数理解析研究所講究録 1368 巻 2004 年 88-95

非線形力学系の可積分性について

— 概念の意味とその一般化に関して —

芝浦工業大学システム工学部　阿部剛久（Takehisa Abe）
Faculty of Systems Engineering, Shibaura Institute of Technology

序. 題目にある「非線形力学系」とは数学の一部門として研究されている非線形問題における非線形方程式系 $dx/dt = f(x,t), \quad x \in R^n$ の型を必ずしも指すものではなく、広く一般の古典的な力学や場の理論に現れる現実的に問題としている非線形微分方程式系とそれらの関係にある方程式系を意味する。これ等の代表的なものとして一連のソリトン系列の方程式、複雑系の方程式、素粒子場や時空場関連の方程式系等があることはよく知られている。また、「可積分性」について言うならば、この用語は微分方程式のいわゆる可解性と区別しておく必要があろう。後者は初期値や境界地、その他の条件下で少なくとも解の局所的存在を保証するものであって、必ずしも解の構成手続きまたは構成可能性を提示するものではないから、可積分性の概念より基本的かつ一般的な概念と見なされる。したがって、与えられた微分方程式が可積分であることは解の具体的な構成による表示が可能であって、可解的であることは言うまでもない。今日まで非線形微分方程式の可解性に関しては多くの議論がなされ、その重要性は勿論であるが、中でも実在的な非線形現象を対象とする方程式の場合はその解の積分こそが現実的に必要であり、重要な意義をもつ。ここでは可解性に関する一般的議論は除いて、現実的な非線形方程式の積分可能性に関する議論に集中する。

議論の出発点となるのは可積分の素朴な考え方であろう。それは、解が（少なくとも原理的に）構成され、その振舞いがよくわかるということである。この場合の構成法のうち最も簡単なものとして、有限回の不定積分の実行という、いわゆる求積法が挙げられる。しかし、このような単純な方法でなくても解を求める方法は他に様々に考案され工夫される。非線形方程式の場合はその解を具体的に示すことは一般的に容易でなく、したがってその振舞いの様子などを知ることは更に困難なことである（ただし、現象的には前もっておおよそ知られていることはよくある)。よって上記の素朴な考え方は積分の可能性としては最も望ましいが、非常に厳しい要請と言わねばならない。すなわち、この意味では殆どすべての非線形方程式は積分可能ではないと言えよう。極端ではあるが、よく知られた例として古典的ゲージ場の記述を代表する真空中の Einstein 方程式や Yang-Mills 方程式等は積分可能でなく、これらの方程式の解の挙動はカオティックであって古典的意味の決定的明確さがない。

ここでは、このような素朴な意味の可積分性の考え＝厳しい要請、に対してもう少しその意味を拡張する（緩める）ことができないか、ということを考えたい。そして最後にその先に存在する問題とは何であるか、を考えてみたい。我々の対象とする非線形方程式のカテゴリーが拡大するにつれて積分可能性の概念は検証されねばならないであろうし、概念の更新を余儀なくされるであろうことはやむを得ないであろうが、それが数学の進歩に繋がることであれば幸いなことである。

I　標準的な可積分性の概念をめぐって

古典力学や場の理論は種々の定式化が可能であるが、ここでは近代的な幾何学的定式化に基づいたHamilton的力学を基礎として、これにしたがう非線形力学系、すなわちHamilton系を基本的な対象とする（[１]）。これを簡潔に述べれば、Hamilton系とは、通常Pを相空間、ωをP上の非退化２次閉形式、HをP上の実数値関数(Hamilton関数)とする三つ組み（P, ω, H）を指す。特に、（P, ω）をシンプレクティック（symplectic）多様体、ωを単にシンプレクティック形式とも呼ぶ。

形式ωは、相空間Pの次元が有限で、標準座標が（$q^1,\cdots,q^n, p_1,\cdots,p_n$）であれば、$\sum dq^i \wedge dp_i$。無限の場合は力学系や場が何であるかによって、空間Pはヒルベルト空間やバーナッハ空間、ソボレフ空間等を適当に用い、形式は速度相空間上の１次形式を運動量相空間上の標準１次形式を用いて表し、これに$-d$（d：**外微分**）を作用させて得られる。

