数理解析研究所講究録 1365 巻 2004 年 73-82

ベルンシュタイン型作用素による近似精度

琉球大学 理学部　西白保敏彦 (Toshihiko Nishishiraho)
Faculty of Science, University of the Ryukyus

1. 序

$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とし, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく. また, $\mathbb{R}$ は実数直線を表す. $C[0,1]$ 上の Bernstein(多項式) 作用素は

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad (f \in C[0,1],\ x \in [0,1])$$

によって定義される. このとき, すべての $f \in C[0,1]$ に対して $\{B_n(f)(x)\}$ は $[0,1]$ 上で一様に $f(x)$ に a.c.(almost convergent) である (cf. [3]). 即ち,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{m=k}^{n+k} B_m(f)(x) = f(x) \qquad \text{uniformly in } k \in \mathbb{N}_0, x \in [0,1].$$

この結果に鑑み, 次のような近似法を導入する:

$(E, \|\cdot\|)$ をノルム空間, (X,d) を距離空間とする. $B(X,E)$ は X から E への有界な写像全体の成すノルム空間を表す. また, $C(X,E)$ は X から E への連続写像全体の成す線形空間を表す. さらに, $BC(X,E) := B(X,E) \cap C(X,E)$ とおく. X_0 は X の部分集合で, Λ を添字集合とする. $\mathfrak{K} = \{K_{n,\lambda} : n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda\}$ を $BC(X,E)$ から $B(X,E)$ への写像の族とする. このとき, $\mathfrak{K}$ が $BC(X,E)$ 上の同程度一様近似法 $(EQUAP)$ であるとは, すべての $F \in BC(X,E)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \|K_{n,\lambda}(F)(x) - F(x)\| = 0 \quad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda,\ x \in X_0 \tag{1}$$

が成立することである ([11]. cf. [4], [5], [6]).

ここでは, 次のように定義される $BC(X,E)$ 上の補間型作用素の族 $\mathfrak{K}$ を考える:

Y を有限集合とし, $\mathfrak{A} = \{\chi_{n,\lambda}(\cdot;k) : n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda, k \in Y\}$ は X 上の実数値関数の族で

$$\chi_{n,\lambda}(x;\cdot) \geq 0, \qquad \sum_{k\in Y} \chi_{n,\lambda}(x;k) = 1 \qquad (x \in X_0) \tag{2}$$

を満たすとする. $\Xi = \{\xi_{n,\lambda} : n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda\}$ をYからXへの写像の族とする. このとき, 補間システム$\mathfrak{A}$と節点族Ξを持つ補間型作用素を

$$K_{n,\lambda}(F)(x) = \sum_{k \in Y} \chi_{n,\lambda}(x;k) F(\xi_{n,\lambda}(k)) \qquad (F \in BC(X,E)) \tag{3}$$

によって定義する. これは$BC(X,E)$上の一般的な積分作用素の特別なものである([11], [12], cf. [10]).

本講演の目的は, 適当な条件の下で$\{K_{n,\lambda}(F)(x)\}$の$F(x)$への収束性 (1) 及びその収束速度の度合いをFの連続率を用いて評価し, これらの結果をベルンシュタイン型作用素へ応用することである. 一般的な取り扱い及び詳細については, [11], [12]を参照.

2. 収束定理

X_0はコンパクトで, Xのある開集合O_{X_0}とコンパクト集合Z_{X_0}が存在して,

$$X_0 \subseteq O_{X_0} \subseteq Z_{X_0} \tag{4}$$

とする. 当然, Xが局所コンパクトならば, この条件は常に満たされる.

以下において, $\mathfrak{K} = \{K_{n,\lambda} : n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda\}$ は (3) によって定義された補間型作用素の族とする.

