数理解析研究所講究録 1365 巻 2004 年 14-24

提携に制限のある協力ゲームにおける凸性の継承

大阪大学大学院 工学研究科 松井 知章 (Tomoaki Matsui)
大阪大学大学院 工学研究科 黒木 浩二郎 (Koujiro Kuroki)
大阪大学大学院 工学研究科 森谷 篤史 (Atsushi Moritani)
大阪大学大学院 工学研究科 巽 啓司 (Keiji Tatsumi)
大阪大学大学院 工学研究科 谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)
Graduate School of Engineering, Osaka Univ.

1 はじめに

近年，市場経済のグローバル化や IT 革命が進展する中で，経営戦略上重要な事業を持ち株会社のもとに整理統合する一方，コア事業に関連ないものは完全分離してしまうといった事業の選択と集中による経営効率の改善が進んでいる．また，企業間においても，提携，統合や合併といった企業再編が加速している．これらの状況を数理的に解析する手段として，ゲーム理論，特に協力ゲーム理論の有用性が高まっている．

従来の協力ゲーム (提携形ゲーム) では，その基礎となる提携として，プレイヤー集合の任意の部分集合が許容される，すなわち任意の提携が実現可能であると仮定することが多い [1]．しかしながら，実際には提携として許容されない部分集合が存在する．このような状況を分析し，より実社会に即したゲーム理論を構築するために，提携に制限のある協力ゲームの研究が進められている．Myerson は，ネットワークを用いて提携の実現可能性を表現し，それを基に与えられた提携形ゲームを修正することにより，プレイヤー間での合理的な利得配分の方法を考察した [2][3]．Bilbao らはさらに一般的に，許容される提携の集合を実現可能提携システム (Feasible Coalition System:FCS) と定義し，FCS に基づく制限ゲームを導入している [4][5]．この際，FCS の特別なクラスである分割システム (Partition System:PS) に対しては，制限ゲームを簡明に定義できることを示している．さらに，分割システムに条件を付加した交差システム (Intersecting System:IS) に対し，元のゲームの凸性が制限ゲームへと継承されることを証明した．

これまでの制限ゲームでは，各提携は実現可能であるか不可能であるかのどちらかであった．しかし，実社会では実現しやすい提携と実現しにくい提携というように，提携に実現可能性の程度を考える場合が存在する．然るに，今日ゲーム理論の研究において，提携に実現可能性の程度を考慮した取り扱いはほとんど考えられていない．よって，提携に実現可能性の程度を考慮した制限ゲームが必要になってくると思われる．

本研究では，提携の実現可能性の程度を数値化した提携の実現可能度を表現する関数 f を定義する．これまでの制限ゲームにおいて，提携 S が実現可能である場合を $f(S)=1$ とし，実現不可能である場合を $f(S)=0$ と考える．つまり，f を関数 $f:2^N\to\{0,1\}$ と表現する．そして，この値域を区間 $[0,1]$ に拡張することにより，提携に実現可能性の程度を考慮する．この提携の実現可能度 f を用いて，Bibao らによる実現可能提携システム

FCS を提携の実現可能度の程度を考慮した実現可能提携システム (graded feasible coalition system:GFCS) へと拡張し，通常の提携形ゲームから GFCS による制限ゲームを導入する．

また，この GFCS に従来の分割システムを特徴付ける条件の一般化を付加して得られる，提携の実現可能性の程度を考慮した分割システム (Graded Partition System:GPS) を定義する．さらに，GPS の特別なクラスとして，従来の交差システムの一般化である提携に実現可能性の程度を考慮した交差システム (Graded Intersecting System:GIS) を考え，GIS に対しては元のゲームの凸性が継承されることを示す．

2 GFCS による制限ゲーム

プレイヤー集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，譲渡可能効用を持つ提携形ゲームの特性関数を $v(\emptyset) = 0$ であるような実数値関数 $v : 2^N \to \mathbf{R}$ とする．また，提携 S は N の任意の部分集合とし，各提携 S には実現可能性の程度を数値化した $f(S)$(実現可能度： degree of feasibility) が付加されているものとする．Bilbao らの実現可能提携システムでは，提携 S が実現可能か否かのみ考えられていた．つまり，$f(S)$ は提携 S が実現可能であるときは 1 に，実現可能でないときは 0 としていた．GFCS ではこれを区間 $[0,1]$ に拡張する．以下，元のゲームの特性関数 v は優加法的であるとする．