また関数Hと形式ωによって定義されるベクトル場X_Hは任意のベクトル場Yに対して$\omega(X_H, Y)=dH\cdot Y$、すなわち　$i_{X_H}\,\omega=dH$（iは内積）を満たし、Hamiltonのベクトル場と呼ばれるが、有限次元の場合の標準座標に関して、$X_H=(\partial H/\partial p_i,\ \partial H/\partial q^i)$かつ（$(q(t), p(t))$）が$X_H$の積分曲線⇔Hamiltonの方程式系が成り立つ。これによってベクトル場X_Hは非線形方程式系であることにより、先の三つ組みの呼称と同一名にしてHamilton系と呼んでよい。ここでは最初にこの系の可積分性から始める。

１．完全積分可能系

非線形方程式系としてのX_Hの可積分性に関しては、最初に述べた素朴な概念のうちの一つ、解の明確な挙動性の要求を取り除いたものとして次の定理がある：

（１）**Liouvilleの定理（完全積分可能性：１８３８[２]）**　２n次元の相空間の系において、n個の関数的に独立な包合的（in involution）運動定数が存在すれば、その系は求積解をもつ。

本定理の厳密な記述と用語の詳細な説明は[２]および[１]にあるからここでは省略する。運動定数はまた運動方程式の積分とも呼ばれる。この定理は有限次元に対するものであるが、相空間が無限次元の場合は、上の定理にあるn個の運動定数（Hをその内の一つとする）に関するベクトル場の相空間（ヒルベルト空間やバーナッハ空間における部分空間としての）の一点における集合がその点における接空間の基底をなすならば、求積解をもつ。いずれにせよ、この定理は方程式系が求積法によって解ける最も簡単な場合を与えている。今日までこの種の方程式系に対する本質的に唯一の積分可能性を保証した命題と言えるであろう。近年この定理は「Hamilton系の（完全）積分可能性の定義」として用いられることが多い。すなわち、Hamilton系が（完全）積分可能であるとはその系の解法が求積法に帰着できることを意味する。(**余談**：Liouvilleの名のついた定理は、有界な整関数は定数である（１８４４、複素関数論）や極のない楕円関数は定数である（１８４７、楕円関数論）の他に、上記以外のHamilton系に関する基本定理：Hamiltonのベクトル場の流れ（flow）は保測変換である（[１]）がある。その他彼は積分方程式の解法やLamé方程式の解の導出にも貢献している。)

Liouvilleの定理の立場から完全積分可能性が示された例として、最初にKdV方程式に対して論文[３]、[４]、[５]等あるが、これまで参考した文献[１]はこれらの総合的解説を含むとともにその他の場に関する方程式系の無限次元Hamilton系としての議論がなされていて興味深い。また文献[２]はKdV方程式に対してその完全可積分性の要領よい展望がなされている。

（２）**Liouvilleの定理の一般化**　次にこの求積法的意味で同じ延長線上にある考え方に触れておく。

この考えはLiouvilleの定理で扱われる系よりも複雑なHamilton系の完全可積分性を示すもう一つの判定法である。それは対称的Hamilton系に対する被約相空間（reduced phase space）の方法に基づいて行われるが、この空間の構成は運動量写像の概念に基づいて定式化される（詳細は[６]、[１]を参照)。ここでは要約にとどめる。形式的には商空間$P_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$により定義される。ここに、$J$：$P \to \mathfrak{g}^*$（リー群$G$に対するリー環$\mathfrak{g}$の双対空間）は$P$上の$G$のシンプレクティック群作用に対する$\mathrm{Ad}^*$－同変運動量写像（$\mathrm{Ad}^*_g$は$\mathfrak{g}^*$上の$G$の余随伴作用で、$(g, \mu) \to \mathrm{Ad}^{*\,-1}_g \mu$, $g \in G, \mu \in \mathfrak{g}^*$によって定義されたもの)、$G_\mu = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}^{*\,-1}_g \mu = \mu\}$（$\mu$の等方群（固定部分群））とする。$P_\mu$は標準射影：$J^{-1}(\mu) \to P_\mu$ が滑らかな沈め込み（submersion）のとき、被約相空間と呼ばれる。

