数理解析研究所講究録 1367 巻 2004 年 179-188

The de Rham cohomology groups for the general hypergeometric integral of type $(q+1, 1^{N-q})$

木村弘信 (Hironobu Kimura)
熊本大学理学部 (Fuculty of Science, Kumamoto University)

1 はじめに

本稿では、Aomoto-Gelfand 超幾何関数とその合流型関数をまとめて一般超幾何関数という名前で呼び、その積分表示に付随するコホモロジー群を、ある特別な場合に計算する。一般超幾何関数とは何であるか、何故コホモロジー群を具体的に計算しようとするのかを説明しよう。

我々にとって馴染み深い一変数特殊関数としては次のようなものがある。

(Gauss) $$ {}_2F_1(a,b,c;x) = C\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-xu)^{-b}du $$

(Kummer) $$ {}_1F_1(a,c;x) = C\int_0^1 e^{xu}u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}du $$

(Bessel) $$ J_a(x) = C\int e^{x(u-1/u)}u^{-a-1}du $$

(Hermite) $$ H_a(x) = C\int_\gamma e^{xu-\frac{1}{2}u^2}u^{-a-1}du $$

(Airy) $$ \mathrm{Ai}(x) = C\int_\gamma e^{xu-\frac{1}{3}u^3}du $$

ここで C は x に依らない定数を、γ は u 平面内の適当な積分路を表す。これらの関数を積分表示の立場から一般化したものが一般超幾何関数（後述）である。これらの超幾何関数達の重要な性質として holonomic な偏微分方程式系で特徴づけられるということがある。実際、一般超幾何関数を特徴づける方程式として，Radon 変換の立場から，2 階定数係数方程式系に一階の偏微分方程式系を付け加えて得られるものがある。これ以外に、積分表示に付随する de Rham コホモロジーの計算を経由して完全積分可能な一階の偏微分方程式系を得る方法がある。第一の方法では、方程式の特異性は直接的には見えないが、第二の方法では特異性は明確に見えることになる。

2 コホモロジーと Airy 微分方程式

ここでは、Airy 関数を例にとって，積分表示からコホモロジーの計算を経由してどのように微分方程式が導かれるかを直観的に説明しよう。Airy 関数は

$$y(x) = \int_\gamma e^{xu-\frac{1}{3}u^3} du$$

で与えられるが、この被積分関数を U とおく。積分路 γ を適当にとっておくと、積分記号下での微分が可能で

$$y'(x) = \int_\gamma e^{xu-\frac{1}{3}u^3} udu$$
$$y''(x) = \int_\gamma e^{xu-\frac{1}{3}u^3} u^2du$$

が得られる。更に、積分路 γ を，任意の自然数 k に対して条件 $\lim_{|u|\to\infty} Uu^k = 0$ を満たすようにとると、任意の u の多項式 f に対して

(1) $$0 = \int_\gamma d(Uf) = \int_\gamma U\left(df + \frac{dU}{U}f\right)$$

が成り立つ。$\nabla f := df + \frac{dU}{U}f$ と書こう。特に $f = 1$ ととると

$$0 = \int_\gamma U \cdot \nabla(1)du = \int_\gamma U \cdot \left(x - u^2\right) du = xy - y''$$

となり、 y の満たす２階の微分方程式を得る。あるいは未知関数 y_1, y_2 を１次微分形式

(2) $$\omega_1 = du, \quad \omega_2 = udu$$

を用いて

$$y_i = \int_\gamma U(u)\omega_i \quad (i = 1, 2)$$

と定め, (3) を用いることにより連立方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ x & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

を得たことになる。未知関数を定めるのに使った一次微分形式 ω_1, ω_2 は (2) のように選ばなければならないという事ではなく、

$$H^1 := \mathbb{C}[u]/\nabla\mathbb{C}[u] \simeq \mathbb{C}\omega_1 \oplus \mathbb{C}\omega_2$$

の元であれば良い。この H^1 が Airy 積分に付随した de Rham コホモロジー群である.

