数理解析研究所講究録 1365 巻 2004 年 57-61

Competition Model（種の競合問題）

山形大・工　高橋眞映
岩手大・人社　三浦康秀
山形大・工　三浦　毅
東邦大・理　塚田　真

この講演は誰にでもわかる数列の話であるが、どうも種の競合問題と関連するらしく、難解さを感じる。

1．問題発見

平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の閉凸領域 D 及びその上の実数値連続関数 f が与えられたとき、差分方程式：

(#) $$x_{n+1}=f(x_{n-1},x_n),\ (x_{-1},x_0)\in D\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

によって与えられる数列 $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ の振る舞いを研究することは重要であろう。

数年前 Gibbons-Kulenovic-Ladas [1] は、種の競合問題と関連する差分方程式：

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{1+x_n},\quad x_{-1},x_0>0,\ (n=0,1,2,\cdots)$$

の解 $\{x_n\}$ の中にそれが収束するものが存在するかという問題を起こした。最近 S. Stevic [2] はこの問題を肯定的に解き、更にもっと一般の差分方程式：

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{g(x_n)},\quad x_{-1},x_0>0\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

の場合に拡張した。最近我々は更に一般の差分方程式：

$$x_{n+1}=f(x_{n-1},x_n),\quad x_{-1},x_0>0\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

の場合に上の問題を言及し、Stevic よりもっと広い結果を得ている（文献 [3] 参照）。

ところで、これらの結果は $D=[0,\infty)\times[0,\infty)$ の場合であり、それ故差分方程式は定義し易い。それでは差分方程式 (#) を定義可能ならしめる非自明な閉凸領域とその上の実数値連続関数が存在するかという問題が浮かび上がってくる。我々は先ず次節で一般論を展開し、次次節で上の問題発見につながる具体的な例を与える。この例が題目の「種の競合問題」と関連すると言う訳である。

2．一般論

(I) D を $\boldsymbol{R}^2$ 上の閉凸領域、f を D 上で定義された以下の条件を満たす実数値連続関数とする：

(a) $(y,f(x,y))\in D$ for each $(x,y)\in D$;

(b) $f(x,y)\le x$ for each $(x,y)\in D$;

(c) If $(x,y)\in D$ and $f(y,f(x,y))\le f(x,y)$, then $x\ge y$.

このとき、我々は次式によって定義される非線形帰納的数列 $\{x_n\}$ の収束性を考察する：

(1) $$x_{n+1}=f(x_{n-1},x_n),\ (x_{-1},x_0)\in D\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

先ず (a) によってこの数列は "well-defined" であることに注意する。次に $a=x_{-1}$, $b=x_0$, $x_n=x_n(a,b)$ $(n=1,2,\cdots)$ としよう。従って $\{x_n(a,b)\}$ は初期条件 $x_{-1}=a$, $x_0=b$ を満たす差分方程式 (1) の解を表すことになる。更に x_n は変数を (a,b) とする D 上の実数値連続関数と見なす事ができる。ところで、条件 (b) は数列 $\{x_{2n}\}$ 及び $\{x_{2n-1}\}$ が単調減少列であることを導く。従って $p=\lim_{n\to\infty}x_{2n}$ 且つ $q=\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}$ と

おくことができる。それ故数列 $\{x_n\}$ が収束するための必要十分条件は $-\infty < p = q$ である。そこで p, q を D の関数と考えると、次のような問題が自然に提起される：

(2) Is there $(a, b) \in D$ such that $-\infty < p(a, b) = q(a, b)$?

この問題を解くために次のような記号を導入しよう：

$$A_f = \{a \in \boldsymbol{R} : b < f(a, b) \text{ for some } b \in \boldsymbol{R} \text{ with } (a, b) \in D\},$$
$$B_f = \{b \in \boldsymbol{R} : b < f(a, b) \text{ for some } a \in \boldsymbol{R} \text{ with } (a, b) \in D\},$$
$$C_f(b) = \{a \in \boldsymbol{R} : b \geq f(a, b) \text{ and } (a, b) \in D\} \ (b \in \boldsymbol{R}),$$
$$D_f(a) = \{b \in \boldsymbol{R} : b \geq f(a, b) \text{ and } (a, b) \in D\} \ (a \in \boldsymbol{R}).$$

このとき我々は、ある条件のもとで問題 (2) に肯定的解答を与える次のような結果を得る：

Theorem 1. (i) Let $a \in A_f$ be such that $\{(a, v) \in D : a < v\} \neq \varnothing$ and $D_f(a)$ is lower bounded in $\boldsymbol{R}$. Then there exsits a solution $\{x_n\}$ of the equation (1) such that $a = x_{-1} \geq x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0$.

