数理解析研究所講究録 1365 巻 2004 年 33-40

Absoluteノルム空間におけるJames定数について

新潟大自然科学　三谷　健一 (Ken-ichi Mitani)
Graduate School of Scinece and Technology, Niigata University
新潟大 理　　斎藤　吉助 (Kichi-Suke Saito)
Faculty of Science, Niigata University

1　序文

バナッハ空間の幾何学的構造及び性質などを調べる上で、例えば、von Neumann-Jordan定数やJames定数など、種々の定数は重要な役割を果たす。Jordan-von Neumann[8]は1935年、内積空間を中線定理をみたすノルム空間として特徴付け、さらに、任意のバナッハ空間 X に対して、

$$\frac{1}{2}\leq\frac{||x+y||^2+||x-y||^2}{2(||x||^2+||y||^2)}\leq 2\quad\forall(x,y)\neq(0,0)$$

が成り立つことを注意している。これに関連して、1937年、Clarkson[5]はvon Neumann-Jordan定数（以後NJ定数）の概念を導入した。

定義 1 X をバナッハ空間とする。X の NJ定数 $C_{\mathrm{NJ}}(X)$ を

$$\frac{1}{C}\leq\frac{||x+y||^2+||x-y||^2}{2(||x||^2+||y||^2)}\leq C\quad\forall(x,y)\neq(0,0)$$

をみたすCの最小値によって定義する。即ち、

$$C_{\mathrm{NJ}}(X)=\sup_{(x,y)\neq(0,0)}\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}$$

である。

命題 1 (i) 任意のバナッハ空間 X に対して $1\leq C_{\mathrm{NJ}}(X)\leq 2$。特に、$X$ がヒルベルト空間であることと $C_{\mathrm{NJ}}(X)=1$ であることは同値である。
(ii) $1\leq p\leq\infty,\ \dim L_p\geq 2$ とする。このとき $C_{\mathrm{NJ}}(L_p)=2^{2/\min\{p,p'\}-1}$，ここで $1/p+1/p'=1$.

またJames[7]は次の概念を導入した。

定義 2 X をバナッハ空間とする。また、$S(X)=\{x\in X:||x||=1\}$ とする。X が *uniformly non-square* であるとは、ある $\delta>0$ が存在して、$\|(x-y)/2\|>1-\delta$ をみたす任意の $x,y\in S(X)$ に対して $\|(x+y)/2\|\leq 1-\delta$ が成立することである。

これに関連して、Gao-Lau [6] はuniformly non-squareness度合いを表す定数として、次を導入した。

定義 3 X をバナッハ空間とする。このとき X の *James(non-square)* 定数 $J(X)$ を

$$J(X) = \sup\{\min(\|x+y\|, \|x-y\|) : x, y \in S(X)\},$$

によって定義する。

命題 2 (i) 任意のバナッハ空間 X に対して $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$。特にヒルベルト空間ならば $J(X) = \sqrt{2}$ である。この逆は成り立たない。
(ii)$1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ とする。また $\dim L_p \geq 2$ とする。このとき $J(L_p) = \max\{2^{1/p}, 2^{1/p'}\}$ である。
(iii) $J(X) < 2$ であることと X が *uniformly non-square* であることは同値。

このように、それぞれの定数がバナッハ空間の構造や性質にどのように反映するかについて多くの研究者によって明らかにされている。最近、Saito-Kato-Takahashi [12] は、$\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized ノルムにおいて NJ 定数の計算あるいは評価に成功した。さらに、[13] において $\mathbb{C}^n$ 上の absolute normalized ノルムにおいても凸関数という言葉で特徴付けを与え、それらの空間やバナッハ空間の直和空間での狭義凸性、uniformly non-squareness や smoothness などの幾何学的性質に対する結果が得られている。

