数理解析研究所講究録 1365 巻 2004 年 208-211

ファジィ多目的配置問題について

弘前大学 理工学部　　金 正道 (Masamichi KON)
Faculty of Science and Technology, Hirosaki University

概要 ファジィ多目的配置問題の有効解, 狭義有効解および準有効解の性質を調べる。

1. 準備 連続型配置モデルは、一般に需要点とよばれる $\mathbb{R}^n$ の点の有限集合が与えられていると仮定される。需要点は既存の施設または顧客の位置をモデル化したものである。$\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \cdots, \ell$ を需要点とし、$I \equiv \{1, 2, \cdots, \ell\}$, $D \equiv \{\boldsymbol{d}_i\colon i \in I\}$ とする。このとき、新たに単一の施設を $\mathbb{R}^n$ に配置する問題は、単一施設配置問題とよばれる。各需要点から施設までの距離が小さいほど望ましいならば、それは各需要点から施設までの距離を含む関数の最小化問題として次のように定式化される。

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\gamma_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_1), \gamma_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_2), \cdots, \gamma_\ell(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_\ell))$$

ここで、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は施設の位置を表す変数である。f は通常 $\mathbb{R}^\ell$ から $\mathbb{R}$ への非減少凸関数または任意の $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^\ell$ に対して $f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$ となるような $\mathbb{R}^\ell$ から $\mathbb{R}^\ell$ への関数と仮定される。各 $i \in I$ に対して、$\gamma_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は通常ノルムやゲージと仮定され、$\gamma_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_i)$ は $\boldsymbol{d}_i$ から $\boldsymbol{x}$ までの距離を表す。本稿では、次のように定式化される**多目的配置問題 (multicriteria location problem, MCP)** を考える。

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}) \equiv (\gamma_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_1), \gamma_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_2), \cdots, \gamma_\ell(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}_\ell))^T$$

例えば、[3,5,6] において多目的配置問題が扱われている。以下、各 $i \in I$ に対して、B_i は原点をその内部に含む $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合とし、γ_i は単位球 B_i をもつゲージとする。

定義 1 ([4] 参照)　B は原点をその内部に含む $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合とする。B に対する**ゲージ (gauge)** $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\gamma(\boldsymbol{x}) \equiv \inf\{\lambda > 0 : \boldsymbol{x} \in \lambda B\}$$

と定義される。B はゲージ γ の**単位球 (unit ball)** とよばれ、ゲージ γ は単位球 B をもつゲージともよばれる。

定義 2

(i) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき MCP の**有効解 (efficient solution)** とよばれる。

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ が存在しないとき MCP の**狭義有効解**

(strictly efficient solution) とよばれる。

(iii) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき MCP の**準有効解** **(quasiefficient solution)** とよばれる。

MCP のすべての有効解, 狭義有効解および準有効解の集合をそれぞれ M_{E}, M_{SE} および M_{QE} とする。定義2より、$D \subset M_{\mathrm{SE}} \subset M_{\mathrm{E}} \subset M_{\mathrm{QE}}$ となる。

各需要点から施設までの距離が小さいほど望ましい場合は、MCP の定式化は自然である。施設のある位置に対して、ある 2 つの需要点から施設までの距離が等しいとしても、それぞれの需要点に関する満足度は異なるかもしれない。また、配置する施設が飛行場ならば、飛行場が需要点に近すぎると騒音のため望ましくないだろう。このような状況も考慮するために、需要点に関する施設の位置に対する満足度を表すメンバーシップ関数を与え、目的関数にメンバーシップ関数を含む最大化問題を考える。メンバーシップ関数 μ_i: $\mathbb{R} \to [0,1] \equiv \{y \in \mathbb{R}\colon 0 \le y \le 1\}$, $i \in I$ が与えられていると仮定する。施設の各位置 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と $i \in I$ に対して、$\mu_i(\gamma_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i))$ は需要点 $\boldsymbol{d}_i$ に関する施設の位置 $\boldsymbol{x}$ に対する満足度を表す。便宜上、$y < 0$ に対して $\mu_i(y) = 0, i \in I$ と仮定する。このとき、**ファジィ多目的配置問題 (fuzzy multicriteria location problem, FMCP)** は次のように定式化される。

$$(1) \qquad \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{FMCP}}(\boldsymbol{x}) \equiv (\mu_1(\gamma_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1)), \mu_2(\gamma_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_2)), \cdots, \mu_\ell(\gamma_\ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_\ell)))^T$$