(ii) Let $b \in B_f$ be such that $\{(u, b) \in D : u < b)\} \neq \varnothing$ and $C_f(b)$ is upper bounded in $\boldsymbol{R}$. Then there exists a solution $\{x_n\}$ of the equation (1) such that $x_{-1} \geq b = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0$.

Outline of Proof. Let $a \in A_f$ and $b \in B_f$ be such that $D_f(a)$ is lower bounded in $\boldsymbol{R}$, $\{(a, v) \in D : a < v\} \neq \varnothing$, $C_f(b)$ is upper bounded in $\boldsymbol{R}$ and $\{(u, b) \in D : u < b)\} \neq \varnothing$. For each $n \geq -1$, set

$$D_n(\cdot, b) = \{(u, b) \in D(\cdot, b) : x_n(u, b) \geq x_{n+1}(u, b)\};$$
$$D_n(a, \cdot) = \{(a, v) \in D(a, \cdot) : x_n(a, v) \geq x_{n+1}(a, v)\},$$

where $D(\cdot, b) = \{(u, b) \in D : u \in \boldsymbol{R}\}$ and $D(a, \cdot) = \{(a, v) \in D : v \in \boldsymbol{R}\}$. Then $D_n(\cdot, b)$ is a closed set in $D(\cdot, b)$ and $D_n(a, \cdot)$ is a closed set in $D(a, \cdot)$. Note that

(3) $$D_{n+2}(\cdot, b) \subseteq D_n(\cdot, b) \text{ and } D_{n+2}(a, \cdot) \subseteq D_n(a, \cdot).$$

Now set

$$D^n(\cdot, b) = D_n(\cdot, b) \cap D_{n+1}(\cdot, b) \text{ and } D^n(a, \cdot) = D_n(a, \cdot) \cap D_{n+1}(a, \cdot).$$

Then $D^n(\cdot, b)$ is a closed set in $D(\cdot, b)$ such that

$$D^{-1}(\cdot, b) \supseteq D^1(\cdot, b) \supseteq D^3(\cdot, b) \supseteq \cdots$$

and $D^n(a, \cdot)$ is a close sets in $D(a, \cdot)$ such that

$$D^{-1}(a, \cdot) \supseteq D^1(a, \cdot) \supseteq D^3(a, \cdot) \supseteq \cdots$$

by (3). Note that $D^{2n+1}(\cdot, b) \neq \varnothing$ and $D^{2n+1}(a, \cdot) \neq \varnothing$. Since

$$D^{-1}(a, \cdot) \subseteq D_{-1}(a, \cdot) = \{(a, v) \in D(a, \cdot) : a \geq v\},$$

it follows that $D^{-1}(a, \cdot)$ is upper bounded. Also since

$$D^{-1}(a, \cdot) \subseteq D_0(a, \cdot) = \{(a, v) \in D(a, \cdot) : v \in D_f(a)\},$$

it follows that $D^{-1}(a, \cdot)$ is lower bounded and hence bounded. Since

$$D^{-1}(\cdot, b) \subseteq D_{-1}(\cdot, b) = \{(u, b) \in D(\cdot, b) : u \geq b\},$$

it follows that $D^{-1}(\cdot, b)$ is lower bounded. Also since

$$D^{-1}(\cdot, b) \subseteq D_0(\cdot, b) = \{(u, b) \in D(\cdot, b) : u \in C_f(b)\},$$

it follows that $D^{-1}(\cdot, b)$ is upper bounded and hence bounded. By the Heine-Borel covering theorem, we have

(4) $\bigcap_{n=-1}^{\infty} D^{2n+1}(a, \cdot) \neq \varnothing$;

(5) $\bigcap_{n=-1}^{\infty} D^{2n+1}(\cdot, b) \neq \varnothing$.

Finally, we can easily see that (4) implies the assertion (i) and that (5) implies the assertion (ii). Q. E. D.