この研究では、$\mathbb{R}^2$ 上の absolute ノルムにおける James 定数を考察する。Gao-Lau[6] では、単位球が円板や正八角形などの特別な形をした2次元のノルム空間の James 定数の結果を与えた。我々は、absolute ノルム（ある条件下での）を持つ $\mathbb{R}^2$ の James 定数を決定する。この結果は、ℓ_p 以外でも多くのノルムの James 定数を計算可能にさせる。応用として、2次元 Lorentz 数列空間の NJ 及び James 定数の計算を与える。さらに、absolute ノルムを持つ $\mathbb{R}^2$ での NJ 定数と James 定数の関係を与える。

2 $\mathbb{R}^2$ 上の absolute ノルム

定義 4 $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^2$ 上のノルムとする。
(i) $\|\cdot\|$ が *absolute* であるとは、任意の x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ に対して $\|(|x_1|, |x_2|)\| = \|(x_1, x_2)\|$ が成り立つときをいう。
(ii) $\|\cdot\|$ が *normalized* であるとは $\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1$ のときをいう。

例えば、ℓ_p ノルムは $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized ノルムである。

$$\|(x_1, x_2)\|_p = \begin{cases} \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max(|x_1|, |x_2|) & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

AN_2 を $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized ノルム全体とする。任意の $\|\cdot\| \in AN_2$ に対して

$$\psi(t) = \|(1-t,\, t)\| \ (0 \le t \le 1) \tag{1}$$

とおくと、ψ は [0,1] 上の連続凸関数で $\psi(0) = \psi(1) = 1$ かつ $\max\{1-t, t\} \le \psi(t) \le 1$ $(0 \le t \le 1)$ をみたす。そこで、このような関数の全体を Ψ_2 とおく。また、任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して、

$$\|(x_1, x_2)\|_\psi = \begin{cases} (|x_1| + |x_2|)\psi\left(\frac{|x_2|}{|x_1|+|x_2|}\right) & \text{if } (x_1, x_2) \ne (0,0), \\ 0 & \text{if } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

と定義すると $\|\cdot\|_\psi \in AN_2$ かつ (1) をみたす。従って、AN_2 と Ψ_2 は 1 対 1 に対応する。（この記述は Bonsall-Duncan [2] に見られる。）例えば、ℓ_p ノルム $\|\cdot\|_p$ に対応する凸関数 ψ_p は

$$\psi_p(t) = \begin{cases} \left((1-t)^p + t^p\right)^{1/p} & \text{if } 1 \le p < \infty, \\ \max(1-t, t) & \text{if } p = \infty \end{cases}$$

によって与えられる。また定理から ℓ_p ノルム以外にも沢山の absolute ノルムが存在することがわかる。最近、Saito-Kato-Takahashi [12] は $\mathbb{C}^2$ 上の absolute ノルムにおける NJ 定数を計算あるいは評価した。この結果は、$\mathbb{R}^2$ 上においても同様に成り立つ。

定理 1 ([12]) $\psi \in \Psi_2$ とする。
(i) $\psi \ge \psi_2$(*resp.* $\psi \le \psi_2$) とする。このとき

$$C_{\mathrm{NJ}}\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)\right) = \max_{0\le t\le 1} \frac{\psi(t)^2}{\psi_2(t)^2} \left(resp. \max_{0\le t\le 1} \frac{\psi_2(t)^2}{\psi(t)^2}\right).$$

(ii) ψ は $t = 1/2$ に関して対称であるとする。$M_1 = \max_{0\le t\le 1} \psi(t)/\psi_2(t)$ または $M_2 = \max_{0\le t\le 1} \psi_2(t)/\psi(t)$ が $t = 1/2$ で最大ならば、

$$C_{\mathrm{NJ}}\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)\right) = M_1^2 M_2^2.$$

ここで、2 次元 Lorentz 数列空間を考える。$0 < \omega \le 1,\ 1 \le q < \infty$ とする。このとき次のノルム $\|\cdot\|_{\omega,q}$ をもつ $\mathbb{R}^2$ を 2 次元 Lorentz 数列空間 $d^{(2)}(\omega, q)$ という。

$$\|x\|_{\omega,q} = (x_1^{*q} + \omega x_2^{*q})^{1/q},\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ここで、$x_1^* = \max(|x_1|, |x_2|),\ x_2^* = \min(|x_1|, |x_2|)$。Kato-Maligranda [10] はこの空間の NJ 定数の値を計算した。

