数理解析研究所講究録 1365 巻 2004 年 185-194

Strong Convergence Theorems by the Hybrid Method in Hilbert Spaces

(ヒルベルト空間におけるハイブリット法による強収束定理)

Kazuhide Nakajo (中條一秀)*, Kazuya Shimoji (下地一也)†
and Wataru Takahashi (高橋渉)‡

*‡Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology
and †University of the Ryukyus
(東京工業大学大学院情報理工学研究科，琉球大学理学部)

1 はじめに

H を実ヒルベルト空間とし、内積を $(\cdot,\cdot)$ で、ノルムを $\|\cdot\|$ で表すものとする。C_i $(i=1,2,\cdots,r)$ を H の空でない閉凸部分集合として、$\cap_{i=1}^{r}C_i \neq \emptyset$ を満たしているものとする。Bregman [3] は次の cyclic projections による点列 $\{x_n\}$ を考えた。$x_0=x\in H, x_1=P_{C_1}(x), x_2=P_{C_2}(x_1), x_3=P_{C_3}(x_2),\cdots,x_r=P_{C_r}(x_{r-1}), x_{r+1}=P_{C_1}(x_r), x_{r+2}=P_{C_2}(x_{r+1}),$ $\cdots$。但し、P_{C_i} $(i=1,2,\cdots,r)$ を C_i 上への距離射影とする。この時、彼は点列 $\{x_n\}$ が $\cap_{i=1}^{r}C_i$ のある元に弱収束することを示した。一方、Haugazeau [4] は、$\cap_{i=1}^{r}C_i$ の元に強収束させる点列を作る為に次のハイブリット法を提案した。

$$\begin{cases} x_0 = x \in H, \\ y_n = P_{C_{n(\mathrm{mod}\, r)+1}}(x_n), \\ C_n = \{z\in H \mid (x_n-y_n, y_n-z)\geq 0\}, \\ Q_n = \{z\in H \mid (x_n-z, x_0-x_n)\geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n\cap Q_n}(x_0) \qquad (n=0,1,2,\cdots). \end{cases} \tag{1}$$

そして彼はこの点列 $\{x_n\}$ が $P_C(x_0)$ に強収束することを証明した。ただし、$C=\cap_{i=1}^{r}C_i$ とする。このハイブリット法は、Solodov と Svaiter [11] によって極大単調作用素の 0 元への強収束に応用され、その結果を拡張したのが Bauschke と Combettes [2] である。彼らは、次の結果を示した：$\{T_0,T_1,T_2,\cdots\}$ を H から H への写像列とし、次の条件を満たすものとする。(i) $F:=\cap_{n=0}^{\infty}F(T_n)\neq\emptyset$; (ii) 全ての $n=0,1,2,\cdots$, $x\in H$, $z\in F(T_n)$ に

対して、$(x - T_n x, T_n x - z) \geq 0$ が成立する。但し、$F(T_n)$ は、T_n の不動点集合を表すものとする; (iii) (coherent) $\sum_{n=0}^{\infty} \|z_{n+1} - z_n\|^2 < \infty$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \|z_n - T_n z_n\|^2 < \infty$ を満たす H の有界点列 $\{z_n\}$ に対して、$\omega_w(z_n) \subset F$ が成立する。但し、$\omega_w(z_n)$ は、$\{z_n\}$ の弱収積点全体から成る集合を表すものとする。そして、次のハイブリット法による点列 $\{x_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} x_0 = x \in H\,, \\ y_n = T_n x_n\,, \\ C_n = \{z \in H \,|\, (x_n - y_n, y_n - z) \geq 0\}\,, \\ Q_n = \{z \in H \,|\, (x_n - z, x_0 - x_n) \geq 0\}\,, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases} \tag{2}$$

この時、$\{x_n\}$ は $P_F(x_0)$ に強収束する。

一方、Nakajo と Takahashi [7] は、C を H の空でない閉凸部分集合として、不動点を持つ C から C への nonexpansive 写像 T に対して、次のハイブリット法 (C_n の作り方が、(1),(2) と異なる) による点列 $\{x_n\}$ を考えた。

$$\begin{cases} x_0 = x \in C\,, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n\,, \\ C_n = \{z \in C \,|\, \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}\,, \\ Q_n = \{z \in C \,|\, (x_n - z, x_0 - x_n) \geq 0\}\,, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0) \;\; (n = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases} \tag{3}$$