各 $\boldsymbol{z} \equiv (z_1, z_2, \cdots, z_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$ に対して $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{z}) \equiv (\mu_1(z_1), \mu_2(z_2), \cdots, \mu_\ell(z_\ell))^T$ と定義する。このとき、$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{FMCP}}$ は $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\gamma}$ の合成関数として $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{FMCP}} = \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\gamma}$ と表せる。

定義3

(i) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{FMCP}}(\boldsymbol{x}) \ge \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{FMCP}}(\boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{FMCP}}(\boldsymbol{x}) \ne \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{FMCP}}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき FMCP の**有効解 (efficient solution)** とよばれる。

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{FMCP}}(\boldsymbol{x}) \ge \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{FMCP}}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{x}_0$ が存在しないとき FMCP の**狭義有効解 (strictly efficient solution)** とよばれる。

(iii) 点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{FMCP}}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{FMCP}}(\boldsymbol{x}_0)$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき FMCP の**準有効解 (quasiefficient solution)** とよばれる。

FMCP のすべての有効解, 狭義有効解および準有効解の集合をそれぞれ F_{E}, F_{SE} および F_{QE} とする。定義3より、$F_{\mathrm{SE}} \subset F_{\mathrm{E}} \subset F_{\mathrm{QE}}$ となる。

[7] において、$\mu_i, i \in I$ を $\mathbb{R}^n$ から $[0,1]$ への関数とし、(1) において $\mu_i(\gamma_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_i)), i \in I$ を $\mu_i(\boldsymbol{x}), i \in I$ で置き換えたファジィ多目的問題が扱われ、主に $\mu_i, i \in I$ が準凹または狭義準凹の場合について考えられている。

本稿では、ファジィ多目的配置問題を扱い、主に $\mu_i, i \in I$ が準凹または狭義準凹の場合を考える。そして、F_{E}, F_{SE} および F_{QE} の性質を M_{E}, M_{SE} および M_{QE} を用いて調べる。

2. FMCP の有効解の性質 本節では、F_{E}, F_{SE} および F_{QE} の性質を M_{E}, M_{SE} および M_{QE} を用いて調べる。

まず、用語と記号の混乱を避けるために基本的な定義を与える。

定義4 $X \subset \mathbb{R}^n$ を空でない凸集合とし、f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への関数とする。
(i) 任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$, $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ と $\lambda \in (0,1) \equiv \{y \in \mathbb{R}\colon\ 0 < y < 1\}$ に対して

$$f(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \geq \min\{f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2)\}$$

となるとき f は X 上**準凹 (quasiconcave)** であるという。

(ii) 任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$, $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ と $\lambda \in (0,1)$ に対して

$$f(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) > \min\{f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2)\}$$

となるとき f は X 上**狭義準凹 (strictly quasiconcave)** であるという。

$\mathbb{R}^n$ から $[0,1]$ への関数 μ に対して $\mathrm{supp}(\mu) \equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mu(\boldsymbol{x}) > 0\}$ は μ の**台 (support)** とよばれる。

補題1 μ を $\mathbb{R}$ から $[0,1]$ へのメンバーシップ関数とし、ある $\overline{x} \in \mathbb{R}$ に対して $\mu(\overline{x}) = 1$ であると仮定する。
(i) μ が $\mathbb{R}$ 上準凹であるならば μ は $(-\infty, \overline{x}] \equiv \{x \in \mathbb{R}\colon\ x \leq \overline{x}\}$ 上非減少かつ $[\overline{x}, +\infty) \equiv \{x \in \mathbb{R}\colon\ x \geq \overline{x}\}$ 上非増加になる。

(ii) μ が $\mathbb{R}$ 上狭義準凹であるならば μ は $(-\infty, \overline{x}]$ 上狭義単調増加かつ $[\overline{x}, +\infty)$ 上狭義単調減少になる。

(iii) $\mathrm{supp}(\mu)$ が凸で μ が $\mathrm{supp}(\mu)$ 上狭義準凹であるならば μ は $\mathrm{supp}(\mu) \cap (-\infty, \overline{x}]$ 上狭義単調増加かつ $\mathrm{supp}(\mu) \cap [\overline{x}, +\infty)$ 上狭義単調減少になる。

(iv) $\mathrm{supp}(\mu)$ が凸で μ が $\mathrm{supp}(\mu)$ 上準凹であるならば μ は $(-\infty, \overline{x}]$ 上非減少かつ $[\overline{x}, +\infty)$ 上非増加になる。