定理 2 ([10]) (i) $q \ge 2$ とする。このとき

$$C_{\mathrm{NJ}}\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\omega,q})\right) = 2\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{2/q}.$$

(ii) $1 \le q < 2$ とする。$\omega \ge 2^{q/2} - 1$ ならば

$$C_{\mathrm{NJ}}\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\omega,q})\right) = \left(1 + \omega^{2/(2-q)}\right)^{2/q-1}.$$

また $\omega < 2^{q/2} - 1$ ならば

$$C_{\mathrm{NJ}}\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\omega,q})\right) = 2\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{2/q}\left(1 + \omega^{2/(2-q)}\right)^{2/q-1}.$$

ところが $\|\cdot\|_{\omega,q}$ は absolute normalized ノルム、即ち、$\|\cdot\|_{\omega,q} \in AN_2$ であるから、定理 1 を用いても NJ 定数の値を求めることができる。実際、このノルムに対応する凸関数は $\psi_{\omega,q}$ は

$$\psi_{\omega,q}(t) = \begin{cases} \left((1-t)^q + \omega t^q\right)^{1/q} & \text{if } 0 \le t \le 1/2, \\ \left(t^q + \omega (1-t)^q\right)^{1/q} & \text{if } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

であるから、$\psi_{\omega,q}^2/\psi_2^2$ または $\psi_2^2/\psi_{\omega,q}^2$ の関数の最大値を求めることで NJ 定数が得られる ([11])。

3 $\mathbb{R}^2$ 上の absolute ノルムにおける James 定数

X をノルム空間とし、$x \in S(X)$ とする。また $\alpha(x)$、$\beta(x)$ を

$$\alpha(x) = \inf\left\{\max(||x+y||, ||x-y||) : y \in S(X)\right\},$$

$$\beta(x) = \sup\left\{\min(||x+y||, ||x-y||) : y \in S(X)\right\}$$

とし、さらに

$$g(X) = \inf\{\alpha(x) : x \in S(X)\},\ G(X) = \sup\{\alpha(x) : x \in S(X)\}$$

$$j(X) = \inf\{\beta(x) : x \in S(X)\},\ J(X) = \sup\{\beta(x) : x \in S(X)\}$$

と定義する。

命題 3 ([6]) X_2 を 2 次元ノルム空間とする。また $x \in S(X_2)$ とおく。このとき
(i) $||y+x|| = ||y-x||$ をみたすような $y \in S(X_2)$ が存在し、さらに $\alpha(x) = ||y+x|| = ||y-x||$ である。
(ii) $p = (y-x)/\alpha(x)$ とおく。このとき $p \in S(X_2)$ で $\alpha(p)\alpha(x) = 2$ をみたす。
(iii) $\alpha(x) = \beta(x)$.

この命題から、これらの定数の関係を与えている。

命題 4 ([6]) X をノルム空間とする。このとき、
(i) $g(X) \le G(X) \le J(X)$, $g(X) \le j(X) \le J(X)$.
(ii) $1 \le g(X) \le \sqrt{2} \le J(X) \le 2$.
(iii) $g(X)J(X) = 2$.

また、ℓ_p 空間については、Clarkson の不等式を使って、次のような結果が得られている。

命題 5 ([6]) $p, q \ge 1$, $1/p + 1/q = 1$ とする。このとき
(i) $2 \le p < \infty$ ならば $g(\ell_p) = j(\ell_p) = G(\ell_p) = 2^{1/p}$. $J(\ell_p) = 2^{1/q}$.
(ii) $1 \le p < 2$ ならば $g(\ell_p) = 2^{1/q}$, $j(\ell_p) = G(\ell_p) = J(\ell_p) = 2^{1/p}$.