但し、ある正数 $a \in [0, 1)$ に対して、$\{\alpha_n\} \subset [0, a]$ を満たすものとする。そして、$\{x_n\}$ が $P_{F(T)}(x_0)$ に強収束する事を示した。その後、Nakajo と Takahashi [8]、Atsushiba と Takahashi [1]、Kikkawa と Takahashi [6]、Iiduka, Takahashi と Toyoda [5] らによつて、(3) の形のハイブリット法による強収束の研究が進められた。そこで、本論文ではこれらハイブリット法による強収束定理を統一的に扱い、それら全てを拡張するような結果を得た。

2 準備

C を H の空でない閉凸部分集合とし、T を C から C への写像とする。すべての $x, y \in C$ に対して、$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(I - T)x - (I - T)y\|^2$ が成り立つとき、T は firmly nonexpansive であると言う。但し、I は、恒等写像とする。また、すべての $x, y \in C$ に対して、$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つとき、T は nonexpansive であると言う。Firmly nonexpansive 写像は、nonexpansive 写像である。距離射影は、firmly nonexpansive である事が知られている。また、nonexpansive 写像の不動点集合は閉凸集合である事が知られている ([12] を参照)。

次に A を H から 2^H への作用素とする。任意の $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$ に対して、$(x_1 -$

$x_2, y_1 - y_2) \geq 0$ が成り立つ時に、A は単調であると言う。単調作用素 A は、どんな他の単調作用素のグラフにも真にそのグラフが含まれない時に極大であると言い、単調作用素 A が極大である事は、任意の正数 λ に対して、$I + \lambda A$ の値域 $R(I + \lambda A) = H$ が成り立つ事と同値である事が知られている。また、極大単調作用素 A に対して、$A^{-1}0$ が閉凸集合である事も知られている。単調作用素 A と任意の正数 λ に対して、写像 $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ (定義域が $R(I + \lambda A)$ で、値域が A の定義域 $D(A)$) を定義する事が出来る。この J_λ を A のレゾルベントと呼び、さらに、吉田近似 A_λ は $A_\lambda = (I - J_\lambda)/\lambda$ で定義される (詳しくは、[12, 13] を参照せよ)。次は、単調作用素のレゾルベントについての性質である。

補助定理 2.1 単調作用素 $A : H \longrightarrow 2^H$ と正数 λ に対して、次の (i),(ii),(iii),(iv) が成立する。
(i) $F(J_\lambda) = A^{-1}0;$
(ii) $\|J_\lambda x - J_\lambda y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(I - J_\lambda)x - (I - J_\lambda)y\|^2 \quad (\forall x, y \in R(I + \lambda A));$
(iii) $(J_\lambda x, A_\lambda x) \in A \quad (\forall x \in R(I + \lambda A));$
(iv) $\|A_\lambda x\| \leq |Ax| \quad (\forall x \in D(A) \cap R(I + \lambda A)).$ 　但し、$|Ax| = \inf\{\|z\| \mid z \in Ax\}$ である。

次に、C を H の空でない閉凸部分集合とし、C から C への写像族 $\mathcal{S} = \{T(s) \mid 0 \leq s < \infty\}$ が次の (i),(ii),(iii),(iv) を満たすとき、C 上の one-parameter nonexpansive semigroup であると言う。

(i) $T(0)x = x \ (\forall x \in C)$;

(ii) $T(s + t) = T(s)T(t) \ (\forall s, t \geq 0)$;

(iii) $\|T(s)x - T(s)y\| \leq \|x - y\| \ (\forall s \geq 0,\ x, y \in C)$;

(iv) $s \longmapsto T(s)x$ は連続である $(\forall x \in C)$。

$\mathcal{S}$ の共通不動点集合を $F(\mathcal{S})$ で表すと、$F(\mathcal{S})$ は閉凸集合である事が知られている。次は、one-parameter nonexpansive semigroup についての Shimizu と Takahashi [10] によって証明された結果である。