G：可換（または$\mu = 0 \Rightarrow G_\mu = G$）かつ$G$の次元＝$k \Rightarrow$運動量写像$J$は包合的な$k$個の運動定数を表し、$\dim P_\mu = \dim P - 2k$。$P_\mu$は包合的運動定数の存在により、$\dim P = 2k$、故に$P_\mu$ は１点からなる被約相空間となる。これは古典的結果、すなわちLiouvilleの定理の被約相空間の言葉による言い換えである。(非可換群または無限次元可換群Gに対しても同じ定義によって系の完全積分可能性が示される。）これをまとめれば、

M-F-Mの定理（完全積分可能性：１９７８[７]および[１]）対称性をもったHamilton系はその被約相空間が１点であれば、完全積分可能である。

M-Fとは論文[７]の２人の著者名Mishchenko と Fomenkoを意味し、最後のMは文献[１]の著者 Marsdenを指す。被約相空間はその構成上、複雑なHamilton系を生み出す方法と考えられるから、この定理はLiouvilleの定理の直接的適用に代わってかなり多くのHamiltonn系の完全可積分性を示すことができよう、と思われる。この意味においてM-F-Mの定理はLiouvilleの定理の一つの拡張と考えられる。

この定理の応用は、例えばCalogero系（$P = T^* R^n$（R^nの余接バンドル)、ハミルトニアンを

$$H(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n) = \frac{1}{2}\sum p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} 1/(q_i - q_j)^2$$

とするn個の粒子の運動系）に対して同定理の定式化後に早くも成果を得ている（[８])。また戸田格子に対しても定理の適用がなされた。両者に関しては講義録[９]と[１０]に詳述されている。これらの例における完全可積分性の証明は関数的に独立な包合的運動定数を、被約相空間P_μの構成手続きを通して与えることによって遂行される。

しかしながら、上記二つの定理の有用性は求積法が適用できる方程式系に限られるから、それ以外の系に対しては求積法以外の解法に基づいた積分可能性の意味を考えねばならない。それが本論の一つの目標でもあるが（次章II)、その前にこのことの必要性を決定付ける定理の存在を述べておく。

２．非完全積分可能系

完全積分可能性の考えは一般的に考えられる積分可能性に比べて狭くて厳しい。この意味では非線形方程式の殆ど多くは‘完全性’を失う（完全性とは解法の求積法的意味を強調して、他の可積分性と区別する言葉と解釈する)。この節では完全性のない系（何らかの意味で可積分、または全く積分不能系）に関して触れておきたい。紙数の制限で簡潔にとどめる。

（１） **擬可積分性**　完全可積分性の枠外にある方程式中のあるものは、その解が完全積分可能な方程式の解によって近似可能なものがある。例えば、一般の浅水路の孤立波、流体運動、光ファイバーのパルス等はそれぞれKdv方程式、非線形Schrödinger方程式等の解によって近似される。このような系の解の完全積分可能系の解による近似可能性を、ここでは擬完全可積分性、その系を擬完全可積分系と呼ぶことにする。擬完全可積分系は先の二定理の適用外の意味で完全可積分系でなく、完全性の

ない系であるが、厳密解や真の解の構成可能性によっては広義の可積分系となるし（例：文献［１１］の手法に基づく［１２］は浅水の孤立波等の複雑な解の構成に成功、それらの系はここで言う広義可積分系）、また全く非可積分系かもしれない余地を残している。特に非完全可積分系に対する非可積分性に関して次に触れる。

（２） **非完全可積分性** Hamilton 系における非完全積分可能性に関して三つの定理が知られている（［１３］）。これらは天体力学や宇宙モデルの方程式系から得た結果で、実 Hamilton 系を周期軌道上で考えた **Poincaré の定理**（１８９２）、複素 Hamiton 系を周期軌道の近傍で考え、モノドロミー群による議論に基づいた **Ziglin の定理**（１９８２－８３）、実 Hamilton 系のホモクリニックな軌道上の微分幾何学的考察としての **Lerman の定理**（１９９１）である。これらはいずれも完全積分不可能性（求積解の非存在）をそれぞれが対象とする Hamilton 系において示している。数学的力学系としての１階非線形の Hamilton 系にかなり多くの例が存在すると見られる。例えば、H.Yoshida の例や Landau-Lifchitz の例等がある（定理と例の詳細およびこれらの関連文献については上記［１３］参照）。