同様に、L_p 空間についても求められている。さらに、命題3から、様々な2次元ノルム空間の James 定数を計算している。

例 1 ([6]) (i) $S(X_2)$ が平行四辺形のとき、$J(X_2) = G(X_2) = 2$, $g(X_2) = j(X_2) = 1$.
(ii) $S(X_2)$ が円板または正八角形のとき、$J(X_2) = G(X_2) = g(X_2) = j(X_2) = \sqrt{2}$.

実際 (ii) の場合の証明を与えておく。$x \in S(X_2)$ をおく。この x に対し、原点中心に順に 45° 回転させた点を $x_1, x_2, x_3 \in S(X_2)$ とする。このとき、

$$||x_2 \pm x|| = ||x_3 \pm x_1||$$

である。命題3 (i) より $\alpha(x) = \alpha(x_3)$。よって、命題3 (iii) より, $\alpha^2(x) = \alpha(x)\alpha(x_3) = 2$、即ち $\alpha(x) = \sqrt{2}$。従って $g(X_2) = J(X_2) = \sqrt{2}$ である。

また、[6] の中で J(X) と convexity modulus との関係を与えている。$0 < \varepsilon \le 2$ とする。このとき X の convexity modulus $\delta(\varepsilon)$ を

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{1}{2}\|x+y\| : x, y \in S(X),\ \|x-y\| \ge \varepsilon\right\}$$

と定義する。X が uniformly convex であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta(\varepsilon) > 0$ であるときをいう。

命題 6 ([6]) X がノルム空間である。このとき

$$J(X) = \sup\left\{\varepsilon : \delta(\varepsilon) \le 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

である。

このように、$J(X)$ について様々な研究が行われている。この研究では、$\mathbb{R}^2$ 上の absolute ノルムにおける James 定数を考察する。特にノルムが symmetric、即ち、任意の x, $y \in \mathbb{R}$ に対して $||(x, y)|| = ||(y, x)||$ であるときの James 定数の値を決定する。

定理 3 $\psi \in \Psi_2$ が $t = 1/2$ に関して対称、即ち $\|\cdot\|_\psi$ が *symmetric* ならば

$$J\big((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)\big) = \max_{0 \le t \le 1/2} \frac{2-2t}{\psi(t)} \psi\left(\frac{1}{2-2t}\right)$$

である。

例えば、ℓ_p 空間の場合、Gao-Lau [6] は Clarkson 不等式を用いて計算しているが、2 次元の場合に限れば、定理 3 を使って、初等的な計算で James 定数の値を決定することができる。実際

$$f(t) = \frac{2-2t}{\psi_p(t)} \psi_p\left(\frac{1}{2-2t}\right)$$

は $1 \le p \le 2$ ならば $t = 0$ のとき最大、$p \ge 2$ ならば $t = 1/2$ のとき最大になる。従って

$$J\big((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)\big) = \max\{2^{1/p}, 2^{1/p'}\}$$

が得られる。また、ℓ_p ノルム以外でも様々な 2 次元ノルム空間の James 定数の値を決定できる。例えば、$\psi_\beta \in \Psi_2$ を

$$\psi_\beta(t) = \max\{1-t, t, \beta\}$$

とおく。ここで、$1/2 \le \beta \le 1$。このとき

$$J\big((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_\beta})\big) = \begin{cases} 1/\beta & \text{if } 1/2 \le \beta \le 1/\sqrt{2}, \\ 2\beta & \text{if } 1/\sqrt{2} \le \beta \le 1 \end{cases}$$

である。

応用として、2 次元の Lorentz 数列空間の場合を考察する。Kato-Maligranda [10] は $q \ge 2$ のときのみ James 定数の値を決定した。実際、一般のバナッハ空間 X に対して、

$$J(X)^2/2 \le C_{NJ}(X)$$

であることと、定理 2 の 2 次元の Lorentz 数列空間の NJ 定数の結果から次のように値を得ている。

定理 4 ([10]) $q \ge 2$ ならば、

$$J\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\omega,q})\right) = 2\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{1/q}$$

である。

また、$1 \le q < 2$ の場合は未解決になっている。しかし、我々は定理 3 を使うことにより、$q \ge 2$ のときの別証明と $1 \le q < 2$ のとき部分的な解答を得た。実際、$\psi_{\omega,q}$ を定理 3 に直接適用することで次のような結果が得られる。