定義 1 *GFCS* はプレイヤー集合 N と提携 $S \subseteq N$ の実現可能度 $f(S)$ を表わす関数 $f : 2^N \to [0,1]$ の組 (N, f) である．ただし，この $f(S)$ は以下の特性を満たすものとする．

$$f(\emptyset) = 1, f(\{i\}) = 1 \quad \forall i \in N \tag{1}$$

提携 S の実現可能度 $f(S)$ が実現可能レベルと呼ばれる定数 $h \in [0,1]$ 以上になる，つまり $f(S) \geq h$ を満たす提携 S のみ実現可能であると考えれば，h を 1 つ固定するごとに Bilbao らの実現可能提携システムが得られる．この実現可能レベル h 以上の実現可能な提携 S の集合を $F(h) = \{S \subseteq N | f(S) \geq h\}$ と表記する．また，S の部分集合の族 $\{T_k\}_{k \in K}$ は $T_k \cap T_{k'} = \emptyset (k, k' \in K, k \neq k')$ と $S = \bigcup_{k \in K} T_k$ を満たすとき，提携 S の分割であるという．そして，提携 $S \subseteq N$ の $F(h)$ に属する要素によるすべての分割の集合を $P_{F(h)}(S)$ とする．また，$F(h)$ に属する極大な提携 S の部分集合の族を $\Pi_{F(h)}(S)$ とする．

定義 2 (N, f) は *GFCS* で，(N, v) はゲームとする．実現可能レベル $h \in [0,1]$ が与えられたとき，f で制限されるゲーム (N, v_h^f) の特性関数 $v_h^f : 2^N \to \mathbf{R}$ は以下のように定義される．

$$v_h^f(S) = \max\{\sum_{j \in J} v(T_j) \ :\{T_j\}_{j \in J} \in P_{F(h)}(S)\}.$$

定義 2 で与えられた v_h^f と基本ゲームにおける $v(S)$ の間には当然，以下のような関係が成立する．

$$v_0^f(S) \ = \ v(S)$$

また，提携 S と GFCS(N,f) を固定し，特性関数 $v_h^f(S)$ を h の関数と見ると，以下の性質を満たす．提携 S が有限であるため，実現可能度 $f(S)$ の値を小さい順に並べたものを $h_0=0<h_1<\ldots<h_{l-1}<h_l=1$ とする．

定理 1 (N,f) は *GFCS* で，(N,v) はゲームとする．また，提携 $S\subseteq N$ とする．*GFCS* による制限ゲーム (N,v_h^f) の特性関数 $v_h^f(S)$ は実現可能レベル h に関して，左半連続で単調非増加な階段関数である．

証明 今，S,f を固定して考える．$h,h'\in[0,1],h>h'$ とすると，$F(h)$ の定義より，$F(h)\subseteq F(h')$ が成り立つ．従って，$P_{F(h)}(S)\subseteq P_{F(h')}(S)$ も同様に成り立つ．よって，定義2より $v_h^f(S)\leq v_{h'}^f(S)$ である．すなわち，$v_h^f(S)$ は h に関し単調非増加である．次に，$h_j<h_{j+1}$ となる h_j,h_{j+1} に対し，すべての $h\in(h_j,h_{j+1}]$ に対し，$P_{F(h)}(S)$ は明らかに同一であるから，区間 $(h_j,h_{j+1}]$ において $v_h^f(S)$ は定数となる．すなわち，$v_h^f(S)$ は h に関する左半連続な階段関数である． □

次に，実現可能度 f で制限された $v_h^f(S)$ を h に関して統合することを考える．ここでは以下の2通りで統合するものとする．

定義 3 (N,f) は *GFCS* で，(N,v) はゲームとする．特性関数 v を実現可能度 f の下で，実現可能レベル h に関して統合した特性関数 $\bar{v}^f,\hat{v}^f$ はそれぞれ次のように定義される．

- $\bar{v}^f(S)=\sum_{j=1}^{l}(h_j-h_{j-1})v_{h_j}^f(S)$
- $\hat{v}^f(S)=\frac{1}{\sum_{j=1}^{l}h_j}\sum_{j=1}^{l}h_jv_{h_j}^f(S)$

実現可能レベル h に関して統合した特性関数は上記のように定義された．このうち，特性関数 $\bar{v}^f$ は定理1を用いると，以下のように表わすことができる．

$$\bar{v}^f(S)=\sum_{j=1}^{l}(h_j-h_{j-1})v_{h_j}^f(S)=\int_0^1 v_h^f(S)dh$$

この実現可能レベル h に関して統合した特性関数 $\bar{v}^f,\hat{v}^f$ のうち，$\bar{v}^f$ については，実現可能レベル h に関して，同じ重みで統合がなされている．また，$\hat{v}^f$ については，実現可能レベル h に関して，重みを大きくし求めている．これは，h_j を実現確率と同様に扱い，FCS における $F(h_j)$ が確率 h_j で実現すると考えるのと同様である．ただし，確率とは異なり，$\sum_j h_j=1$ ではないため，これで割っている．以下に具体例を挙げる．

