

Hanner-type inequality and optimal 2-uniform convexity and smoothness inequalities

北九州高専 山田康隆 (Yasutaka Yamada)

Kitakyushu College of Technology

岡山県立大情報工 高橋泰嗣 (Yasuji Takahashi)

Department of System Engineering, Okayama Prefectural University

九州工大 加藤幹雄 (Mikio Kato)

Department of Mathematics, Kyushu Institute of Technology

Hanner は L_p の modulus of convexity を決定する際, Hanner 不等式を用いた [2]. ここではそれを包括する重み γ 付きの Hanner 型不等式とその多元版を導入し, 双対性, optimal 2-uniform convexity (smoothness) 不等式との関係を考察する. 特に L_p に対しては最良の γ を決定する.

Theorem 1 (Hanner inequality).

$$(H1) \quad \|x + y\|^p + \|x - y\|^p \geq \left| \|x\| + \|y\| \right|^p + \left| \|x\| - \|y\| \right|^p \quad \forall x, y \in L_p \quad (1 < p \leq 2)$$

$$(H2) \quad \|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leq \left| \|x\| + \|y\| \right|^p + \left| \|x\| - \|y\| \right|^p \quad \forall x, y \in L_p \quad (2 \leq p < \infty)$$

この Hanner の不等式は L_p 空間の他, p -Schatten class operator のなす空間 C_p では $1 \leq p \leq 4/3$ のとき (H1), $p \geq 4$ のとき (H2) が成立する. なお $p = 1$ の場合, (H1) は三角不等式となりすべてのノルム空間で成立する. ここでは (H1), (H2) に重みをつけて一般化した Hanner 型不等式を導入し, この不等式を満たすようなバナッハ空間を考察する.

Theorem 2 (Hanner type inequality). Let X be a Banach space and let $1 < p, s, t < \infty$.

(i) The inequality

$$(H1_\gamma) \quad \|x + y\|^p + \|x - y\|^p \geq \left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^p + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^p$$

holds in X with some $\gamma > 0$ if and only if the inequality

$$(HT1) \quad \left(\frac{\|x + y\|^s + \|x - y\|^s}{2} \right)^{1/s} \geq \left(\frac{\left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^t + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^t}{2} \right)^{1/t}$$

holds in X with some $\gamma > 0$.

(ii) The inequality

$$(H2_\gamma) \quad \|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leq \left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^p + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^p$$

holds in X with some $\gamma > 0$ if and only if the inequality

$$(HT2) \quad \left(\frac{\|x + y\|^s + \|x - y\|^s}{2} \right)^{1/s} \leq \left(\frac{\left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^t + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^t}{2} \right)^{1/t}$$

holds in X with some $\gamma > 0$.

$(H1_\gamma)$, $(H2_\gamma)$ は Hanner 不等式に重み γ を付加したもので, $(HT1)$, $(HT2)$ はそれぞれを一般化した不等式である. $(HT1)$, $(HT2)$ の不等式の右辺は γ について単調増加関数であり $(HT1)$ では $0 < \gamma \leq 1$, $(HT2)$ では $1 \leq \gamma < \infty$ となる. 我々は Hanner 型不等式 $(HT1)$ または $(HT2)$ を満たすバナッハ空間 X と最良の γ を考察する.

Hanner 型不等式の成立するバナッハ空間の双対空間において, 逆向きの Hanner 型不等式が成立する.

Theorem 3 (Duality). Let X be a Banach space and X^* the dual space of X . Let $1 < s, t < \infty$, $1/s + 1/s' = 1/t + 1/t' = 1$ and $\gamma > 0$. Then the following are equivalent.

(i) The inequality

$$\left(\frac{\|x + y\|^s + \|x - y\|^s}{2} \right)^{1/s} \geq \left(\frac{\left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^t + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^t}{2} \right)^{1/t}$$

holds in X .

(ii) The inequality

$$\left(\frac{\|x^* + y^*\|^{s'} + \|x^* - y^*\|^{s'}}{2} \right)^{1/s'} \leq \left(\frac{\left| \|x^*\| + \|\gamma^{-1} y^*\| \right|^{t'} + \left| \|x^*\| - \|\gamma^{-1} y^*\| \right|^{t'}}{2} \right)^{1/t'}$$

holds in X^* .

これによりオリジナルな Hanner 不等式の証明は $(H1)$ のみの証明で十分であることがわかる.

バナッハ空間 X が q -uniformly convex ($2 \leq q < \infty$) であるとは、正数 C が存在して、任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta_X(\epsilon) \geq C\epsilon^q$ が成立することである。また X が p -uniformly smooth ($1 < p \leq 2$) であるとは、正数 K が存在して、任意の $\tau > 0$ に対し $\rho_X(\tau) \leq K\tau^p$ が成立することである。ここで $\delta_X(\epsilon)$ は modulus of convexity; $\delta_X(\epsilon) = \inf \{1 - \|\frac{x+y}{2}\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| = \epsilon\}$, $\rho_X(\tau)$ は modulus of smoothness; $\rho_X(\tau) = \sup \{\frac{1}{2}(\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|) - 1 : \|x\| = \|y\| = 1\}$ である。

Lemma 4 (2-uniform convexity inequalities; [6]). Let X be a Banach space and let $1 < s < \infty$. Then the following are equivalent.

- (i) X is 2-uniformly convex.
- (ii) There exists $C > 0$ for which

$$\left(\frac{\|x+y\|^s + \|x-y\|^s}{2} \right)^{1/s} \geq (\|x\|^2 + \|Cy\|^2)^{1/2}$$

holds in X .

- (iii) There exists $C > 0$ such that for any $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j \right\|^s \right)^{1/s} \geq \left(\|x_1\|^2 + \sum_{j=2}^n \|Cx_j\|^2 \right)^{1/2}$$

holds in X , where $\{\epsilon_j\}$ is a Rademacher sequence and \mathbf{E} denotes the expectation.