補助定理 2.2 *C を H の空でない有界閉凸部分集合とし、$\mathcal{S} = \{T(s) \mid 0 \leq s < \infty\}$ を C 上の one-parameter nonexpansive semigroup とする。この時、任意の正数 h に対して、次が成立する。*

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{x \in C} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x\, ds - T(h) \left(\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x\, ds \right) \right\| = 0\,.$$

3 強収束定理

C を H の空でない閉凸部分集合とし、$\{T_n\}$ を共通不動点が空でない C から C への写像族で次を満たすものとする。$\{a_n\} \subset [0, \infty)$ が存在して、すべての $n = 0, 1, 2, \cdots,\ x \in C,$

$z \in F(T_n)$ に対して、

$$\|T_n x - z\|^2 \le \|x - z\|^2 - a_n\|(I - T_n)x\|^2 \tag{4}$$

が成り立つ。この時、$\cap_{n=0}^{\infty} F(T_n)$ は、空でない閉凸集合である事が知られている。そして、ハイブリット法による点列 $\{x_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} x_0 = x \in C\,, \\ y_n = T_n P_C(x_n + \varepsilon_n)\,, \\ C_n = \{z \in C \mid \|y_n - z\|^2 \le \|x_n + \varepsilon_n - z\|^2 - a_n\|P_C(x_n + \varepsilon_n) - y_n\|^2\}\,, \\ Q_n = \{z \in C \mid (x_n - z, x_0 - x_n) \ge 0\}\,, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0) \;\; (n = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases} \tag{5}$$

但し、$\{\varepsilon_n\} \subset H$ であるものとする。この時、次の２つの結果を得た。

定理 3.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \|z_{n+1} - z_n\|^2 < \infty$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \|z_n - T_n z_n\|^2 < \infty$ を満たす C のどんな有界点列 $\{z_n\}$ に対しても、$\omega_w(z_n) \subset F$ が常に成り立つとし、そして、$\sum_{n=0}^{\infty} \|\varepsilon_n\|^2 < \infty$ が成り立つとする。この時、(5) によって生成された点列 $\{x_n\}$ は $z_0 = P_F(x_0)$ に強収束する。但し、$F = \cap_{n=0}^{\infty} F(T_n)$ とする。

証明：C_n が閉集合で、Q_n が閉凸集合であることは明らかであり、C_n が凸集合である事は、

$$\begin{aligned} &\|y_n - z\|^2 \le \|x_n + \varepsilon_n - z\|^2 - a_n\|P_C(x_n + \varepsilon_n) - y_n\|^2 \\ &\iff \|y_n - (x_n + \varepsilon_n)\|^2 + a_n\|P_C(x_n + \varepsilon_n) - y_n\|^2 \\ &\qquad\qquad + 2(y_n - (x_n + \varepsilon_n), x_n + \varepsilon_n - z) \le 0 \end{aligned}$$

よりわかる。よって、$C_n \cap Q_n$ は閉凸集合である。次に、$u \in F$ として、

$$\begin{aligned} \|y_n - u\|^2 &= \|T_n P_C(x_n + \varepsilon_n) - u\|^2 \\ &\le \|P_C(x_n + \varepsilon_n) - u\|^2 - a_n\|(I - T_n)P_C(x_n + \varepsilon_n)\|^2 \\ &\le \|(x_n + \varepsilon_n) - u\|^2 - a_n\|P_C(x_n + \varepsilon_n) - y_n\|^2 \end{aligned}$$

より、$u \in C_n$ とわかり、$F \subset C_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を得る。そこで、$\{x_n\}$ が定義できて、$F \subset C_n \cap Q_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ が成り立つ事を、帰納法によって以下に示す。$x_0 = x \in C$ で、$Q_0 = C$ より、$F \subset C_0 = C_0 \cap Q_0$ がわかる。ある 0 以上の整数 k に対して、$x_k \in C$ が定義でき、$F \subset C_k \cap Q_k$ であると仮定すると、$C_k \cap Q_k$ の元で、$x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k}(x_0)$ となるものが唯一存在し、全ての $z \in C_k \cap Q_k$ に対して、$(x_0 - x_{k+1}, x_{k+1} - z) \ge 0$ を満たす。これより、$F \subset Q_{k+1}$ を得、$F \subset C_{k+1} \cap Q_{k+1}$ が成り立つ。