例 1 プレイヤー集合 $N=\{1,2,3\}$ とし，特性関数 v と実現可能度 f は以下のように表わされているものとする．

$$f(S)=\begin{cases}0.2 \text{ if } S=\{2,3\}\\ 0.5 \text{ if } S=\{1,3\},N\\ 0.8 \text{ if } S=\{1,2\}\\ 1 \quad \text{otherwise,}\end{cases}\qquad v(S)=\begin{cases}0 \;\text{ if } |S|\leq 1\\ 30 \text{ if } S=\{2,3\}\\ 48 \text{ if } S=\{1,3\}\\ 60 \text{ if } S=\{1,2\}\\ 72 \text{ if } S=N\end{cases}$$

定義3を用いて，$\bar{v}^f, \hat{v}^f$ をそれぞれ求めると以下のようになる．

$$\bar{v}^f(S)=\begin{cases}0 & \text{if } |S|\le 1\\ 6 & \text{if } S=\{2,3\}\\ 24 & \text{if } S=\{1,3\}\\ 48 & \text{if } S=\{1,2\}\\ 54 & \text{if } S=N\end{cases}\quad \hat{v}^f(S)=\begin{cases}0 & \text{if } |S|\le 1\\ 2.4 & \text{if } S=\{2,3\}\\ 13.44 & \text{if } S=\{1,3\}\\ 36 & \text{if } S=\{1,2\}\\ 39.36 & \text{if } S=N\end{cases}$$

$S=N$ における $\bar{v}^f, \hat{v}^f$ は以下のようなグラフの面積として表わされる．なお，グラフ中の数字は面積をとった回数を表わしている．

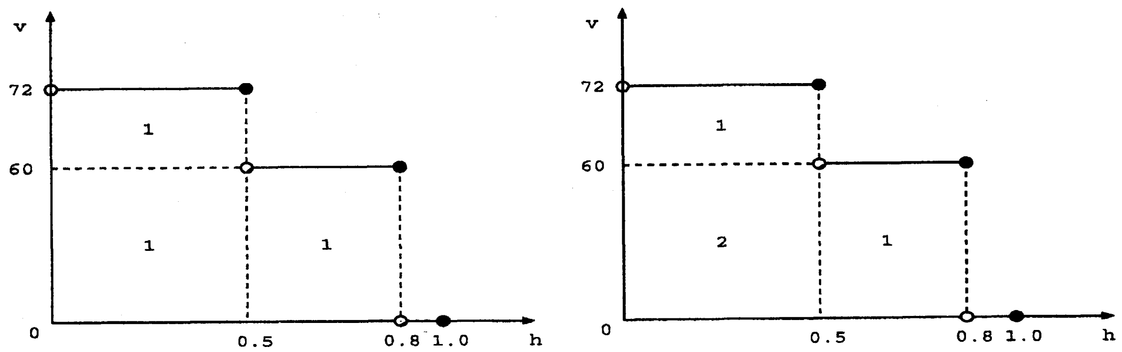

図 1: 左図:$\bar{v}^f(N)$, 右図:$\hat{v}^f(N)$ おけるグラフ

このグラフより，$\bar{v}^f(N)$ は実現可能レベル $h\in[0.1]$ に対して，面積を一回ずつ求めた和として表現されている．よって，$\bar{v}^f(N)$ は実現可能レベル h に関して，平均的に求めているといえる．また，$\hat{v}^f(N)$ は実現可能度 $f(\{1,2\})=0.8, v(\{1,2\})=60$ により，面積を二回求めているところが存在する．これより，$\hat{v}^f(N)$ は実現可能レベル h に関して，重みを大きくし求めているといえる．

次に，提携 S を固定した際の $\bar{v}^f(S), \hat{v}^f(S)$ の実現可能度 f に関する連続性について議論する．以下では，2つのGFCSを与える関数 f, f^* の距離を

$$||f-f^*|| = \max_{S\subseteq N}|f(S)-f^*(S)|$$

で与える．まず，$\bar{v}^f$ について以下のようなことがいえる．

命題 1 (N,f) は*GFCS*で，(N,v) はゲームとする．実現可能レベル h に関して統合した特性関数 $\bar{v}^f$ は f に関して連続である．