$\Phi : X_0 \times X \to [0,\infty)$ は, すべての $\delta > 0$ に対して

$$\inf\{\Phi(x,t) : (x,t) \in X_0 \times X,\ d(x,t) \geq \delta\} > 0 \tag{5}$$

を満たす関数とする. また,

$$\tau_{n,\lambda}(x;\Phi) := \sum_{k \in Y} \chi_{n,\lambda}(x;k) \Phi(x, \xi_{n,\lambda}(k))$$

とおき, これを$\chi_{n,\lambda}$のxにおけるΦ-モーメントという.

定理 1.

$$\lim_{n\to\infty} \tau_{n,\lambda}(x;\Phi) = 0 \quad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda, x \in X_0$$

ならば, $\mathfrak{K}$は$BC(X,E)$上の$EQUAP$である.

関数Φが次の特別な形で与えられ且つ (5) を満たす場合は, 定理 1 からコロフキン型の定理を得ることができる (コロフキン型近似理論とその応用については, [1]

(cf. [2]) を参照:

$$\Phi(x,t)=\sum_{i=1}^{r}u_i(x)w_i(t)\geq 0 \qquad ((x,t)\in X_0\times X), \quad \Phi(x,x)=0 \qquad (x\in X_0).$$

但し, 各関数 u_iは X_0で有界で, 各関数 w_iは Xで連続である. 特に, s を正の偶数とし, $h_1,h_2,\ldots,h_r$は X上の実数値連続関数で

$$\Phi(x,t)=\sum_{i=1}^{r}(h_i(x)-h_i(t))^s \qquad ((x,t)\in X_0\times X)$$

の場合は応用上重要である ([7], [8], [9]).

また, $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ を狭義の単調増加関数で, $\varphi(0)=0$ とし,

$$\Phi(x,t)=\varphi(d(x,t)) \qquad ((x,t)\in X_0\times X)$$

と定めれば条件 (5) が満たされる. 特に,

$$q>0, \quad \varphi(u)=u^q \qquad (u\geq 0)$$

のとき, $\tau_{n,\lambda}(x;d^q)$ を$\chi_{n,\lambda}$の x における q次のモーメントという. これを用いると, 定理 1 によって, ある $q>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\tau_{n,\lambda}(x;d^q)=0 \qquad \text{uniformly in } \lambda\in\Lambda, x\in X_0$$

ならば, $\mathfrak{K}$ は $BC(X,E)$ 上の $EQUAP$である.

3. 収束速度の評価

$F\in B(X,E), \delta\geq 0$ に対して

$$\omega(F,\delta)=\sup\{\|F(x)-F(t)\|: x,t\in X, d(x,t)\leq\delta\}$$

と定義する. これは Fの連続率と呼ばれ, δ の関数として $[0,\infty)$ 上の単調増加で且つ有界である. 更に,

$$F: X\text{上で一様連続} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\delta\to+0}\omega(F,\delta)=0.$$

定理 1 の連続率による量的バージョンを与えるために次の (6) 及び (7) を仮定する:

ある定数 $C \geq 1, K > 0$ が存在して

$$\omega(F, \xi\delta) \leq (C + K\xi)\omega(F, \delta) \qquad (\forall\, F \in B(X, E),\ \forall\, \xi, \delta \geq 0) \tag{6}$$

が成り立つ;

ある定数 $q \geq 1, M > 0$ が存在して

$$d^q(x, t) \leq M\Phi(x, t) \qquad (\forall\, (x, t) \in X_0 \times X) \tag{7}$$

が成り立つ.

d が凸であるとは,

$$d(x, y) = \alpha + \beta, \alpha, \beta > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, z \in X : d(x, z) = a,\ d(z, y) = b$$

が成り立つことである. この条件の下では, (6) が $C = K = 1$ として満たされる. また, Xが線形距離空間 (V, d) の凸部分集合で, d は移動不変, i.e.,

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \qquad (\forall\, x, y, z \in V),$$

$d(\cdot, 0)$ は星型, i.e.,

$$d(\alpha x, 0) \leq \alpha d(x, 0) \qquad (\forall x \in V, \forall \alpha \in [0, 1])$$

ならば, (6) が $C = K = 1$ として満たされる. 特に, Xがノルム空間 Vの凸部分集合ならば, $C = K = 1$ として (6) が成り立つ (cf. [7]). 更に, 条件 (7) の下では, (5) が常に成立する.