(II) D を $\boldsymbol{R}^2$ 上の閉凸領域、f を D 上で定義された以下の条件を満たす実数値連続関数とする：

(a') $(y, f(x, y)) \in D$ for each $(x, y) \in D$;

(b') $f(x, y) \geq x$ for each $(x, y) \in D$;

(c') If $(x, y) \in D$ and $f(y, f(x, y)) \geq f(x, y)$, then $x \leq y$.

このとき、我々は次式によって定義される非線形帰納的数列 $\{x_n\}$ の収束性を考察する：

(1') $$x_{n+1} = f(x_{n-1}, x_n),\ (x_{-1}, x_0) \in D \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

先ず (a') によってこの数列は "well-defined" であることに注意する。次に $a = x_{-1}$, $b = x_0$, $x_n = x_n(a, b)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ としよう。従って $\{x_n(a, b)\}$ は初期条件 $x_{-1} = a$, $x_0 = b$ を満たす差分方程式 (1') の解を表すことになる。更に x_n は変数を (a, b) とする D 上の実数値連続関数と見なす事ができる。ところで、条件 (b') は数列 $\{x_{2n}\}$ 及び $\{x_{2n-1}\}$ が単調増加列であることを導く。従って $p = \lim_{n\to\infty} x_{2n}$ 且つ $q = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1}$ とおくことができる。それ故数列 $\{x_n\}$ が収束するための必要十分条件は $p = q < \infty$ である。そこで p, q を D の関数と考えると、次のような問題が自然に提起される：

(2') Is there $(a, b) \in D$ such that $p(a, b) = q(a, b) < \infty$?

この問題を解くために次のような記号を導入しよう：

$$A'_f = \{a \in \boldsymbol{R} : b > f(a, b) \text{ for some } b \in \boldsymbol{R} \text{ with } (a, b) \in D\},$$
$$B'_f = \{b \in \boldsymbol{R} : b > f(a, b) \text{ for some } a \in \boldsymbol{R} \text{ with } (a, b) \in D\},$$
$$C'_f(b) = \{a \in \boldsymbol{R} : b \leq f(a, b) \text{ and } (a, b) \in D\} \quad (b \in \boldsymbol{R}),$$
$$D'_f(a) = \{b \in \boldsymbol{R} : b \leq f(a, b) \text{ and } (a, b) \in D\} \quad (a \in \boldsymbol{R}).$$

このとき我々は、ある条件のもとで問題 (2') に肯定的解答を与える次のような結果を得る：

Theorem 2. (i) Let $a \in A'_f$ be such that $\{(a, v) \in D : a > v\} \neq \varnothing$ and $D'_f(a)$ is upper bounded in $\boldsymbol{R}$. Then there exsits a solution $\{x_n\}$ of the equation (1') such that $a = x_{-1} \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots$.

(ii) Let $b \in B'_f$ be such that $\{(u, b) \in D : u > b)\} \neq \varnothing$ and $C'_f(b)$ is lower bounded set $\boldsymbol{R}$. Then there exists a solution $\{x_n\}$ of the equation (1) such that $x_{-1} \leq b = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots$.

上の定理の証明は (I) の場合と全く同様にしてなされる。

3．種の競合モデル

定数 $\alpha > 0, \beta > 1$ に対して、次の実数値連続関数 f 及び 2 つの閉凸領域 D_+, D_- を考える：

$$f(x, y) = \frac{\beta x}{1 + \alpha(x + y)} \quad (x, y \geq 0),$$
$$D_+ = \left\{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x + y \geq \frac{\beta - 1}{\alpha}\right\},$$
$$D_- = \left\{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x + y \leq \frac{\beta - 1}{\alpha}\right\}.$$

このとき次の補題を証明する事ができる。

Lemma 1. (i) $(y, f(x, y)) \in D_+$ for each $(x, y) \in D_+$.

(ii) $(y, f(x, y)) \in D_-$ for each $(x, y) \in D_-$

(iii) $f(x, y) \leq x$ for each $(x, y) \in D_+$.

(iv) $f(x, y) \geq x$ for each $(x, y) \in D_-$.

(v) If $(x, y) \in D_+$ and $f(y, f(x, y)) \leq f(x, y)$, then $x \geq y$.

(vi) If $(x, y) \in D_-$ and $f(y, f(x, y)) \geq f(x, y)$, then $x \leq y$.