証明 $\bar{v}^f$ は f に関して連続であることを示す．すべての $S\subseteq N$ に対して，$f^*(S)$ の値を小さいものから順に並べたものを $h_1^*, h_2^*, \ldots, h_{2^n}^*$ とする．ただし，ここでは値の重複を許すものとし，$h_0^*=0$ とする．この一般的な部分を取り出す．値の重複も許すと

$$\ldots h_{j-1}^* < h_j^* = h_{j+1}^* = \ldots = h_{j+k}^* < h_{j+k+1}^* \cdots$$

となっている．今，f が f^* に十分近いものとすると，$f(S)$ の値を同様に並べたとき，上記に対応する部分は

$$\ldots h_{j-1} < h_j \leq h_{j+1} \leq \ldots \leq h_{j+k} < h_{j+k+1} \ldots$$

となる．つまり，h_{j-1} と h_j, h_{j+k} と h_{j+k+1} の間の大小関係は変化しない．さらに，$f \to f^*$ のとき，

$$h_{j+l} \to h_j^* = \ldots = h_{j+k}^* (l = 0, \ldots, k) \tag{2}$$

となることに注意する．また，定義3より，$\bar{v}^{f^*}, \bar{v}^f$ は以下のように表現される．

$$\begin{aligned}\bar{v}^{f^*}(S) &= \sum_{m=1}^{2^n} (h_m^* - h_{m-1}^*) v_{h_m^*}^{f^*}(S) \\ \bar{v}^f(S) &= \sum_{m=1}^{2^n} (h_m - h_{m-1}) v_{h_m}^f(S)\end{aligned}$$

であるが，上の和のうち h_{j-1} から h_{j+k} に関する部分を取り出すと，それぞれ

$$(h_j^* - h_{j-1}^*) v_{h_j^*}^{f^*}(S) \tag{3}$$

$$(h_j - h_{j-1}) v_{h_j}^f(S) + (h_{j+1} - h_j) v_{h_{j+1}}^f(S) + \ldots + (h_{j+k} - h_{j+k-1}) v_{h_{j+k}}^f(S) \tag{4}$$

となる．ここで，$F^*(h_j^*) = F(h_j)$ に注意すると，$v_{h_j^*}^{f^*}(S) = v_{h_j}^f(S)$ である．従って，式(2) の注意から，式(4) の値は式(3) に近づく．他の部分に関しても同じことがいえるので，$f \to f^*$ のとき，$\hat{v}^f(S) \to \hat{v}^{f^*}(S)$ となることが示された． □

次に，$\hat{v}^f$ について以下のようなことがいえる．

命題 2 (N, f) は $GFCS$ で，(N, v) はゲームとする．実現可能度 f^* が提携 S に対して，値 1 をとるのは式(1) の場合のみでかつ他の場合は相異なる値を持つとき，実現可能レベル h に関して統合した特性関数値 $\hat{v}^f(S)$ は f^* において，f に関して連続である．.

証明 実現可能度 f^* が提携 S に対して，命題の条件を満たすとき，$\hat{v}^f$ は f に関して連続であることを示す．すべての $S \subseteq N$ に対して，式(1) 以外の $f^*(S)$ の値を小さいものから順に並べたものを $h_1^*, h_2^*, \ldots, h_{l-1}^*$ とする．ただし，$h_0^* = 0, h_l^* = 1$ とする．f^* が提携 S に対して異なる値を持つため，

$$0 = h_0^* \leq h_1^* < h_2^* < \ldots < h_{l-1}^* < h_l^* = 1$$

となっている．今，f が f^* に十分近いものとすると，$f(S)$ の値を同様に並べたとき，$h_j < h_{j+1} (j = 0, \ldots, l-1)$ の大小関係は変化しないため，

$$0 = h_0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_{l-1} < h_l = 1$$

となる．$f \to f^*$ のとき，

$$h_j \to h_j^* \quad j = 1, \ldots, l \tag{5}$$

となることに注意する．また，定義3より，$\hat{v}^{f^*}, \hat{v}^f$ は以下のように表現される．

$$\hat{v}^{f^*}(S) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{l} h_j^*} \sum_{j=1}^{l} h_j^* v_{h_j^*}^{f^*}(S) \tag{6}$$

$$\hat{v}^{f}(S) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{l} h_j} \sum_{j=1}^{l} h_j v_{h_j}^{f}(S) \tag{7}$$

ここで，$F^*(h_j^*) = F(h_j)(j = 1, \ldots, l)$ に注意すると，$v_{h_j^*}^{f^*}(S) = v_{h_j}^{f}(S)$ である．従って，式(5)の注意から，式(7)の値は式(6)に近づく．よって，$f \to f^*$ のとき，$\hat{v}^f(S) \to \hat{v}^{f^*}(S)$ となることが示された． □