以下, $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$は正の実数列とする. また, 各 $n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$E_n(F) := \sup\{\|K_{n,\lambda}(F)(x) - F(x)\| : \lambda \in \Lambda, x \in X_0\} \qquad (F \in BC(X, E))$$

とおく. このとき,

$$\mathfrak{K} : BC(X, E) \text{ 上の } EQUAP \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall F \in BC(X, E),\ \lim_{n \to \infty} E_n(F) = 0.$$

定理 2. すべての $F \in BC(X, E), n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$E_n(F) \leq (C + K \min\{M^{1/q}\epsilon_n^{-1},\ M\epsilon_n^{-q}\})\omega(F, \epsilon_n \tau_n(\Phi))$$

が成り立つ. ここで,

$$\tau_n(\Phi) := (\sup\{\tau_{n,\lambda}(x; \Phi) : \lambda \in \Lambda, x \in X_0\})^{1/q}.$$

4. ベルンシュタイン型作用素

$1 \le p \le \infty$ とし, $(\mathbb{R}^r, d)$ において距離関数 d は次のとおり定義されるものとする:

$$d(x,t) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^r |x_i - t_i|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \max\{|x_i - t_i| : 1 \le i \le r\} & (p = \infty), \end{cases}$$

$$(x = (x_1, x_2, \ldots, x_r),\ t = (t_1, t_2, \ldots, t_r) \in \mathbb{R}^r).$$

このとき,

$$p_i(x) := x_i \qquad (x = (x_1, x_2, \ldots .x_r) \in \mathbb{R}^r, i = 1, 2, \ldots, r)$$

と定義すれば,

$$d^q(x,t) \le c(p,q,r) \sum_{i=1}^r |p_i(x) - p_i(t)|^q \qquad (x, t \in \mathbb{R}^r,\ q > 0)$$

が成立する. 但し,

$$c(p,q,r) := \begin{cases} r^{q/p} & (1 \le p < \infty, p \ne q) \\ 1 & (1 \le p < \infty, p = q) \\ 1 & (p = \infty). \end{cases}$$

ここでは, Xは$\mathbb{R}^r$の局所閉凸集合とする. 従って, (4) 及び (6) が $C = K = 1$ として成り立つ.

定理 3. $q \ge 1$ とする. このとき, すべての $F \in BC(X, E), n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$E_n(F) \le (1 + \min\{c(p,q,r)^{1/q}\epsilon_n^{-1},\ c(p,q,r)\epsilon_n^{-q}\})\omega(F, \epsilon_n \mu_n(q))$$

が成り立つ. ここで,

$$\mu_n(q) := \left(\sup\left\{\sum_{i=1}^r \left(\sum_{k \in Y} \chi_{n,\lambda}(x;k)|p_i(x) - p_i(\xi_{n,\lambda}(k))|^q\right) : \lambda \in \Lambda, x \in X_0\right\}\right)^{1/q}.$$

各 $n \in \mathbb{N}_0, i = 1, 2, \ldots, r$ に対して

$$m_{n,i} : \Lambda \to \mathbb{N}, \qquad a_{n,i} : \Lambda \to (0, \infty)$$

とし, $X := [0, \infty)^r$, X_0は閉集合で, $X_0 \subseteq [0,1]^r$とする. $F \in BC(X, E)$ に対して

$$B_{n,\lambda}(F)(x) = \sum_{k_1=0}^{m_{n,1}(\lambda)} \sum_{k_2=0}^{m_{n,2}(\lambda)} \cdots \sum_{k_r=0}^{m_{n,r}(\lambda)} \prod_{i=1}^r \binom{m_{n,i}(\lambda)}{k_i} x_i^{k_i}(1 - x_i)^{m_{n,i}(\lambda) - k_i}$$