3 $(q+1, 1^{N-q})$ 型一般超幾何積分

上に述べた様々な一変数超幾何積分の一族を一般化した一般超幾何積分について復習しておこう。H を $GL(N+1;\mathbb{C})$ の正則元の中心化群として得られる極大可換部分群とする。ここで $x \in G$ が正則元であるとは、随伴作用による x の軌道の次元が最大になる時をいい、別の言い方をすれば $\mathrm{codim}_{\mathbb{C}}\{gxg^{-1} \mid g \in GL(N+1;\mathbb{C})\} = N+1$ となるときである。H の共役は $N+1$ の分割で決まる．一般超幾何積分はこの群の普遍被覆群 $\tilde{H}$ の指標の Radon 変換して定義される。古典的な場合に対応する極大可換部分群は 4 の分割で決まる次のものである。

(Gauss) $$H_{(1,1,1,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & & & \\ & h_1 & & \\ & & h_2 & \\ & & & h_3 \end{pmatrix} \right\}$$

(Kummer) $$H_{(2,1,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & & \\ & h_0 & & \\ & & h_2 & \\ & & & h_3 \end{pmatrix} \right\}$$

(Bessel) $$H_{(2,2)} = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & & \\ & h_0 & & \\ & & h_2 & h_3 \\ & & & h_2 \end{pmatrix} \right\}$$

(Hermite) $$H_{(3,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \\ & h_0 & h_1 & \\ & & h_0 & \\ & & & h_3 \end{pmatrix} \right\}$$

(Airy) $$H_{(4)} = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ & h_0 & h_1 & h_2 \\ & & h_0 & h_1 \\ & & & h_0 \end{pmatrix} \right\}$$

我々がこれから考察するのは、分割 $(q+1,1^{N-q})$ で定まる群

$$H=\left\{\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_q & & & \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ & & \ddots & h_1 & & & \\ & & & h_0 & & & \\ & & & & h_{q+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & h_N \end{pmatrix}\right\}\subset GL(N+1;\mathbb{C})$$

である。Jordan 群

$$J(q+1)=\left\{h'=\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_q \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & h_1 \\ & & & h_0 \end{pmatrix}\right\}\subset GL(q+1;\mathbb{C})$$

を用いると $H\simeq J(q+1)\times(\mathbb{C}^\times)^{N-q}$ であることは明らかであるが、さらに $J(q+1)\simeq\mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}^q$ であることが分かる．実際，この同型は，principal upper diagonal が 1 で他の成分は 0 であるシフト行列 $\Lambda=(\delta_{i+1,j})\subset M(q+1;\mathbb{C})$ を用いて

$$\log h'=\log(h_0I+h_1\Lambda+\dots+h_q\Lambda^q)=(\log h_0)I+\sum_{k=1}^{q}\theta_m(h')\Lambda^m$$

によって有理関数の系列

(3) $$\theta_m(h')=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+m\lambda_m=m}(-1)^{\lambda_1+\dots+\lambda_m-1}\frac{(\lambda_1+\dots+\lambda_m)!}{\alpha_1!\cdots\lambda_m!}\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^{\lambda_1}\cdots\left(\frac{h_m}{h_0}\right)^{\lambda_m}$$

を定義するとき，対応

$$h'\mapsto(h_0,\theta_1(h'),\dots,\theta_q(h'))$$

によって得られる．このことを用いると，群 H の普遍被覆群の指標 $\chi:\tilde{H}\to\mathbb{C}^\times$ は

$$\chi(h)=\exp\left(\sum_{k=0}^{q}\alpha_k\theta_k(h_0,\dots,h_q)\right)h_{q+1}^{\alpha_{q+1}}\cdots h_N^{\alpha_N}$$

で与えられることが分かる．ここで $\alpha_0,\dots\alpha_N\in\mathbb{C}$ である．さて，一般超幾何関数は指標 χ の Radon 変換（すなわち，$u=(u_1,\dots,u_n)$ の一次式を代入して積分する）として定義される．$u=(u_1,\dots,u_n)$ の一次式として

$$f_j=z_{0,j}+u_1z_{1,j}+\dots+u_nz_{n,j}\quad(j=0,\dots,N)$$

を考える．これらの一次式を指定するには，その係数のつくる行列

$$z=(z_0,\dots,z_N)=\begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & \dots & z_{0N} \\ z_{10} & z_{11} & \dots & z_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n0} & z_{n1} & \dots & z_{nN} \end{pmatrix} \in M(n+1,N+1;\mathbb{C})$$

を指定すればよい．この行列に対して以下の仮定をおく．

仮定 1 $z_0 = {}^t(1,0\dots,0)$,

仮定 2 任意の $0\le k\le \min\{q+1,n+1\}$ と $q+1\le j_1<\dots<j_{n-k+1}\le N$ をみたす k および $j_1,\dots,j_{n-k+1}$ に対して

$$\det(z_0,z_1,\dots,z_{k-1},z_{j_1},\dots,z_{j_{n-k+1}})\neq 0.$$

仮定 3 $\alpha_0+\alpha_{q+1}+\dots+\alpha_N=-n-1,\quad \alpha_q\neq 0.$

以上の準備の下で超幾何積分は

$$F(z,\alpha;c)=\int_c \chi(f_0,\cdots,f_N)du=\int_c e^{g(u,z)}\prod_{j=q+1}^{N} f_j^{\alpha_j}du,$$