注意 1 上の命題で，$f^*(S)$ の値が1となるのは式(1)の場合で，他の場合は値がすべて相異なるという条件は本質的である．実際以下の例を見れば，一般的に実現可能レベル h に関して統合した特性関数 $\hat{v}^f$ における f に対する連続性が保証されないことは明らかである．なお，$f^*(S) = 0$ となる S が複数個存在しても命題が成り立つことは証明を少し変形すればよいので明らかである．

例 2 プレイヤー集合 $N = \{1, 2, 3, 4\}$ とし，十分小さい正の数 ε に対し，特性関数 v と実現可能度 f^ε, f^* は以下のように表わされているものとする．

$$f^\varepsilon(S) = \begin{cases} 0.5 - \varepsilon & \text{if } S = N \\ 0.5 + \varepsilon & \text{if } |S| = 3 \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad f^*(S) = \begin{cases} 0.5 & \text{if } S = N, |S| = 3 \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad v(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } |S| \le 1 \\ 20 & \text{if } |S| = 2 \\ 60 & \text{if } |S| = 3 \\ 72 & \text{if } S = N. \end{cases}$$

今，$f^\varepsilon \to f^*$，つまり $\varepsilon \to 0$ のとき，$\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{v}^f(S)$ と $\hat{v}^{f^*}(S)$ の値を比較し，$\hat{v}^f(S)$ は f に関して連続であるとは限らないことを示す．まず，$\hat{v}^{f^*}(S)$ は以下のようになる．

$$\hat{v}^{f^*}(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } |S| \le 1 \\ 20 & \text{if } |S| = 2 \\ 33.33 & \text{if } |S| = 3 \\ 49.33 & \text{if } S = N \end{cases}$$

次に，$\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{v}^{f^\varepsilon}(S)$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \hat{v}^{f^\varepsilon}(S) &= \begin{cases} 0 & \text{if } |S| \le 1 \\ 20 & \text{if } |S| = 2 \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(0.5-\varepsilon)\times 60 + (0.5+\varepsilon)\times 60 + 20}{(0.5-\varepsilon)+(0.5+\varepsilon)+1} & \text{if } |S| = 3 \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(0.5-\varepsilon)\times 72 + (0.5+\varepsilon)\times 60 + 20}{(0.5-\varepsilon)+(0.5+\varepsilon)+1} & \text{if } S = N \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } |S| \le 1 \\ 20 & \text{if } |S| = 2 \\ 40 & \text{if } |S| = 3 \\ 43 & \text{if } S = N \end{cases} \end{aligned}$$

これより，$\lim_{\varepsilon\to 0}\hat{v}^{f^{\varepsilon}}(S) \neq \hat{v}^{f^{*}}(S)$ である．すなわち，S を固定した場合の $\hat{v}^f(S)$ は f に関して連続であるとは限らない．

次に，優加法性について議論する．ゲームが優加法的である，つまり式

$$S,T \subseteq N, S\cap T=\emptyset \Longrightarrow v(S)+v(T) \leq v(S\cup T) \tag{8}$$

を満たしている．GFCS の下での制限ゲームは元ゲームに関わらず，優加法的である．

命題 3 (N,f) は *GFCS* で，(N,v) はゲームとする．実現可能度 f で制限される v_h^f を実現可能レベル h に関して統合した特性関数 $\bar{v}^f, \hat{v}^f$ は優加法的である．

証明 まず，v_h^f における優加法性について議論する．$S,T\subseteq N, S\cap T=\emptyset$ とする．$\{S_j\}_{j\in J}\in P_{F(h)}(S), \{T_k\}_{k\in K}\in P_{F(h)}(T)$ ならば，$\{S_j,T_k\}_{j\in J,k\in K}\in P_{F(h)}(S\cup T)$ である．これより，以下のような式が成立する．

$$\begin{aligned}
v_h^f(S\cup T) &= \max\{\sum_{l\in L} v(R_l) : \{R_l\}_{l\in L}\in P_{F(h)}(S\cup T)\}\\
&\geq \max\{\sum_{j\in J} v(S_j)+\sum_{k\in K} v(T_k) : \{S_j\}_{j\in J}\in P_{F(h)}(S), \{T_k\}_{k\in K}\in P_{F(h)}(T)\}\\
&= \max\{\sum_{j\in J} v(S_j) : \{S_j\}_{j\in J}\in P_{F(h)}(S)\}+\max\{\sum_{k\in K} v(T_k) : \{T_k\}_{k\in K}\in P_{F(h)}(T)\}\\
&= v_h^f(S)+v_h^f(T)
\end{aligned} \tag{9}$$