本章１の議論の要約：Hamilton 系の可積分性を考えるとき、完全積分可能性を基準としてこれら系の全体を、完全可積分系と非完全可積分系の二つのカテゴリーに分類する。後者には前者の解によって近似される系（擬可積分系）も存在するが、全体として完全性のない系である。

しかしながら、非線形方程式系の解の構成を積分と見なすとき、これを完全積分の考えだけに留めておくことはない。事実、Hamilton 系において非求積解が近年多数見出されていることから積分の可能性の考えは検討さるべきであろうと思われる。その試みとして、まず完全積分可能性以外の広義の積分可能性の定義を与えることが必要であり、できればその新しい可積分性の概念が一般の系の可積分性の判定のために有効な命題を生み出すに至ることが望ましい。すなわち、Liouville や M-F-M の定理と同様な働きをもつ定理または判定基準の確立が望まれる。

次章でそのための第一歩として、広義の積分可能性（の一つ）を考えてみる。

II　可積分系の一般的特徴に基づく広義可積分性の概念

初めに完全積分可能系を除く可積分系の積分可能性の一つの特徴付けを古典的例によって検証する。この特徴は可積分系に殆ど共通したもので、この特徴を広義の積分可能性が満たす条件として要請する。次に最初の例に対する有限次元の Lax 形式による一般化された系においてもこの広義可積分性の条件が満たされることが確認される。よってこの特徴をもって広義可積分性の定義として採用することは（無限次元の場合を除いて）殆ど妥当とされよう。

この章（と III 章）における議論に関しては、例えば、少なくとも文献［１４］－［１７］が基本的で、かつ今後の積分可能性を考察する上で有益と考えられる。以下において広義の積分可能性を今後単に積分可能性と呼び、これをもった系を積分可能系と呼ぶ。

１．積分可能系

古典的な力学では特殊な場合を除いて積分可能な系は少ないとされていた。質点系では３体問題は

正三角形解や直線解といった特殊な場合の解しか得られず、剛体の回転運動ではこまの問題は２，３の特別なものを除いて積分不能と思われたが、近年における KdV 方程式や非線形格子理論の発展に伴い、これらの解析が可能になった。それには楕円関数やテータ関数等のリーマン面上での代数幾何学的議論の導入が果たした役割は大きい（[１１]参照)。

ここでは可積分性を定義する上で古典的な例としての重心の周りの剛体の回転運動を取り上げることが初等的であり、またその後に繋がる議論の展開にとって好都合である。

重心の周りの剛体の回転運動の方程式： $d\vec{H}/dt=\vec{G}$ (A)， $\vec{H}={}^t[I_1\,\omega_1\,I_2\,\omega_2\,I_3\,\omega_3]$：重心に関する角運動量, I_i：主慣性モーメント, ω_i：角速度成分（$i=1,2,3$）, $\vec{G}={}^t[(I_2-I_3)\,\omega_2\,\omega_3\ \ (I_3-I_1)\,\omega_3\,\omega_1\ \ (I_1-I_2)\,\omega_1\,\omega_2]$：重心に関する外力のモーメント。方程式 (A) のスケール改変による簡略化方程式： $\dot{u}_1=u_2\,u_3$, $\dot{u}_2=u_3\,u_1$, $\dot{u}_3=u_1\,u_2$ (B)（Nahm 方程式の特別な場合)

方程式 (B) からの帰結事項は重要である。簡潔に述べよう：

$\dot{u}_1^2-\dot{u}_2^2$, $\dot{u}_1^2-\dot{u}_3^2$の時間微分をとる ⇒ $u_1^2-u_2^2=C_1$, $u_1^2-u_3^2=C_2$, C_1, C_2：保存量 （１）