次に、$x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0)$, $z_0 = P_F(x_0)$, $F \subset C_n \cap Q_n$ より、

$$\|x_{n+1} - x_0\| \le \|z_0 - x_0\| \;\; (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6}$$

が成り立ち、$\{x_n\}$ が有界であることがわかる。更に、

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\|^2 &= \|(x_{n+1}-x_0)+(x_0-x_n)\|^2\\ &= \|x_{n+1}-x_0\|^2+2(x_{n+1}-x_0,x_0-x_n)+\|x_0-x_n\|^2\\ &= \|x_{n+1}-x_0\|^2-\|x_n-x_0\|^2+2(x_{n+1}-x_n,x_0-x_n)\\ &\leq \|x_{n+1}-x_0\|^2-\|x_n-x_0\|^2\ (n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}$$

より、

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\| \tag{7}$$

の存在と

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|x_{n+1}-x_n\|^2<\infty \tag{8}$$

を得る。そして、

$$\begin{aligned}&\|P_C(x_n+\varepsilon_n)-y_n\|^2\\ &\leq \|x_n+\varepsilon_n-y_n\|^2\leq(\|x_n+\varepsilon_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-y_n\|)^2\\ &\leq 2\|x_n+\varepsilon_n-x_{n+1}\|^2+2\|x_{n+1}-y_n\|^2\\ &\leq 2\|x_n+\varepsilon_n-x_{n+1}\|^2+2\|x_n+\varepsilon_n-x_{n+1}\|^2-2a_n\|P_C(x_n+\varepsilon_n)-y_n\|^2\\ &\leq 4\|x_n+\varepsilon_n-x_{n+1}\|^2\\ &\leq 8(\|x_{n+1}-x_n\|^2+\|\varepsilon_n\|^2)\ (n=0,1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{9}$$

より、$\sum_{n=0}^{\infty}\|P_C(x_n+\varepsilon_n)-y_n\|^2<\infty$ が成り立つ。ここで、$z_n=P_C(x_n+\varepsilon_n)$ とすると、$\sum_{n=0}^{\infty}\|z_n-T_nz_n\|^2<\infty$ が得られ、更に、

$$\begin{aligned}\|z_n-z_{n+1}\|^2 &\leq \|(x_n+\varepsilon_n)-(x_{n+1}+\varepsilon_{n+1})\|^2\\ &\leq 3\|x_n-x_{n+1}\|^2+3\|\varepsilon_n\|^2+3\|\varepsilon_{n+1}\|^2\ (n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}$$

より、$\sum_{n=0}^{\infty}\|z_n-z_{n+1}\|^2<\infty$ が成り立つ。よって、仮定より、$\omega_w(z_n)\subset F$ となる。また $\|x_n-z_n\|\leq\|\varepsilon_n\|(n=0,1,2,\cdots)$ より、

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=0$$

が成り立つので、$\omega_w(x_n)\subset F$ となる。続いて、$\{x_n\}$ の部分点列 $\{x_{n_i}\}$ が $w_1\in F$ に弱収束すると仮定すると、(6)、(7) とノルムの弱下半連続性から、

$$\|x_0-z_0\|\leq\|x_0-w_1\|\leq\lim_{i\to\infty}\|x_0-x_{n_i}\|\leq\|x_0-z_0\|$$

を得る。これより、

$$\lim_{i\to\infty}\|x_{n_i}-x_0\|=\|x_0-w_1\|=\|x_0-z_0\|$$

となり、$\{x_{n_i}\}$ が z_0 に強収束することがわかる。よって、$\{x_n\}$ が $z_0=P_F(x_0)$ に強収束することが証明された。 □

定理 3.2 $\lim_{n\to\infty}\|z_n - T_n z_n\| = 0$ を満たす C のどんな有界点列 $\{z_n\}$ に対しても、$\omega_w(z_n) \subset F$ が常に成り立つとし、そして、$\lim_{n\to\infty}\|\varepsilon_n\| = 0$ が成り立つとする。この時、(5) によって生成された点列 $\{x_n\}$ は $z_0 = P_F(x_0)$ に強収束する。但し、$F = \cap_{n=0}^{\infty} F(T_n)$ とする。