これより，v_h^f は優加法的である．まず，式 (9) より以下の式がいえる．

$$\begin{aligned}
\bar{v}^f(S)+\bar{v}^f(T) &= \int_0^1 v_h^f(S)dh+\int_0^1 v_h^f(T)dh\\
&= \int_0^1 \{v_h^f(S)+v_h^f(T)\}dh\\
&\leq \int_0^1 v_h^f(S\cup T)dh\\
&= \bar{v}^f(S\cup T)
\end{aligned}$$

よって，$\bar{v}^f$ は優加法的である．

次に，$\hat{v}^f$ が優加法的であることを証明する．

$$\begin{aligned}
\hat{v}^f(S)+\hat{v}^f(T) &= \frac{1}{\sum_j h_j}\sum_j h_j v_{h_j}^f(S)+\frac{1}{\sum_j h_j}\sum_j h_j v_{h_j}^f(T)\\
&= \frac{1}{\sum_j h_j}\{\sum_j h_j v_{h_j}^f(S)+\sum_j h_j v_{h_j}^f(T)\}\\
&= \frac{1}{\sum_j h_j}\sum_j h_j\{v_{h_j}^f(S)+v_{h_j}^f(T)\}\\
&\leq \frac{1}{\sum_j h_j}\sum_j h_j v_{h_j}^f(S\cup T)\\
&= \hat{v}^f(S\cup T)
\end{aligned}$$

よって，$\hat{v}^f$ は優加法的である． □

3 GPSによる制限ゲーム

GFCS(N,f) が与えられたとき，実現可能レベル h を固定すると得られる $(N,F(h))$ は FCSになる．この章では，$(N,F(h))$ がFCSの特殊なクラスである分割システム(PS)となる場合について論じる．まず，GFCSの定義より任意の $h\in[0,1]$ に対して，次式が成立することに注意する．

$$\emptyset\in F(h),\{i\}\in F(h)\quad\forall i\in N \tag{10}$$

定義 4 *GFCS*(N,f) は $S\cap T\neq\emptyset$ を満たす $S,T\subseteq N$ に対し，$f(S\cup T)\geq\min\{f(S),f(T)\}$ を満足するとき *GPS* であるといわれる．

このGPSと従来の分割システムの関係は以下のような命題で示すことができる．

命題 4 *GFCS*(N,f) が *GPS* になるための必要十分条件は任意の実現可能レベル $h\in[0,1]$ に対して，$(N,F(h))$ が通常の意味での分割システムになること，つまり式(10)に注意すれば，任意の h に対し，以下のような関係が成り立つことである．

$$S,T\in F(h),S\cap T\neq\emptyset\Longrightarrow S\cup T\in F(h)$$

証明 (N,f) を *GPS* とする．$h\in[0,1]$ とし，$S\cap T\neq\emptyset$ を満たす $S,T\subseteq N$ において，$S,T\in F(h)$ であると仮定する．これより，$f(S)\geq h,f(T)\geq h$ が成り立ち，よって *GPS* の定義から $f(S\cup T)\geq h$ である．よって，$S\cup T\in F(h)$ が成り立つ．

次に逆証明をする．任意の h に対して，$F(h)$ が分割システムであると仮定する．このとき，$S\cap T\neq\emptyset$ を満たす $S,T\subseteq N$ に対し，$f(S)\geq\min\{f(S),f(T)\},f(T)\geq\min\{f(S),f(T)\}$ より，$S,T\in F(\min\{f(S),f(T)\})$ であるから，$S\cup T\in F(\min\{f(S),f(T)\})$ である．よって，$f(S\cup T)\geq\min\{f(S),f(T)\}$ が成立する． □

命題4より，任意の実現可能レベル $h\in[0,1]$ に対して，$(N,F(h))$ が通常の意味での分割システムになる．これより，Bilbaoら[4]の分割システムより，GPSで制限されたゲームは以下の様に簡明に表現できる．