In the case of $1 < s \leq 2$, one can take the same constant C in (ii) and (iii).

Lemma 5 (2-uniform smoothness inequalities; [6]). Let X be a Banach space and let $1 < s < \infty$. Then the following are equivalent.

- (i) X is 2-uniformly smooth.
- (ii) There exists $K > 0$ for which

$$\left(\frac{\|x+y\|^s + \|x-y\|^s}{2} \right)^{1/s} \leq (\|x\|^2 + \|Ky\|^2)^{1/2}$$

holds in X .

- (iii) There exists $K > 0$ such that for any $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j \right\|^s \right)^{1/s} \leq \left(\|x_1\|^2 + \sum_{j=2}^n \|Kx_j\|^2 \right)^{1/2}$$

holds in X .

In the case of $s \geq 2$, one can take the same constant K in (ii) and (iii).

Theorem 6. Let X be a Banach space and let $1 < s, t < \infty$. Then the following are equivalent.

- (i) X is 2-uniformly convex.
- (ii) There exists some $\gamma > 0$ for which

$$(HT1) \quad \left(\frac{\|x+y\|^s + \|x-y\|^s}{2} \right)^{1/s} \geq \left(\frac{\left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^t + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^t}{2} \right)^{1/t}$$

holds in X .

- (iii) There exists some $\gamma > 0$ such that for any $n \in \mathbb{N}$

$$(mHT1) \quad \left(\mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j \right\|^s \right)^{1/s} \geq \left(\mathbf{E} \left| \epsilon_1 \|x_1\| + \gamma \sum_{j=2}^n \epsilon_j \|x_j\| \right|^t \right)^{1/t}$$

holds in X .

Theorem 7. Let X be a Banach space and let $1 < s, t < \infty$. Then the following are equivalent.

- (i) X is 2-uniformly smooth.
- (ii) There exists some $\gamma > 0$ for which

$$(HT2) \quad \left(\frac{\|x+y\|^s + \|x-y\|^s}{2} \right)^{1/s} \leq \left(\frac{\left| \|x\| + \|\gamma y\| \right|^t + \left| \|x\| - \|\gamma y\| \right|^t}{2} \right)^{1/t}$$

holds in X .

- (iii) There exists some $\gamma > 0$ such that for any $n \in \mathbb{N}$

$$(mHT2) \quad \left(\mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j \right\|^s \right)^{1/s} \leq \left(\mathbf{E} \left| \epsilon_1 \|x_1\| + \gamma \sum_{j=2}^n \epsilon_j \|x_j\| \right|^t \right)^{1/t}$$

holds in X .

(mHT1), (mHT2) は Hanner 型不等式の多元版である。定数 γ は (mHT1) では $0 < \gamma \leq 1$, (mHT2) では $1 \leq \gamma < \infty$ で、これら不等式の右辺も 2 元の場合と同様 γ に関して単調増加関数である。したがって (mHT1), (mHT2) をみたす最良定数 γ を次のように定義する。

$$\gamma_{(s,t)}(X) := \sup\{\gamma > 0 : X \text{ で (mHT1) が成立する}\},$$

$$\gamma^{(s,t)}(X) := \inf\{\gamma > 0 : X \text{ で (mHT2) が成立する}\}.$$

2元についての γ の最良定数を

$$\gamma_{(s,t;2)}(X) := \sup\{\gamma > 0 : X \text{ で (HT1) が成立する}\},$$

$$\gamma^{(s,t;2)}(X) := \inf\{\gamma > 0 : X \text{ で (HT2) が成立する}\}$$

とすれば $\gamma_{(s,t;2)}(X) \geq \gamma_{(s,t)}(X)$, $\gamma^{(s,t;2)}(X) \leq \gamma^{(s,t)}(X)$ は明らかである. 一般のバナッハ空間における最良定数の算出は容易ではないが L_p 空間については次の結果を得る.

Theorem 8.

$$(i) \quad \gamma_{(s,t)}(L_p) = \min \left\{ 1, \sqrt{(p-1)/(t-1)}, \sqrt{(s-1)/(t-1)} \right\} \quad (1 < p \leq 2).$$

$$(ii) \quad \gamma^{(s,t)}(L_p) = \max \left\{ 1, \sqrt{(p-1)/(t-1)}, \sqrt{(s-1)/(t-1)} \right\} \quad (2 \leq p < \infty).$$

Further

$$\gamma_{(s,t)}(L_p) = \gamma_{(s,t;2)}(L_p) \quad (1 < p \leq 2),$$

$$\gamma^{(s,t)}(L_p) = \gamma^{(s,t;2)}(L_p) \quad (2 \leq p < \infty).$$

参考文献

- [1] K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms, *Invent. Math.* **115** (1994), 463-482.
- [2] O. Hanner, On the uniform convexity of L_p and l_p , *Ark. Math.* **3** (1956), 239-244.
- [3] A. Kigami, Y. Okazaki and Y. Takahashi, A generalization of the Hanner's inequality and the type 2 (cotype 2) constant of a Banach space. *Bull. Kyushu. Inst. Tech. Math. Natur. Sci.* No.42, (1995), 29-34.
- [4] A. Kigami, Y. Okazaki and Y. Takahashi, A generalization of Hanner's inequality. *Bull. Kyushu. Inst. Tech. Math. Natur. Sci.* No.43, (1996), 9-13.
- [5] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II*, 1979.
- [6] Y. Takahashi, K. Hashimoto and M. Kato, On sharp uniform convexity, smoothness, and strong type, cotype inequalities, *J. Nonlinear. Convex Anal.* **3**, No.2, (2002), 267-281.