(B) の第一式の両辺の２乗をとり、この右辺に式（１）のu_2^2, u_3^2 を代入 ⇒ $\dot{u}_i^2=(u_1^2-C_1)\cdot(u_1^2-C_2)$。ここで、$\dot{u}_1=y$, $u_1=x$ ⇒ $y^2=(x^2-C_1)(x^2-C_2)$：代数曲線 （２）を得る。このとき、$dt=dx/y$：曲線（２）の上の正則微分形式。曲線（２）は楕円曲線の標準形：$y^2=4x^3-g_2\,x-g_3$ に書き換えられる。

一方、Weierstrass の楕円関数の一つ、２重周期$\wp$－関数

$$\wp(u)=\wp(u+2m\omega_1+2n\omega_3)\quad(2\omega_1,\ 2\omega_3：基本周期,\quad m,n：整数\ (\neq 0))$$

は方程式 $\wp(u)'^2=4\wp(u)^3-g_2\,\wp(u)-g_3$ を満たす。このとき、$dt=d\wp/\wp'=du$ （３）

すなわち、解は楕円関数$\wp$によって表され、方程式（３）は原方程式 (B) の線形化である。

他の古典的例においても上の結果に類似する。また、KdV 方程式 $4u_t-6uu_x-u_{xxx}=0$ も$\wp$によって $u=-2\wp+\kappa$（κ：定数）と表される。

よって、結果（１）－（３）は少なくとも古典的な非線形方程式を含む可積分系に共通する特徴と見なして、一般化された可積分性の概念または定義とすべきものは次の３条件が要請される：

（１）から、(C-１)　**多数の保存量が存在**
（２）から、(C-２)　**代数曲線（高次元の場合は代数多様体）または何らかの代数幾何学的対象が存在**
（３）から、(C-３)　**解の表示が（少なくとも原理的に）可能**

可積分性の定義に要請された３条件は更に有機的な繋がりを得て定式化されるとき、定義の完成と与えられた系に対する可積分系の判定基準としての定理に結実することが期待される。

２．可積分系の一般化

次に前節で見たこれらの条件を満たす古典的な有限次元の非線形方程式の一般化を Lax 形式によって表す。ここでも条件（C－１）—（C－３）が満たされることが確かめられる。以下大略：

$dA/dt=[A,B]$, $A(w)=A_0+wA_1+\cdots+w^n A_n$, $B(w)=B_0+wB_1+\cdots+w^m B_m$ ：

$k\times k$ 行列係数多項式 ⇒ $d/dt\,(\mathrm{tr}(A^p))=0$, $\forall p$。よって、多項式 tr（A^p）の係数 ＝ 一定（保存量)、すなわち (C-１) が成り立つ。上記の例の場合：$p=2$ 。

また、固有方程式 det（$yE-A(w))=0$ の定める代数曲線上の直線バンドルを考慮 ⇒ 代数幾何

学的議論が可能。よって、(C-2) が成り立つ。

最後に示されることは、種数 g のリーマン面上の直線バンドル全体の空間は複素トーラス (= C^g /格子群：リーマン面のヤコービ多様体) より、この空間内で直線バンドルが t と1次関係にある ⇒ 方程式は積分可能 (Griffiths の定理：1985 [18])。解はテータ関数を用いて表される。よって、(C-3) が成り立つ。

無限次元の場合の方程式系の一般化は上と同様に Lax 形式で表示できることはよく知られているが、無意味な一般化よりもそれが可積分系であることが重要である。ここでの意味の可積分性が成り立つと思われるタイプは種々考えられるが、これらは次章 III で触れる。

III 普遍的な可積分系とその可積分性

無限次元の場合の一般化は Lax 形式で与えられるが、この章の前半は可積分系としても、また現実的な系としても有望なものがいくつか挙げられる。後半は、これまでの議論のまとめと (予想的) 結論、更に進んで統一的な系の意味も込めて普遍的な可積分系に関する展望的な課題を提起する。