$$\times F(a_{n,1}(\lambda)k_1, a_{n,2}(\lambda)k_2, \ldots, a_{n,r}(\lambda)k_r)$$

$$(n \in \mathbb{N}_0,\ \lambda \in \Lambda,\ x \in X)$$

と定義する. このとき, $K_{n,\lambda} := B_{n,\lambda}$は (2) を満たす補間型作用素で, ベルンシュタイン型作用素と呼ばれる.

定理 4. 各 $i = 1, 2, \ldots, r$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,i}(\lambda)m_{n,i}(\lambda) = 1 \qquad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda \tag{8}$$

且つ

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,i}(\lambda)^2 m_{n,i}(\lambda) = 0 \qquad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda \tag{9}$$

ならば, $\mathfrak{K}$ は $BC(X, E)$ 上の $EQUAP$である.

$$\beta_n := \Big(\sup\Big\{\sum_{i=1}^{r} b_{n,i}(\lambda, x) : \lambda \in \Lambda, x \in X_0\Big\}\Big)^{1/2}$$

とおく. 但し,

$$b_{n,i}(\lambda, x) := (a_{n,i}(\lambda)m_{n,i}(\lambda) - 1)^2 p_i^2(x) + a_{n,i}(\lambda)^2 m_{n,i}(\lambda)p_i(x)(1 - p_i(x))$$

とする.

定理 5. すべての $F \in BC(X, E), n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$E_n(F) \leq (1 + \min\{\sqrt{c(p,r)}\epsilon_n^{-1},\ c(p,r)\epsilon_n^{-2}\})\omega(F, \epsilon_n\beta_n) \tag{10}$$

が成り立つ. 但し,

$$c(p, r) = \begin{cases} r^{2/p} & (1 \leq p < \infty, p \neq 2) \\ 1 & (p = 2, \infty). \end{cases}$$

定理 6. すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$a_{n,i}(\lambda)m_{n,i}(\lambda) = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0, i = 1, 2, \ldots, r) \tag{11}$$

とする. このとき, すべての $F \in BC(X, E), n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$E_n(F) \leq (1 + \min\{\sqrt{c(p,r)}\epsilon_n^{-1},\ c(p,r)\epsilon_n^{-2}\})\omega(F, \epsilon_n\gamma_n)$$

が成り立つ. ここで,

$$\gamma_n := \Big(\sum_{i=1}^{r}\Big(\sup\Big\{\frac{1}{m_{n,i}(\lambda)} : \lambda \in \Lambda\Big\}\|p_i - p_i^2\|_{X_0}\Big)\Big)^{1/2},$$

$$\|p_i - p_i^2\|_{X_0} := \max\{p_i(x) - p_i(x)^2 : x \in X_0\}$$

である.

(8) 及び (9) を満たす $\{m_{n,i}\}, \{a_{n,i}\}$ の例は次の通りである:

$\Lambda \subseteq [0,\infty), \nu \in \mathbb{N}_0, \mu \in [0,\infty)$ で, $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ は狭義単調増加な自然数列とする. このとき,

$$m_{n,i}(\lambda) := \nu_n + \nu + [\lambda] + i \qquad (n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda, i = 1, 2, \dots, r), \tag{12}$$

但し, $[\cdot]$ は Gauss 記号を表す.

$$a_{n,i}(\lambda) := \frac{1}{\nu_n + \mu + \lambda + i} \qquad (n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda, i = 1, 2, \dots, r). \tag{13}$$

また, (11) を満たす $\{m_{n,i}\}, \{a_{n,i}\}$ の例は $m_{n,i}(\lambda)$ を (12) の通りとし,

$$a_{n,i}(\lambda) := \frac{1}{\nu_n + \nu + [\lambda] + i} \qquad (n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda, i = 1, 2, \dots, r) \tag{14}$$

とすればよい.