証明：定理 3.1 と同様にして、$C_n \cap Q_n$ は閉凸集合で、$F \subset C_n \cap Q_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ であり、(6)、(7)、(8)、(9) が成り立つ。ここで、$z_n = P_C(x_n + \varepsilon_n)$ とすると、$\{z_n\}$ は有界であり、(8)、(9) より $\lim_{n\to\infty}\|z_n - T_n z_n\| = 0$ を得る。よって、$\omega_w(z_n) \subset F$ となり、更に、定理 3.1 と同様にして $\{x_n\}$ が $z_0 = P_F(x_0)$ に強収束することがわかる。 □

4 系

次の結果は、Bauschke と Combettes [2] によるものである。

系 4.1 $\{T_n\}$ を H から H への写像列とし、次の条件を満たすものとする。
(I) $F := \cap_{n=0}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$; *(II)* 全ての $n = 0, 1, 2, \cdots$, $x \in H$, $z \in F(T_n)$ に対して、$(x - T_n x, T_n x - z) \geq 0$ が成立する; *(III)* $\sum_{n=0}^{\infty}\|z_{n+1} - z_n\|^2 < \infty$ と $\sum_{n=0}^{\infty}\|z_n - T_n z_n\|^2 < \infty$ を満たす H の有界点列 $\{z_n\}$ に対して、$\omega_w(z_n) \subset F$ が成立する。
この時、*(2)* によって生成される点列 $\{x_n\}$ は、$P_F(x_0)$ に強収束する。

証明：定理 3.1 において、$C = H$, $a_n = 1$, $\varepsilon_n = 0$ とする。$n = 0, 1, 2, \cdots$, $x \in H$, $z \in F(T_n)$ に対して、

$$\|T_n x - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|x - T_n x\|^2 \Longleftrightarrow (x - T_n x, T_n x - z) \geq 0$$

であり、更に、$C_n = \{z \in H \mid (x_n - y_n, y_n - z) \geq 0\}$ となる。故に、定理 3.1 より、$\{x_n\}$ は、$P_F(x_0)$ に強収束する。 □

次は、Solodov と Svaiter [11] による結果である。

系 4.2 $A : H \longrightarrow 2^H$ を $A^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たす極大単調作用素とし、$\{x_n\}$ を次によって生成される点列とする。

$$\begin{cases} x_0 = x \in H, \\ y_n = J_{\lambda_n}(x_n + \varepsilon_n), \\ C_n = \{z \in H \mid (x_n - y_n + \varepsilon_n, y_n - z) \geq 0\}, \\ Q_n = \{z \in H \mid (x_n - z, x_0 - x_n) \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

但し、$\{\lambda_n\} \subset (0, \infty)$、$J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n A)^{-1}$、$\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0$、$\lim_{n\to\infty}\|\varepsilon_n\| = 0$ とする。この時、$\{x_n\}$ は、$P_{A^{-1}0}(x_0)$ に強収束する。

証明：定理3.2において、$C=H$、$T_n=J_{\lambda_n}$ とする。補助定理2.1(i)、(ii) より、$F(T_n)=A^{-1}0$、$a_n=1$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を得る。そこで、$C_n=\{z\in H\,|\,(x_n-y_n+\varepsilon_n, y_n-z)\geq 0\}$ となる。更に、全ての m、$n=0,1,2,\cdots$、$x\in H$ に対して、補助定理2.1(iii)、(iv) より、

$$\begin{aligned}\|(I-T_m)T_nx\| &= \|(I-J_{\lambda_m})J_{\lambda_n}x\| = \lambda_m\|A_{\lambda_m}J_{\lambda_n}x\| \leq \lambda_m|AJ_{\lambda_n}x| \\ &\leq \lambda_m\|A_{\lambda_n}x\| = \frac{\lambda_m}{\lambda_n}\|(I-J_{\lambda_n})x\| = \frac{\lambda_m}{\lambda_n}\|(I-T_n)x\|\end{aligned}$$

