (2001), 985–1002.

[Mi] A. D. Mirlin, Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems, *Phys. Rep.* 326 (2000), 259–382.

[MF] A. D. Mirlin and Y. V. Fyodorov, Distribution of local densities of states, order parameter function, and critical behavior near the Anderson transition, *Phys. Rev. Lett.* 72, (1994), 526–529.

[Sz] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publ. vol. 23, Amer. Math. Soc, 1939.

[STZ] B. Shiffman, T. Tate and S. Zelditch, Distribution laws for integrable eigenfunctions, to appear (math.CV/0306189).

[Y] S.-T. Yau, Open problems in geometry, *Differential geometry: partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990)*, Proc. Sympos. Pure Math., 54, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 1–28.