で定義される．ここで $du=du_1\wedge\dots\wedge du_n$ および

$$g(u,z)=\sum_{k=1}^{q}\alpha_k\theta_k(f_0,\dots,f_q)$$

で，c は $\chi(f_0,\cdots,f_N)$ により定まるある homology 群の n-次元サイクルである．仮定 1 より $f_0=1$ なので θ_k の具体的な形 (3) より $g(u,z)$ は z の多項式を係数とする u の q 次多項式であることがわかる．また被積分関数 $\chi(f_0,\cdots,f_N)$ は $\mathbb{C}_u^n$ における超平面達 $H_j=\{u\in\mathbb{C}_u^n \mid f_j(u)=0\}$ の和集合 $\cup_{j=q+1}^N H_j$ を分岐集合とする多価正則関数である．

4　ねじれ de Rham コホモロジー

我々は，以下で

問題：超幾何積分に付随した de Rham コホモロジー群を具体的に決定すること

を考える．この問題は，次の場合には既に解決されている．

1) $n=1$ のとき．つまり一重積分の場合．

2) n が一般で，$N+1$ の分割 $=(1,\dots,1)$ の場合．つまり Aomoto-Gelfand の場合．

3) n が一般で，$N+1$ の分割 $=(N+1)$ の場合．つまり一般化された Airy 積分の場合．

4) 異なったセッティングでの関連した結果として ([3]) がある．

さて，de Rham コホモロジー群を定義するためにいくつか記号を用意しよう．

- $\mathcal{A}=\{H_{q+1},\ldots,H_N\}$: $\mathbb{C}^n$ における超平面配置.
- $N(\mathcal{A})=\bigcup_{j=q+1}^{N}\{u\in\mathbb{C}^n \mid f_j(u)=0\}$.
- $\Omega^p(*\mathcal{A})$: 高々 $N(\mathcal{A})$ に極を持つ $\mathbb{C}^n$ の p 次有理微分形式全体.
- $\Omega^p(\mathcal{A})=\{\eta\in\Omega^p(*\mathcal{A}) \mid Q\eta, Qd\eta$ が多項式 p 次微分形式$\}$: 高々 $N(\mathcal{A})$ に極を持つ対数的 p 次微分形式全体。ただし、$Q=\prod_{j=q+1}^{N}f_j$.

このとき，ねじれ外微分： $\nabla:\Omega^p(*\mathcal{A})\to\Omega^{p+1}(*\mathcal{A})$ が

$$\nabla(\eta)=\left(\frac{1}{\chi}\cdot d\cdot\chi\right)(\eta)=d\eta+\left(dg+\sum_{j=q+1}^{N}\alpha_j\frac{df_j}{f_j}\right)\wedge\eta$$

で定義される．$\nabla\circ\nabla=0$ であることが容易に分かるので<u>ねじれ有理 de Rham 複体</u>:

$$C_\nabla(*\mathcal{A}):\Omega^0(*\mathcal{A})\xrightarrow{\nabla}\Omega^1(*\mathcal{A})\xrightarrow{\nabla}\cdots\xrightarrow{\nabla}\Omega^n(*\mathcal{A})\to 0$$

が得られる．この複体のコホモロジー群を<u>ねじれ de Rham コホモロジー群</u>という:

$$H^p(C_\nabla(*\mathcal{A})):=\frac{\mathrm{Ker}\,\{\nabla:\Omega^p(*\mathcal{A})\to\Omega^{p+1}(*\mathcal{A})\}}{\mathrm{Im}\,\{\nabla:\Omega^{p-1}(*\mathcal{A})\to\Omega^p(*\mathcal{A})\}}$$

実際に計算するときには、$\Omega^p(*\mathcal{A})$ は少し大きすぎる．ねじれ微分 ∇ の形から $\nabla(\Omega^p(\mathcal{A}))\subset\Omega^{p+1}(\mathcal{A})$ が示せるので $C_\nabla(*\mathcal{A})$ の部分複体

$$C_\nabla(\mathcal{A}):\Omega^0(\mathcal{A})\xrightarrow{\nabla}\Omega^1(\mathcal{A})\xrightarrow{\nabla}\cdots\xrightarrow{\nabla}\Omega^n(\mathcal{A})\to 0$$