1. いくつかの可能なタイプ

現実性をもった可積分系として一般性があると考えられるものの中から、次の三つの場合を挙げておく：

(1) **高階微分作用素の場合** $dA/dt=[A,B]$, A, B: 高階微分作用素

例. $A=-d^2/dx^2+u$, $B=4d^3/dt^3-3ud/dx-3u_x$ ⇒ $u_t-6uu_x+u_{xxx}=0$: KdV 方程式

(2) **1階行列微分作用素の場合** $dA/dt=[A,B]$, $A=d/dx+C(w)$: 1階行列微分作用素, $B(w)$, $C(w)$: 行列係数多項式。A, B の変形をそれぞれ $A\to A'=\partial/\partial x+C(w)$, $B\to B'=\partial/\partial t+B(w)$ として、右辺 = 0: 共変導テンソル A',B' を伴う2次元空間 R^2 におけるバンドル上の接続曲率の消失方程式。

例. $C(w),B(w)$ を適当に定める。定め方は一意的でない (略) ⇒ 非線形 Schrödinger, KdV 等の方程式を得る。

(3) **(2) の一般化：反自己双対 Yang-Mills (ASDYM) 方程式の場合** (2) の零曲率条件を採用して、共変導テンソル $\nabla_t=\partial/\partial t+A_t$, その他を伴う4次元空間 R^4 におけるバンドル上の接続曲率の消失方程式群の一種としての ASDYM 方程式 (ゲージ・ポテンシャルに対する1階非線形偏微分方程式系) は

$$[\nabla_t,\nabla_y]=0\ ,\ [\nabla_x,\nabla_z]=0\ ,\ [\nabla_t,\nabla_x]-[\nabla_y,\nabla_z]=0$$

またはその単独化方程式

$$[\nabla_y-w\nabla_x,\ \nabla_t-w_z]=0$$

で表される。

例. ASDYM 方程式の簡約 (次元低下) ⇒ 多くのよく知られた方程式系を含む可積分系が得られるが、特に Painlevé 方程式が得られることは興味深い。

(3)′ **SDYM (自己双対 Yang-Mills) 方程式の場合** (3) の場合に類似の結果が得られる (略)。

(4) **非可換空間上の Lax 表示系の場合** 非可換空間上で一連の Lax 表示をもつ系の生成法とこれらの可積分性に関する最近の研究で、上記の (3) や (3)′ の枠内で精力的に進められている。特

に、積分可能性については大きな関心が寄せられるとともに、ソリトン系列の様々な方程式の非可換化は新しい何かが生まれてきそうな雰囲気を感じさせる現状である。(**注**：本研究集会のおよそ１ヶ月後、戸田晃一氏（富山県立大）からこの方面に関する最近発表された氏の論文を数編戴いた。謝意を表するとともに、これらの論文は本報告の参考文献リストに記載されている（[１９]))。

２．結論と課題の展望

以下に述べることは、これまでに得た議論からの結論とそれを引き継ぐ課題の簡略な展望である。

（１） **結論と予想**　最初に完全積分可能性に関して、Liouville の定理とそのより幾何学的で複雑な系に対応し得ると見られる M－F－M の定理を眺めた。後者は前者の一種の拡張と見られるが、非完全可積分系が存在することによって、これらの定理に対応する系は特殊なものと見てよい。そこで、完全でない系の中で広義の可積分系を対象にそこに共通する積分可能性の特徴を抜き出して、これら特徴を広義の可積分性の定義または概念として採用可能であろうとした。定義に要請可能な三つの特徴の緊密かつ本質的な関係とそれに関連した問題は残されてはいるが、これらの特徴は少なくともよく知られた古典的力学系や場の方程式の可積分性を説明するものである。

次にこれらの可積分系を含む普遍的な可積分系として有望なものをいくつかの Lax 形式で与えたが、それら全てが一般的な形式として可積分性の特徴を備えたものであるかは未検証である。しかしこれらは特殊な可積分系を含み、特に１の場合（３）または（３）′は現在のところ、現実的な可積分系の方程式群を簡約手法（次元低下法）によって多数導くことのできる最も一般的な表示系と見られる。ただし、真の普遍な系であるかは今のところ明らかでない。それは既知の可積分系で、簡約不能または含まれないものがあるかもしれないからである。一方 (A) SDYM 方程式の解は既知であるから（例えば、[２０] 参照)、これらから得られる特殊な系の解は比較的容易に見出されるが、それらの中には他に求積解をもつものがあっても不思議ではない。