定理 2 (N,f) は *GPS* で，(N,v) はゲームとする．実現可能レベル $h\in[0,1]$ が与えられたとき，f で制限されるゲーム (N,v_h^f) の特性関数 $v_h^f:2^N\to\mathbf{R}$ は以下のように表わされる．

$$v_h^f(S)=\sum_{T\in\Pi_{F(h)}(S)}v(T)$$

4 GISによる制限ゲーム

一般的に制限ゲームにおいて，凸性は継承されない．そこで，この章では前章で導入したGPSに，さらに条件を加えたGISという制限システムを導入し，GISの下では凸性が継承されることを示す．まず，繰り返しになるが，GFCSの定義から任意の $h\in[0,1]$ に対して，次式が成立する．

$$\emptyset\in F(h),\{i\}\in F(h)\quad\forall i\in N \tag{11}$$

定義 5 *GFCS*(N,f) は $S\cap T\neq\emptyset$ を満たす任意の $S,T\subseteq N$ に対し，条件

$$f(S\cup T), f(S\cap T)\geq \min\{f(S),f(T)\}$$

が満足されるとき，*GIS* であるといわれる．

このGISと従来の交差システムの関係は以下のような命題で示すことができる．

命題 5 *GFCS*(N,f) が *GIS* になるための必要十分条件は，任意の実現可能レベル $h\in[0,1]$ に対して，$(N,F(h))$ が通常の意味での交差システム，つまり式 (11) に注意すると，任意の h に対し，以下のような関係が成り立つことである．

$$S,T\in F(h), S\cap T\neq\emptyset \Longrightarrow S\cup T, S\cap T\in F(h)$$

証明 命題4の証明と全く同様である． □

通常の交差システムにおける結果を用いると，通常ゲームが凸である，つまり

$$v(S)+v(T) \;\leq\; v(S\cap T)+v(S\cup T) \tag{12}$$

であるとき，任意の実現可能レベル $h\in[0,1]$ に対して，$(N,F(h))$ が通常の意味での交差システムになる．これより，Bilbao ら [4] の交差システムの定義5より直ちに

$$v_h^f(S)+v_h^f(T)\leq v_h^f(S\cup T)+v_h^f(S\cap T) \tag{13}$$

が成立する．次に実現可能レベル h に関して統合した特性関数 $\bar{v}^f,\hat{v}^f$ について議論する．

定理 3 (N,f) は *GFCS* で，(N,v) は凸ゲームとする．実現可能度 f で制限される v_h^f を実現可能レベル h に関して統合した特性関数 $\bar{v}^f,\hat{v}^f$ で与えられるゲーム $(N,\bar{v}^f),(N,\hat{v}^f)$ は共に凸ゲームとなる．

証明 まず，$\bar{v}^f$ については式 (13) を h に関して積分することにより，以下の関係が求まる．

$$\begin{aligned}
\bar{v}^f(S)+\bar{v}^f(T) &= \int_0^1\{v_h^f(S)+v_h^f(T)\}dh\\
&\leq \int_0^1\{v_h^f(S\cup T)+v_h^f(S\cap T)\}dh\\
&= \bar{v}^f(S\cup T)+\bar{v}^f(S\cap T)\quad S,T\subseteq N
\end{aligned}$$

これより，$(N,\bar{v}^f)$ は凸ゲームとなる．

次に，$\hat{v}^f$ についても以下の関係が求まる．

$$\begin{aligned}
\hat{v}^f(S)+\hat{v}^f(T) &\leq \frac{1}{\sum_j h_j}\sum_j h_j\{v_{h_j}^f(S)+v_{h_j}^f(T)\}\\
&\leq \frac{1}{\sum_j h_j}\sum_j h_j\{v_{h_j}^f(S\cup T)+v_{h_j}^f(S\cap T)\}\\
&= \hat{v}^f(S\cup T)+\hat{v}^f(S\cap T)\quad S,T\subseteq N
\end{aligned}$$

よって，$(N,\hat{v}^f)$ も凸ゲームとなる． □

以下に GIS による制限ゲームの具体例を挙げる．

例 3 プレイヤー集合 $N=\{1,2,3,4\}$ とし，特性関数 v と定義 5 を満たさない実現可能度 $f(S)$ は以下のように表わされているものとする．

$$f(S)=\begin{cases}0.4 \text{ if } S=\{1,3\}\\ 0.6 \text{ if } S=\{1,2\}\\ 0.7 \text{ if } S=\{1,2,3\}\\ 0.8 \text{ if } S=\{2,3\}\\ 1 \quad \text{otherwise,}\end{cases} \quad v(S)=10(|S|-1).$$

通常ゲーム (N,v) は凸である．これは全ての提携に対して，凸の条件式である式 (12) が満たされることにより，容易にわかる．しかしながら，(N,f) は以下の式のように，*GIS* になる条件式 $f(S\cup T), f(S\cap T)\geq \min\{f(S),f(T)\}$ を満たさない．

$$f(\{1,2\})=0.6 \not\geq 0.7=\min\{f(\{1,2,3\}),f(\{1,2,4\})\}$$

これより，f で制限される v_h^f を h に関して統合した特性関数 $\bar{v}^f,\hat{v}^f$ で与えられる $(N,\bar{v}^f),(N,\hat{v}^f)$ は凸ゲームにならない反例を挙げる．まず，$\bar{v}^f$ は以下の式により，凸性を継承しないといえる．

$$\begin{aligned}\bar{v}^f(1,2,3)+\bar{v}^f(1,3,4)&=15+20=35\\ &> \ 34=4+30=\bar{v}^f(1,3)+\bar{v}^f(N)\end{aligned}$$