が得られる。 この部分複体を用いて計算して良いことの保証は次の命題で与えられる。

命題 1 条件

(4) $$\alpha_q\neq 0 \quad and \quad \alpha_i\notin\mathbb{Z},\quad i=q+1,\ldots N$$

の下で、包含写像 $\Omega^p(\mathcal{A})\subset\Omega^p(*\mathcal{A})$ による鎖写像 $(\Omega^\bullet(\mathcal{A}),\nabla)\to(\Omega^\bullet(*\mathcal{A}),\nabla)$ はコホモロジ群の同型

$$H^p(C_\nabla(\mathcal{A}))\quad\simeq H^p(C_\nabla(*\mathcal{A}))$$

を誘導する。

この命題の証明は [3] の定理 3.1 と同様である。

5 コホモロジー群の純性

次の定理は de Rham コホモロジー群のなかで 0 でないのは n 次コホモロジー群だけであることを主張する.

定理 2 条件 *(4)* の下で次が成り立つ.

(1) $C_\nabla(\mathcal{A})$ は *pure*. すなわち $H^p(C_\nabla(\mathcal{A}))=0$ が任意の $p\neq n$ に対して成り立つ.

(2) $\dim_{\mathbb{C}} H^n(C_\nabla(\mathcal{A}))=\binom{N-1}{n}$.

6 $H^n(C_\nabla(\mathcal{A}))$ の基底

定理 2 によれば, コホモロジ群 $H^n(C_\nabla(\mathcal{A}))$ は $\binom{N-1}{n}$ のベクトル空間であるからその基底を具体的に求めることが問題となる. この一つの解答を述べるためにいくつかの記号を用意する.

整数 $0\leq k\leq n, 1\leq l\leq N$ に対して $\mathcal{Y}(k,l)$ で size が $k\times l$ のボックスに含まれる Young 図形の集合を表す.

$\mu\in\mathcal{Y}(k,l)$ をとる. これを $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$ で $\mu_{k+1}=\cdots=\mu_n=0$ なるものと同一視する. $s_\mu(y)$ を μ に対する $y=(y_1,\ldots,y_n)$ の Schur 多項式とする. すなわち

$$s_\mu(y)=\frac{\begin{vmatrix} y_1^{\mu_1+n-1} & \cdots & \cdots & y_n^{\mu_1+n-1} \\ y_1^{\mu_2+n-2} & \cdots & \cdots & y_n^{\mu_2+n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{\mu_n} & \cdots & \cdots & y_n^{\mu_n}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{n-1} & \cdots & \cdots & y_n^{n-1} \\ y_1^{n-2} & \cdots & \cdots & y_n^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1\end{vmatrix}}$$

である. Schur 多項式 $s_\mu(y)$ は $y_1,\ldots,y_n$ の対称多項式なので, x_i を $y_1,\ldots,y_n$ の i 次基本対称多項式とすると, $x_1,\ldots,x_n$ の多項式として表すことができる. これを $S_\mu(x)$ と書く. すなわち

$$s_\mu(y)=S_\mu(x(y))$$

である．$\mu \in \mathcal{Y}(k,l)$ であるから $S_\mu(x)$ は $x_1,\ldots,x_k$ のみに依存する多項式である．

$0 \le k \le n$ をみたす k に対して $\mu \in \mathcal{Y}(k,q-1-k)$ および $q+1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k} \le N$ という自然数の組 $J(j_1,\ldots,j_{n-k})$ を用意し

$$\omega_{\mu,J} := S_\mu(f_1,\ldots,f_{n-k})df_1 \wedge \cdots \wedge df_{n-k} \wedge \frac{df_{j_1}}{f_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{df_{j_k}}{f_{j_k}} \in \Omega^n(\mathcal{A})$$

とおく．このとき我々は次を主張する．

定理 3 コホモロジー群 $H^n(C_\nabla(*\mathcal{A}))$ の基底として次の対数的 n 次微分形式の集合がとれる．

$$\bigcup_{k=0}^{n}\left\{\omega_{\mu,J} \;\middle|\; \begin{array}{l}\mu \in \mathcal{Y}(k,q-1-k),\\ J=(j_1,\ldots,j_{n-k}) \text{ such that } q+1 \le j_1 < \cdots < j_{n-k} \le N\end{array}\right\}. \tag{5}$$