上の補題から、我々は組 $\{D_+, f\}$ 及び $\{D_-, f\}$ がそれぞれ差分方程式 (#) を定義可能ならしめ、関数 f はしかるべき条件を満たすことを知る。

さて次のような記号を導入しよう：

$$A_f^+ = \{a \in \boldsymbol{R} : b < f(a, b) \text{ for some } b \in \boldsymbol{R} \text{ with } (a, b) \in D_+\},$$
$$B_f^+ = \{b \in \boldsymbol{R} : b < f(a, b) \text{ for some } a \in \boldsymbol{R} \text{ with } (a, b) \in D_+\},$$
$$C_f^+(b) = \{a \in \boldsymbol{R} : b \geq f(a, b) \text{ and } (a, b) \in D_+\} \quad (b \in \boldsymbol{R}),$$
$$D_f^+(a) = \{b \in \boldsymbol{R} : b \geq f(a, b) \text{ and } (a, b) \in D_+\} \quad (a \in \boldsymbol{R}).$$

このとき次の補題達を証明する事ができる。

Lemma 2. (i) $A_f^+ = \left(\dfrac{\beta-1}{2\alpha}, \infty\right)$. (ii) $B_f^+ = [0, \dfrac{\beta}{\alpha})$.

Lemma 3. Let $b \geq 0$. Then

(i) $C_f^+(b) = [0, \infty)$ whenever $\dfrac{\beta}{\alpha} \leq b$.

(ii) $C_f^+(b) = \left[\dfrac{\beta-1}{\alpha} - b, \dfrac{b(1+\alpha b)}{\beta - \alpha b}\right]$ whenever $\dfrac{\beta-1}{2\alpha} \leq b < \dfrac{\beta}{\alpha}$.

(iii) $C_f^+(b) = \varnothing$ whenever $0 \leq b < \dfrac{\beta-1}{2\alpha}$.

Lemma 4. Let $a \geq 0$.

(i) $D_f^+(a) = \left[\dfrac{\sqrt{(1+\alpha a)^2 + 4\alpha\beta a} - (1+\alpha a)}{2\alpha}, \infty\right)$ whenever $\dfrac{\beta-1}{2\alpha} \leq a$.

(ii) $D_f^+(a) = \left[\dfrac{\beta-1}{\alpha} - a, \infty\right)$ whenever $\dfrac{\beta-1}{2\alpha} > a \geq 0$.

上の補題達と前節の Theorem 1 から次の定理を証明することができる。

Theorem 3. (i) If $\dfrac{\beta-1}{2\alpha} \leq a$, there exsits a solution $\{x_n\}$ of the equation

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1}}{1 + \alpha(x_{n-1} + x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

such that $a = x_{-1} \geq x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots$ with $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\beta-1}{2\alpha}$.

(ii) If $\dfrac{\beta-1}{2\alpha} < b < \dfrac{\beta}{\alpha}$, then there exists a solution $\{x_n\}$ of the equation

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1}}{1 + \alpha(x_{n-1} + x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

such that $x_{-1} \geq b = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots$ with $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\beta-1}{2\alpha}$.

次に以下の記号を導入しよう：

$$A_f^- = \{a \in \boldsymbol{R} : b > f(a, b) \text{ for some } b \in \boldsymbol{R} \text{ with } (a, b) \in D_-\},$$
$$B_f^- = \{b \in \boldsymbol{R} : b > f(a, b) \text{ for some } a \in \boldsymbol{R} \text{ with } (a, b) \in D_-\},$$
$$C_f^-(b) = \{a \in \boldsymbol{R} : b \leq f(a, b) \text{ and } (a, b) \in D_-\} \quad (b \in \boldsymbol{R}),$$
$$D_f^-(a) = \{b \in \boldsymbol{R} : b \leq f(a, b) \text{ and } (a, b) \in D_-\} \quad (a \in \boldsymbol{R}).$$

このとき次の補題達を証明する事ができる。

Lemma 5. (i) $A_f^- = \left[0, \dfrac{\beta-1}{2\alpha}\right)$. (ii) $B_f^- = \left(0, \dfrac{\beta-1}{\alpha}\right]$.

Lemma 6. Let $0 \leq b \leq \dfrac{\beta-1}{\alpha}$. Then

(i) $C_f^-(b) = \left[\dfrac{b(1+\alpha b)}{\beta - \alpha b}, \dfrac{\beta-1}{\alpha} - b\right]$ whenever $0 \leq b \leq \dfrac{\beta-1}{2\alpha}$.