次に、FMCP の有効解, 狭義有効解および準有効解の性質を与える命題をいくつか述べる。

命題1 各 $i \in I$ に対して、μ_i が $[0, +\infty)$ 上狭義準凹で $\mu_i(0) = 1$ ならば

$$M_{\mathrm{E}} = F_{\mathrm{E}}, \qquad M_{\mathrm{SE}} = F_{\mathrm{SE}}, \qquad M_{\mathrm{QE}} = F_{\mathrm{QE}}$$

となる。

命題2 各 $i \in I$ に対して、$\mu_i(0) = 1$ であり、$\mathrm{supp}(\mu_i)$ は凸であり、μ_i は $\mathrm{supp}(\mu_i)$ 上狭義準凹であり

$$\boldsymbol{x}_0 \in \bigcap_{i \in I} [\{\boldsymbol{d}_i\} + \mathrm{supp}(\mu_i \circ \gamma_i)]$$

ならば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_0 \in M_{\mathrm{E}} &\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x}_0 \in F_{\mathrm{E}} \\ \boldsymbol{x}_0 \in M_{\mathrm{SE}} &\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x}_0 \in F_{\mathrm{SE}} \\ \boldsymbol{x}_0 \in M_{\mathrm{QE}} &\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x}_0 \in F_{\mathrm{QE}} \end{aligned}$$

となる。

命題3 ([3] の Corollary 4.1 参照) $n=2$ であり、すべての $\gamma_i, i \in I$ が同一のノルムならば $M_{\mathrm{SE}} \subset \mathrm{co}D \subset M_{\mathrm{QE}}$ となる。ここで、$\mathrm{co}D$ は D の凸包である。

$n=1$ のときは、任意のゲージ $\gamma_i, i \in I$ に対して $M_{\mathrm{SE}} = M_{\mathrm{E}} = M_{\mathrm{QE}} = \mathrm{co}D$ となることに注意。

命題4 各 $i \in I$ に対して、$\mu_i(0) = 1$ であり、$\mathrm{supp}(\mu_i)$ は凸であり、μ_i は $\mathrm{supp}(\mu_i)$ 上準凹ならば $F_{\mathrm{SE}} \subset M_{\mathrm{SE}}, M_{\mathrm{QE}} \subset F_{\mathrm{QE}}$ となる。さらに、$n=2$ であり、すべての $\gamma_i, i \in I$ が同一のノルムならば $F_{\mathrm{SE}} \subset M_{\mathrm{SE}} \subset \mathrm{co}D \subset M_{\mathrm{QE}} \subset F_{\mathrm{QE}}$ となる。

命題5 各 $i \in I$ に対して、$\mu_i(0) = 1$ であり、$\mathrm{supp}(\mu_i)$ が凸であり、μ_i が $\mathrm{supp}(\mu_i)$ 上狭義準凹ならば $D \subset F_{\mathrm{SE}}$ となる。

$\mu_i(0) = 1, i \in I$ ならば $D \subset F_{\mathrm{QE}}$ となることに注意。

3. 結論 本稿では、ファジィ多目的配置問題を考え、ファジィ多目的配置問題の有効解, 狭義有効解および準有効解の性質を多目的配置問題の有効解, 狭義有効解および準有効解を用いて調べた。

参考文献

[1] M. Avriel, W. E. Diewert, S. Schaible and I. Zang, *Generalized concavity*, Plenum Press, N. Y., London, 1988.

[2] R. Bellmann and L. Zadeh, *Decision making in fuzzy environment*, Manage. Sci., **17**, 1970, 141-164.

[3] D. Durier and C. Michelot, *Sets of efficient points in a normed space*, J. Math. Anal. Appl., **117**, 1986, 506-528.

[4] J. -B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] M. Kon and S. Kushimoto, *On efficient solutions of multicriteria location problems with the block norm*, Scientiae Mathematicae, **2**, 1999, 245-254.

[6] T. Matsutomi and H. Ishii, *Fuzzy facility location problem with asymmetric rectilinear distance*(in Japanese), Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems, **8**, 1996, 57-64.

[7] J. Ramík and M. Vlach, *Pareto-optimality of compromise decisions*, Fuzzy Sets and Systems, **129**, 2002, 119-127.

[8] K. Tanaka, *Convex analysis and optimization theory*(in Japanese), Makino Syoten, Japan, 1994.