$X_0 = [0,1]^r$ とする. (12), (13) において $\nu = \mu = 0$ の場合, 定理 5 から次の評価式が得られる:

$$E_n(F) \leq \left(1 + \min\left\{\frac{\sqrt{rc(p,r)}}{2}, \frac{rc(p,r)}{4}\right\}\right)\omega\left(F, \frac{1}{\sqrt{\nu_n}}\right) \qquad (F \in BC(X,E)).$$

また, (12), (14) の場合, 定理 6 から次の評価式が得られる:

$$E_n(F) \leq \left(1 + \min\left\{\frac{\sqrt{rc(p,r)}}{2}, \frac{rc(p,r)}{4}\right\}\right)\omega\left(F, \frac{1}{\sqrt{\nu_n + \nu + 1}}\right) \qquad (F \in BC(X,E)).$$

$m_n : \Lambda \to \mathbb{N}$, $X_0 \subseteq \Delta_r$ とする. 但し,

$$\Delta_r := \left\{x = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r : x_i \geq 0, 1 \leq i \leq r, \sum_{i=1}^{r} x_i \leq 1\right\}$$

(the standard r-simplex) である. $F \in BC(X,E)$ に対して,

$$B_{n,\lambda}(F)(x) = \sum_{k_i \in \mathbb{N}_0, k_1 + k_2 + \cdots + k_r \leq m_n(\lambda)} q_{n,\lambda}(x; k_1, k_2, \dots, k_r)$$

$$\times F(a_{n,1}(\lambda)k_1, a_{n,2}(\lambda)k_2, \dots, a_{n,r}(\lambda)k_r)$$

$$(n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda, x \in X)$$

と定義する. ここで,

$$q_{n,\lambda}(x;k_1,k_2,\ldots,k_r) := \binom{m_n(\lambda)}{k_1,k_2,\ldots,k_r}\prod_{i=1}^{r}x_i^{k_i}\Big(1-\sum_{j=1}^{r}x_j\Big)^{m_n(\lambda)-\sum_{j=1}^{r}k_j},$$

$$\binom{m_n(\lambda)}{k_1,k_2,\ldots,k_r} := \frac{m_n(\lambda)!}{k_1!k_2!\cdots k_r!(m_n(\lambda)-k_1-k_2-\cdots-k_r)!}$$

である.

$K_{n,\lambda} := B_{n,\lambda}$は (2) を満たす補間型作用素で, ベルンシュタイン型作用素と呼ばれる.

定理 8. 各 $i=1,2,\ldots,r$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,i}(\lambda)m_n(\lambda) = 1 \qquad \text{uniformly in } \lambda\in\Lambda \tag{15}$$

且つ

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,i}(\lambda)^2 m_n(\lambda) = 0 \qquad \text{uniformly in } \lambda\in\Lambda \tag{16}$$

ならば, $\mathfrak{K}$ は $BC(X,E)$ 上の $EQUAP$である.

$$\beta_n := \Big(\sup\Big\{\sum_{i=1}^{r} b_{n,i}(\lambda,x) : \lambda\in\Lambda, x\in X_0\Big\}\Big)^{1/2}$$

とおく. 但し,

$$b_{n,i}(\lambda,x) := (a_{n,i}(\lambda)m_n(\lambda)-1)^2 p_i(x)^2 + a_{n,i}(\lambda)^2 m_n(\lambda)p_i(x)(1-p_i(x))$$

とする.