（２） **将来に望まれるもの**　統一系としての真の普遍系が見出されることが最も望ましいが、その前に可積分系の新たなカテゴリーの導出のためにも可積分性の他の新しい定義の試みがあっていいだろう。今後、３体問題をはじめ、複雑系、完全な Einstein と Yang－Mills の両方程式の真の解の獲得は可積分性の概念の拡張にとって決定的となろう。数学は繰り返し概念の枠を拡大し、その発展構造は階層的かつ弁証法的であることを想起したい。

参　考　文　献

［１］R.Abraham and J.Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., Benjamin(1978).

［２］V.Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics No.60, Springer(1978).

［３］V.E.Zakharov and L.D.Faddeev, Kortewe g －de Vries equation：A completely integrable Hamiltonian system, Funct. Anal. Appl. 5, pp. 280－287(1971).

［４］S.P.Novikov, The periodic problem for the Korteweg－de Vries equation I, Funct. Anal. Appl.8,pp. 236－246(1974).

［５］P.D.Lax, Periodic solutions of the KdV equation, Comm.　Pure & Appl. Math. 28, pp.141

−188(1975).

[6] J.Marsden and A.Weinstein, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, Rep.Math. Phys., 5, pp. 121−130(1974).

[7] A.S.Mishchenko and A.T.Fomenko, Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems, Funct. Anal. Appl. 12, pp.349−367(1978).

[8] D.Kazhdan,B.Kostant and S.Sternberg, Hamiltonian group action and dynamical systems of Calogero type, Comm. Pure & Appl.Math., 31, pp. 481−508(1978).

[9] J.Moser, *Various aspects of integrable Hamiltonian systems*, CIME Lectures, Bressanone, published in Dynamical Systems, Birkhäuser(1980).

[10] J.Marsden,*Lectures on Geometric Methods in Mathematical Physics*,CBMS−NSF Regional Conference Series in Appl. Math. No. 37., Soc. for Industrial and Appl.Math.(1981).

[11] E.D.Belokolos, A.I.Bobenko, V.Z.Enol'sii, A.R.Its, and V.B.Matveev, *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, Spriner(1994).

[12] M.S.Alber, R.Camassa, Y.N.Fedorov, D.D.Holm and J.E.Marsden, The Complex Geometry of Weak Piecewise Smooth Solutions of Integrable Nonlinear PDE's of Shallow Water and Dym Type, Comm. Math. Phys., 221, pp. 197−227(2001).

[13] J.J.M.Ruiz, *Differential Galois Theory and Non−Integrability of Hamiltonian Systems*, Progress in Mathematics 179, Birkhäuser(1999).

[14] V.E.Zakhalov, *What is integrability ?* Springer series in non-linear dynamics, Springer (1991).

[15] L.J.Mason and N.M.J.Woodhouse, *Integrability, self-duality, and twistor theory*, Oxford Univ. Press(1996).

[16] N.J.Hitchin, G.B.Segal and R.S.Ward, *Integrable Systems : Twistors, Loop Groups, and Riemann Surfaces*, Oxfor Graduate Texts in Mathematics 4, Oxford Science Publ.(1994).

[17] L.J.Mason and Y.Nutku(eds.), *Geometry and Integrability*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 295, Cambridge Univ. Press(2003).

[18] P.A.Griffiths, Linearlizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations, Amer. J. Math. 107, pp.1445−1483(1985).

[19] K.Toda(with M.Hamanaka), (a) Extentions of Soliton equations to non−commutative (2+1) dimensions, Proc. of Workshop on Integrable Theories, Solitons and Duality, 12pp. (2002). (b) Towards noncommutative integrable systems, Phys. Lett. A 316, pp. 77−83(2003). (c) Noncommutative Burgers Equation, J. of Phys. A (to appear in 2004). (d)Towards Non−commutative Integrable Equations, Proc.of Inst.Math. of NAS, Ukraina(to appear in 2004).

[20] Y.Choquet-Bruhat and C.Dewitt-Morette, Analysis, Manifolds and Physics, Revised ed., North−Holland(1882).