を得る。H の有界点列 $\{z_n\}$ が、$\lim_{n\to\infty}\|z_n-T_nz_n\|=0$ を満たすとする。この時、全ての m、$n=0,1,2,\cdots$ に対して、

$$\begin{aligned}\|z_n-T_mz_n\| &\leq \|z_n-T_nz_n\|+\|T_nz_n-T_mT_nz_n\|+\|T_mT_nz_n-T_mz_n\| \\ &\leq 2\|z_n-T_nz_n\|+\frac{\lambda_m}{\lambda_n}\|(I-T_n)z_n\| = (2+\frac{\lambda_m}{\lambda_n})\|z_n-T_nz_n\|\end{aligned}$$

が成り立ち、

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n-T_mz_n\|=0 \ (m=0,1,2,\cdots)$$

を得る。よって、Opial 条件 [9] より、$\omega_w(z_n)\subset A^{-1}0$ となる。故に、定理3.2より、$\{x_n\}$ は $z_0=P_{A^{-1}0}(x_0)$ に強収束する。 □

次の結果は、Nakajo と Takahashi [7] によって証明されたものである。

系 4.3 $A:H\longrightarrow 2^H$ を $A^{-1}0\neq\emptyset$ を満たす極大単調作用素とし、$\{x_n\}$ を次によって生成される点列とする。

$$\begin{cases} x_0=x\in H\,, \\ y_n=J_{\lambda_n}(x_n+\varepsilon_n)\,, \\ C_n=\{z\in H\,|\,\|y_n-z\|\leq\|x_n+\varepsilon_n-z\|\}\,, \\ Q_n=\{z\in H\,|\,(x_n-z,x_0-x_n)\geq 0\}\,, \\ x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}(x_0) \ \ (n=0,1,2,\cdots). \end{cases}$$

但し、$\{\lambda_n\}\subset(0,\infty)$、$J_{\lambda_n}=(I+\lambda_nA)^{-1}$、$\liminf_{n\to\infty}\lambda_n>0$、$\lim_{n\to\infty}\|\varepsilon_n\|=0$ とする。この時、$\{x_n\}$ は、$P_{A^{-1}0}(x_0)$ に強収束する。

証明：定理3.2において、$C=H$、$T_n=J_{\lambda_n}$ とする。補助定理2.1(i)、(ii) より、$F(T_n)=A^{-1}0$ $(n=0,1,2,\cdots)$ と $a_n=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を得る。そこで、

$$C_n=\{z\in H\,|\,\|y_n-z\|\leq\|x_n+\varepsilon_n-z\|\}$$

となる。あとは、系4.2と同様に結果を得る。 □

次も、Nakajo と Takahashi [7] による結果である。

系 4.4 C を H の空でない閉凸部分集合とし、T を C から C への *nonexpansive* 写像で、不動点集合 $F(T)$ が空でないものとする。そして、点列 $\{x_n\}$ を次により生成されるものとする。

$$\begin{cases} x_0 = x \in C\,, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n\,, \\ C_n = \{z \in C \,|\, \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}\,, \\ Q_n = \{z \in C \,|\, (x_n - z, x_0 - x_n) \ge 0\}\,, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0) \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

但し、ある正数 $a \in [0,1)$ に対して、$\{\alpha_n\} \subset [0,a]$ を満たすものとする。この時、$\{x_n\}$ が $P_{F(T)}(x_0)$ に強収束する。

証明：定理 3.1 又は定理 3.2 において、$T_n = \alpha_n I + (1-\alpha_n)T$、$\varepsilon_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ とすると、$F(T_n) = F(T)$ と $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を得る。そこで、

$$C_n = \{z \in C \,|\, \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}$$

となる。次に、$\{z_n\}$ を $\lim_{n\to\infty} \|z_n - T_n z_n\| = 0$ を満たす C の有界点列とする。

$$(1-a)\|z_n - Tz_n\| \le (1-\alpha_n)\|z_n - Tz_n\| = \|z_n - T_n z_n\| \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

より、$\lim_{n\to\infty} \|z_n - Tz_n\| = 0$ を得る。よって、Opial 条件より、$\omega_w(z_n) \subset F(T)$ となる。故に、定理 3.1 又は定理 3.2 より、$\{x_n\}$ が $P_{F(T)}(x_0)$ に強収束する。 □