7 例

例 4 $n=1$ の場合，すなわちが一重積分で表される一般超幾何積分の場合．*(5)* で $k=0$ とすると, 微分形式

$$\frac{df_{q+1}}{f_{q+1}},\ \ldots,\ \frac{df_N}{f_N} \tag{6}$$

が選ばれ，$k=1$ とすると *length* が 0 と 1 の *Young diagram* $(0),(1),\ldots,(q-2) \in \mathcal{Y}(1,q-2)$ に対する微分形式

$$df_1,\ f_1df_1,\ \ldots,\ f_1^{q-2}df_1 \tag{7}$$

が選ばれる．*(6)* と *(7)* をあわせたものが一重積分で表される一般超幾何積分に付随するこのホモロジー群の基底を与える．

例 5 $q=N$ の場合，すなわち一般化 *Airy* 積分の場合．条件を満たす J はない．従って *(5)* において $k=n$ の場合だけが意味がある．定理 *3* は

$$\omega_{\mu,\emptyset} = S_\mu(f_1,\ldots,f_n)df_1 \wedge \cdots \wedge df_n$$

がコホモロジー群の基底を与えることを主張する．この事実は既に *[?], [?]* で示されている．

例 6 $q=1$ の場合．このときには，$q-1-k=-k \le 0$ であるので，$\mathcal{Y}(k,q-1-k)=\mathcal{Y}(k,-k)=\emptyset$ である．従って *(5)* は $k=0$ のときだけ意味があり，$J=(j_1,\ldots,j_n)$ を $2 \le j_1 < \cdots < j_n \le N$ ととったときに定義される n 形式

$$\omega_{\emptyset,J} = \frac{df_{j_1}}{f_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{df_{j_n}}{f_{j_n}}$$

達がコホモロジー群の基底を与える．

8 おわりに

本稿では，$N+1$ の分割が $(q+1,1,\ldots,1)$ で $q>0$ である場合の一般超幾何関数に付随するねじれ de Rham コホモロジーの計算について述べた．これはきわめて部分的な結果で，これから計算しなければならないことはたくさんあるが，そのなかでいくつかを列挙しておく．

- $N+1$ の一般の分割に対応する一般超幾何関数の場合に，ねじれ de Rham コホモロジーの計算を実行すること．
- de Rham コホモロジーの基底を用いて，一般超幾何関数の満たす一階線形微分方程式系（Gauss-Manin 系）を導出すること．
- どこにどのような特異性が現れるかを組み合わせ論的に記述すること．
- Gauss-Manin 系のモノドロミー表現，ストークス現象をできるだけ具体的に記述すること．
- de Rham コホモロジーの交点数の計算．

参考文献

[1] K. Aomoto and M. Kita: 超幾何関数論, Springer-Verlag, Tokyo, 1994.

[2] P. Appell and J. Kampé de Fériet: Fonction hypergéométrique et hypersphériques, Guathier Villars, Paris , 1926.

[3] K. Aomoto, M. Kita, P. Orlik and H. Terao: Twisted de Rham cohomology groups of logarithmic forms, Advances in Math., **128**, (1997), 119–152.

[4] W. Fulton abd P. Pragacz: Schubert varieties and degeneracy loci, LNM 1689, Springer, New York, 1998.

[5] I. M. Gelfand: General theory of hypergeometric functions, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **288** (1986) 14–18,
English translation: Soviet Math. Dokl. **33** (1986) 9–13.

[6] I. M. Gelfand, V. S. Retahk, and V. V. Serganova: Generalized Airy functions, Schubert cells, and Jordan groups. Dokl. Akad. Nauk. SSSR , **298** (1988) 17–21.
English transl.: Soviet Math. Dokl. **37** (1988) 8–12.

[7] K. Iwasaki and K. Matsumoto: Intersection matrix of a generalized Airy function in terms of skew-Schur polynomials. Proc. Japn Acad., **76** (2000) 135–140.

[8] H. Kimura: On rational de Rham cohomology associated with the generalized Airy functions. Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa **24** (1997) 351–366.

[9] H. Kimura and T. Koitabashi: Normalizer of maximal abelian subgroups of $GL(n)$ and the general hypergeometric functions. Kumamoto J. Math. **9** (1996) 13–43.

[10] P. Orlik and H. Terao: Arrangement and Milnor fibers, Math. Ann., **301** (1995) 211–235.

[11] F. Pham: Vanishing homologies and the n-variable saddle point method, Proceeding of the Symposia in Pure and Applied Math., Am. Math. Soc., **40** (1983) 319–334.

[12] L. Rose and H.Terao: A free resolution of the module of logarithmic forms of a generic arrangement, J. Algebra, **136** (1991) 376–400.