次に，$\hat{v}^f$ は以下の式により，凸性を継承しないといえる．

$$\begin{aligned}\hat{v}^f(1,2,3)+\hat{v}^f(1,3,4)&=12+20=32\\ &> \ 31.14=1.14+30=\hat{v}^f(1,3)+\hat{v}^f(N)\end{aligned}$$

よって，(N,f) が *GIS* になる条件式を満たさないとき，f で制限されたゲームは凸ゲームとならない．

次に，特性関数を上記のゲームと同様にし，定義 5 を満たす *GIS* で制限されたゲームについて考える．

$$f(S)=\begin{cases}0.6 \text{ if } S=\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\\ 0.8 \text{ if } S=\{2,3\}\\ 1 \quad \text{otherwise,}\end{cases}$$

f で制限される v_h^f を h に関して統合した特性関数 $\bar{v}^f,\hat{v}^f$ は以下の式により，凸性を継承するといえる．

$$\bar{v}^f(S)=\begin{cases}0 \quad \text{if } |S|\leq 1\\ 6 \quad \text{if } S=\{1,2\},\{1,3\}\\ 8 \quad \text{if } S=\{2,3\}\\ 10 \text{ otherwise}\\ 14 \text{ if } S=\{1,2,3\}\\ 20 \text{ if } S=\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}\\ 30 \text{ if } S=N\end{cases} \qquad \hat{v}^f(S)=\begin{cases}0 & \text{if } |S|\leq 1\\ 2.5 & \text{if } S=\{1,2\},\{1,3\}\\ 3.33 & \text{if } S=\{2,3\}\\ 8.33 & \text{if } S=\{1,2,3\}\\ 10 & \text{otherwise}\\ 20 & \text{if } S=\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}\\ 30 & \text{if } S=N\end{cases}$$

5 おわりに

本研究では，Bilbao らによる実現可能提携システム FCS を提携の実現可能性の程度を考慮できるように一般化された GFCS へと拡張し，このシステムによる制限ゲームの特性関数を定義し，その性質を調べた．この特性関数は GFCS から実現可能レベルに依存した FCS を考え，それに対して得られる制限ゲームを実現可能レベルに関して統合することにより求めた．

さらに，GFCS の特別な場合である GPS を考え，GPS の下での制限ゲームに対しては，制限ゲームの特性関数がより簡明に求められることを示した．最後に，GPS にさらに条件を付加した GIS を導入し，GIS の下での制限ゲームが元のゲームの凸性を継承することを示した．

今後の課題として，提携の実現可能性の程度を考慮した実現可能提携システムによる制限ゲームの特性関数を，GFCS(N, f) から直接的に定義することが考えられる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{v}^f(S) &= \max\{g(\{T_k\}_{k\in K})\sum_{k\in K} v(T_k) : \{T_k\}_{k\in K} \in P(S)\} \\
\acute{v}^f(S) &= \max\{\sum_{k\in K} f(T_k)v(T_k) : \{T_k\}_{k\in K} \in P(S)\}
\end{aligned}
$$

ここで，$P(S)$ は提携 S の分割全体の集合とする．また，提携 S の分割 $\{T_j\}_{j\in J}$ の実現可能度を以下のように定義する．

$$g(\{T_j\}_{j\in J}) = \min_{j\in J} f(T_j)$$

この特性関数 $\tilde{v}^f, \acute{v}^f$ の性質として，f に関する連続性はいえる．また，元のゲームが凸である場合，これらの制限ゲームにおいて凸性が継承されるような GFCS の特別なクラスを特徴付けることが考えられる．

参考文献

[1] 鈴木 光男: 新ゲーム理論 ,勁草書房 ,1994.

[2] R. Myerson: Graphs and cooperation in games, *Mathematics of Operations Research*, vol. 2, pp. 225-229,1977.

[3] M. Slikker and A. van den Nouweland: *Social and Economic Networks in Cooperative Game Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.

[4] E. Algaba, J. M. Bilbao and J. Lopez: A unified approach to restricted games, *Theory and Decision*, vol. 50, pp. 333-345, 2001.

[5] J. M. Bilbao: *Cooperative Games on Combinatorial Structures*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.