次は、nonexpansive semigroup についての Nakajo と Takahashi [7] による結果である。

系 4.5 C を H の空でない閉凸部分集合とし、写像族 $\mathcal{S} = \{T(s) \,|\, 0 \le s < \infty\}$ を共通不動点集合 $F(\mathcal{S})$ が空でない C 上の *one-parameter nonexpansive semigroup* とする。そして、点列 $\{x_n\}$ は次によって生成されるものとする。

$$\begin{cases} x_0 = x \in C\,, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\dfrac{1}{t_n}\displaystyle\int_0^{t_n} T(s)x_n\,ds\,, \\ C_n = \{z \in C \,|\, \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}\,, \\ Q_n = \{z \in C \,|\, (x_n - z, x_0 - x_n) \ge 0\}\,, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0) \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

但し、ある正数 $a \in [0,1)$ に対して、$\{\alpha_n\} \subset [0,a]$ を満たし、$\{t_n\} \subset (0,\infty)$ は、$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ を満たすものとする。この時、$\{x_n\}$ は $z_0 = P_{F(\mathcal{S})}(x_0)$ に強収束する。

証明：定理 3.1 又は定理 3.2 において、

$$T_n x = \alpha_n x + (1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\,ds \ (\forall x \in C),$$

$\varepsilon_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ とすると、$\cap_{n=0}^{\infty} F(T_n) = F(\mathcal{S})$, $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を得る。そこで、$C_n = \{z \in C \mid \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}$ となる。次に、$\{z_n\}$ を $\lim_{n\to\infty} \|z_n - T_n z_n\| = 0$ を満たす C の有界点列とする。まず、全ての $n = 1, 2, \cdots$ に対して、

$$(1-a)\left\| z_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n\,ds \right\| \leq (1-\alpha_n)\left\| z_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n\,ds \right\| = \|z_n - T_n z_n\|$$

が成り立ち、これより、

$$\lim_{n\to\infty}\left\| z_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n\,ds \right\| = 0$$

を得る。そして、全ての $h \geq 0$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\|z_n - T(h)z_n\| \\
\leq\ & \left\| z_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n\,ds \right\| + \left\| \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n\,ds - T(h)\Big(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n\,ds\Big) \right\| \\
&\quad + \left\| T(h)z_n - T(h)\Big(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n\,ds\Big) \right\| \\
\leq\ & 2\left\| z_n - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n\,ds \right\| + \left\| \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n\,ds - T(h)\Big(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)z_n\,ds\Big) \right\|
\end{aligned}$$

が成り立ち、補助定理2.2によって、

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - T(h)z_n\| = 0$$

を得る。Opial条件によって、$\omega_w(z_n) \subset F(\mathcal{S})$ となる。故に、定理3.1又は定理3.2より、$\{x_n\}$ は $z_0 = P_{F(\mathcal{S})}(x_0)$ に強収束する。 □

参考文献

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive semigroups by a hybrid method*, J. Nonlinear Convex Anal., 3(2002), 231-242.

[2] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *A weak-to-strong convergence principle for fejér-monotone methods in Hilbert spaces*, Math. Oper. Res., 26(2001), 248-264.

[3] L. M. Bregman, *The method of successive projection for finding a common point of convex sets*, Soviet Math. Dokl., 6(1965), 688-692.

[4] Y. Haugazeau, *Sur les inéquations variationnelles et la minimisation de fonctionnelles convexes*, Thèse, Universitè de Paris, Paris, France, 1968.

[5] H. Iiduka, W. Takahashi and M. Toyoda, *Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings*, to appear in Panamerican Math. J..

[6] M. Kikkawa and W. Takahashi, *Approximating fixed points of infinite nonexpansive mappings by the hybrid method*, J. Optim. Theory Appl., 117(2003), 93-101.

[7] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl., 279(2003), 372-379.

[8] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong and weak convergence theorems by an improved splitting method*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., 9(2002), 99-107.

[9] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 591-597.

[10] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., 211(1997), 71-83.

[11] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Programming Ser. A, 87(2000), 189-202.

[12] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[13] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000(Japanese).