定理 9. すべての $F\in BC(X,E), n\in\mathbb{N}_0$に対して, 不等式 (10) が成立する.

$$\theta_n := \sqrt{\sup\Big\{\frac{1}{m_n(\lambda)} : \lambda\in\Lambda\Big\}} \qquad (n\in\mathbb{N}_0),$$

$$\tau_{X_0}(p,r) := 1+\min\Big\{\sqrt{c(p,r)}\Big\|\sum_{i=1}^{r}(p_i-p_i^2)\Big\|_{X_0}^{1/2},\ c(p,r)\Big\|\sum_{i=1}^{r}(p_i-p_i^2)\Big\|_{X_0}\Big\},$$

$$\Big\|\sum_{i=1}^{r}(p_i-p_i^2)\Big\|_{X_0} := \max\Big\{\sum_{i=1}^{r}(p_i(x)-p_i^2(x)) : x\in X_0\Big\}$$

とおく.

定理 10. すべての $\lambda\in\Lambda$ に対して

$$a_{n,i}(\lambda)m_n(\lambda) = 1 \qquad (n\in\mathbb{N}_0, i=1,2,\cdots,r) \tag{17}$$

とする. このとき, すべての $F \in BC(X,E), n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$E_n(F) \leq \tau_{X_0}(p,r)\omega(F,\theta_n)$$

が成立する.

Λ, ν, μ及び $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$は先程のとおりとする. このとき,

$$m_n(\lambda) := \nu_n + \nu + [\lambda] \qquad (n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda) \tag{18}$$

とし, $a_{n,i}(\lambda)$ を (13) の通りとすれば, (15) 及び (16) が成り立つ. また,

$$a_{n,i}(\lambda) := \frac{1}{\nu_n + \nu + [\lambda]} \qquad (n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda, i = 1, 2, \dots, r) \tag{19}$$

とすれば, (17) が成り立つ.

$X_0 = \Delta_r$とする. (13), (18) において $\mu = \nu = 0$ の場合, 定理 5 から次の評価式が得られる:

$$E_(F) \leq (1 + (r+1)\sqrt{rc(p,r)})\omega\Big(F, \frac{1}{\sqrt{\nu_n + 1}}\Big) \qquad (F \in BC(X,E)).$$

また, (18), (19) の場合, 定理 6 から次の評価式が得られる:

$$E_n(F) \leq \Big(1 + \min\Big\{\frac{\sqrt{rc(p,r)}}{2}, \frac{rc(p,r)}{4}\Big\}\Big)\omega\Big(F, \frac{1}{\sqrt{\nu_n + \nu}}\Big) \qquad (F \in BC(X,E)).$$

参考文献

[1] F. Altomare and M. Campiti, *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1994.

[2] P. P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory*, Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1960.

[3] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Math., **80** (1948), 167-190.

[4] T. Nishishiraho, *Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **33** (1981), 109-126.

[5] T. Nishishiraho, *Saturation of multiplier operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **34** (1982), 23-42.

[6] T. Nishishiraho, *Quantitative theorems on approximation processes of positive linear operators*, Multivariate Approximation Theory II, Proc. Intnernat. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach, (ed. by W. Schempp and K. Zeller), ISNM Vol. **61**, pp. 297-311, Birkhauser-Verlag, Basel/Boston/Stuttgart, 1982.

[7] T. Nishishiraho, *Convergence of positive linear approximation processes*, Tôhoku Math. J., **35** (1983), 441-458.

[8] T. Nishishiraho, *Approximation processes with respect to multiplication operators*, Comput. Math. Appl., **30** (1995), 389-408.

[9] T. Nishishiraho, *Refinements of Krovkin-type approximation processes*, Proc. the 4th Internat. Conf. on Functinal Analysis and Approximation Theory, Acquafredda di Maratea, 2000, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, **68** (2002), 711-725.

[10] T. Nishishiraho, *Approximation processes of integral operators in Banach spaces*, J. Nonliinear and Convex Analysis, 4 (2003), 125-140.

[11] T. Nishishiraho, *The convergence of equi-uniform approximation processes of integral operators in Banach spaces*, to appear.

[12] T. Nishishiraho, *The degree of convergence of equi-uniform approximation processes of integral operators in Banach spaces*, to appear.