定理 5 (i) $1 \leq q < 2$ かつ $0 < \omega \leq -1+\sqrt{2}$ ならば

$$J\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\omega,q})\right) = 2\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{1/q}.$$

(ii) $q = 1$ かつ $\omega > -1+\sqrt{2}$ ならば

$$J\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\omega,q})\right) = 1+\omega.$$

4 Absolute ノルム空間における NJ 定数と James 定数との関係

Kato-Maligranda-Takahashi [9] は、一般のバナッハ空間における NJ 定数と James 定数との関係を次のように与えた。

命題 7 ([9]) 任意のバナッハ空間 $X(\dim X \geq 2)$ に対して

$$J(X)^2/2 \leq C_{NJ}(X) \leq J(X)^2/((J(X)-1)^2+1).$$

特に X がヒルベルト空間、L_p 空間, $1 \leq p \leq \infty$ また、uniformly non-square でないとき $J(X)^2/2 = C_{NJ}(X)$ である。さらに、[9] の中で、$J(X)^2/2 < C_{NJ}(X)$ をみたす 2 次元バナッハ空間の例を挙げている。実際、$\mathbb{R}^2$ 上の ℓ_1-ℓ_∞ ノルム $\|\cdot\|$ を

$$\|(x,y)\| = \begin{cases} \|(x,y)\|_\infty & \text{if } x_1x_2 \geq 0, \\ \|(x,y)\|_1 & \text{if } x_1x_2 \leq 0 \end{cases}$$

と定義する。このとき、

$$\frac{1}{2}J\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)\right)^2 = 9/8 < 5/4 \leq C_{\mathrm{NJ}}\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)\right)$$

である。我々は $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)$ における NJ 定数と James 定数との関係を調べる。即ち、$C_{\mathrm{NJ}}\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)\right) = J\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)\right)^2/2$ をみたす $\psi \in \Psi_2$ に対しての必要かつ十分条件を与える。

定理 6 $\psi \in \Psi_2$ とする。また任意の $t \neq 0, 1/2, 1$ に対して $\psi(t) > \psi_2(t)$(*resp.* $<$) と仮定する。このとき

$$\frac{1}{2}J\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)\right)^2 = C_{\mathrm{NJ}}\left((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)\right)$$

をみたすための必要かつ十分条件は ψ/ψ_2(*resp.* ψ_2/ψ) が $t = 1/2$ で最大になることである。

参考文献

[1] B. Beauzamy, "Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, 2nd ed.," North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.

[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, "London Math. Soc. Lecture Note Series," Vol. 10, 1973.

[3] E. Casini, About some parameters of normed linear spaces, *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.,* **80** (1986), 11-15.

[4] J. A. Clarkson, Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **40** (1936), 396-414.

[5] J. A. Clarkson, The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space, *Ann. of Math.,* **38** (1937), 114-115.

[6] J. Gao and K. S. Lau, On the geometry of spheres in normed linear spaces, *J. Austral. Math. Soc.,* A **48** (1990), 101-112.

[7] C. James, Uniformly non-square Banach spaces, *Ann. of Math.,* **80** (1964), 542-550.

[8] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear metric spaces, *Ann. of Math.,* **36** (1935), 719-723.

[9] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces. *Studia Math.,* **144** (2001), 275–295.

[10] M. Kato and L. Maligranda, On James and Jordan-von Neumann constants of Lorentz sequence spaces, *J. Math. Anal. Appl.,* **258** (2001), 457-465.

[11] K. Mitani and K.-S. Saito, The James constant of absolute norms on $\mathbb{R}^2$, to appear in *J. Nonlinear Convex Anal.*

[12] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, Von Neumann-Jordan Constant of absolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$, *J. Math. Anal. Appl.,* **244** (2000), 515-532.

[13] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, Absolute norms on $\mathbb{C}^n$. *J. Math. Anal. Appl.,* **252** (2000), no. 2, 879–905.