(ii) $C_f^+(b) = \varnothing$ whenever $\dfrac{\beta-1}{2\alpha} < b \leq \dfrac{\beta-1}{\alpha}$.

Lemma 7. Let $a \geq 0$.

(i) $D_f^-(a) = \left[0, \dfrac{\sqrt{(1+\alpha a)^2 + 4\alpha\beta a} - (1+\alpha a)}{2\alpha}\right]$ whenever $0 \leq a \leq \dfrac{\beta-1}{2\alpha}$.

(ii) $D_f^-(a) = \left[0, \dfrac{\beta-1}{\alpha} - a\right]$ whenever $\dfrac{\beta-1}{2\alpha} < a \leq \dfrac{\beta-1}{\alpha}$.

上の補題達と前節の Theorem 2 から次の定理を証明することができる。

Theorem 4. (i) If $0 < a < \frac{\beta - 1}{2\alpha}$, there exsits a solution $\{x_n\}$ of the equation

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1}}{1 + \alpha(x_{n-1} + x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

such that $a = x_{-1} \le x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le \frac{\beta - 1}{\alpha}$.

(ii) If $0 < b < \frac{\beta - 1}{2\alpha}$, then there exists a solution $\{x_n\}$ of the equation

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1}}{1 + \alpha(x_{n-1} + x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

such that $x_{-1} \ge b = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le \frac{\beta - 1}{\alpha}$.

Remark. Let $a = x_{-1}$ and $b = x_0$. We see easily that

(i) If $(a, b) \in D_+$ and $a + b = \frac{\beta - 1}{\alpha}$, then $x_{2n-1} = a, x_{2n} = b$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

(ii) If $a = 0$ and $0 < b < \frac{\beta - 1}{\alpha}$ (resp. $\frac{\beta - 1}{\alpha} < b$), then $x_{2n-1} = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ and $x_{2n} = \frac{\beta x_{2n-2}}{1 + \alpha x_{2n-2}}$ for $n \ge 1$, so that $b = x_0 < x_2 < x_4 < \cdots$ (resp. $b = x_0 > x_2 > x_4 > \cdots$) with $\lim_{n \to \infty} x_{2n} = \frac{\beta - 1}{\alpha}$.

(iii) $b = 0$ and $0 < a < \frac{\beta - 1}{\alpha}$ (resp. $\frac{\beta - 1}{\alpha} < a$), then $x_{2n} = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ and $x_{2n+1} = \frac{\beta x_{2n-1}}{1 + \alpha x_{2n-1}}$ for $n \ge 1$, so that $a = x_{-1} < x_1 < x_3 < \cdots$ (resp. $a = x_{-1} > x_1 > x_3 > \cdots$) with $\lim_{n \to \infty} x_{2n} = \frac{\beta - 1}{\alpha}$.

最後に Theorems 3 and 4 に関して次のような幾つかの予想を立てたい。

予想：(1) Let $(a, b) \in D_+$ and $x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1}}{1 + \alpha(x_{n-1} + x_n)}$, $x_{-1} = a, x_0 = b$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. Then $\{x_n\}$ converges if and only if $a \ge b \ge x_1 \ge x_2 \ge \cdots$.

(2) Let $(a, b) \in D_-$ and $x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1}}{1 + \alpha(x_{n-1} + x_n)}$, $x_{-1} = a, x_0 = b$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. Then the sequence $\{x_n\}$ converges if and only if $a \le b \le x_1 \le x_2 \le \cdots$.

(3) The set of all $(a, b) \in \boldsymbol{R}^2$ such that $a, b \ge 0$ and the sequence $\{x_n\}$ defined by $x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1}}{1 + \alpha(x_{n-1} + x_n)}$, $x_{-1} = a, x_0 = b$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ converges denotes a C^∞-curve in $\boldsymbol{R}^2$.

参考文献

1. C. H. Gibbons, M. R. S. Kulenovic and G. Ladas, On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n}$, Math. Sci. Res. Hot-Line 4-2 (2000), 1-11.
2. S. Stevic, On the recursive sequence $x_{n+1} = x_{n-1} / g(x_n)$, Taiwnese. J. Math., 6-3(2002), 405-414.
3. S.-E. Takahasi, Y. Miura and T. Miura, On convergency of a recursive sequence $x_{n+1} = f(x_{n-1}, x_n)$, submitted.