

Multi-Component NLS for Spinor Condensates

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 和達研究室 家田 淳一 (Jun'ichi Ieda)*

Department of Physics, University of Tokyo

E-mail: ieda@monet.phys.s.u-tokyo.ac.jp

概要

可積分な行列型非線形シュレーディンガー方程式からのリダクションで、内部自由度のある原子気体のボース・アインシュタイン凝縮のダイナミクスを記述するモデル方程式を導出した。2-ソリトンの特徴的な振舞いを議論する。

1 Introduction

アインシュタイン (1925) によって予言されたボース・アインシュタイン凝縮 (BEC) は、ロンドン (1938) による He-II としての解釈、オシェロフら (1972) による ^3He の超流動の発見、によって存在は確立された。しかし、BEC をより予言に近い形で実現したのは、米国 3 グループ (JIRA, MIT, Rice 大学) の実験である。1995 年、10nK という超低温でアルカリ金属蒸気 (^{87}Rb , ^{23}Na , ^7Li) を磁場によってトラップすることにより、制御可能な状態で観測に成功した。この系の注目すべき点として、特に次の二点が挙げられる。

- 系を支配するほとんど全てのパラメータが実験的に制御可能
- 短距離型の弱い相互作用をする系で平均場理論がよく実験を説明する

はじめの点に関しては、本国を含む世界中のグループが鎬を削っており、原子種の変更、および混合、外部磁場やレーザー光の組み合わせなどによって、凝縮体の形状、次元性、内部自由度、さらには原子間相互作用の大きさまでを自在に選択することができるようになっている。これまでに行われた実験は、BEC の物性そのものを調べる基礎的なものから、原子レーザー、量子渦形成、光格子中の超流動・絶縁体転移、多成分系における内部自由度間のダイナミクスなど応用的なものまで枚挙に暇がない。また、それぞれの実験が驚くほど高い精度、再現性をもって観測されるという点も特筆に値する。

二つ目に、既に長い研究の歴史を持つ、弱く相互作用する希薄ボース気体 (WIDBG) の理論が直接適用可能な系であるという利点を持つ。これは、気体状態のまま凝縮するため希薄極限が成立しており、十分低温では 99% 以上の原子が凝縮相にあるためである¹。実験開始当初から理論的な予測と実験結果の定量的な一致が数多く報告されており、その中でもグロスとピタエフスキーによる GP 方程式は、凝縮体のダイナミクスを記述する基礎方程式としてその有効性が実証されてきた。ひとたび BEC が実現すると、凝縮体を構成する個々の原子 ($10^5 \sim 10^7$ 個) はコヒーレンスを獲得し、原子雲全体があたかも巨大な単一原子であるかのように振舞う。この結果生じる巨大原子の波動関数は「巨視的」であり、平均場的な取り扱いが可能となる。BEC が巨視的量子現象として量子力学的世界の拡大鏡の側面をもつとして注目を集めて

*本研究は、現在アリゾナ大学光科学センターに所属する宮川貴彦氏との共同研究によって得られた成果である。

¹この事情は、液体ヘリウムが強い相互作用のため絶対零度近くでも全体の 10% 程度が凝縮するにとどまると極めて対照的である。

いる理由である。その一方で、GP 方程式は、原子間相互作用に起因する非線形項をもつ非線形シュレーディンガー方程式 (NLSE) でもある。このため、非線形波動の観点からのアプローチが重要性を帯びてくる。以上述べてきたように、BEC 研究の現場では、理論と実験がお互いに刺激しあい、現在も精力的にその探求が推し進められている²。

2002 年、米 Rice 大学、仏 ENS の両グループにより、レーザー光で形成した導波管中で凝縮体を生成させたところ、長時間にわたって波形を変えない孤立波として伝播したという報告がなされた [4, 5]。自己収束 NLSE がブライトソリトン解を持つことはよく知られており、彼らはこれを物質波のブライトソリトンとして解釈している。これらの実験は、系の原子間相互作用が引力であり、ダイナミクスが 1 次元的である、といったブライトソリトンの生成条件が満たされていることを示している。物質波ソリトンは、気体原子の BEC 実現の過程で派生してきた原子波光学の分野において、原子レーザー、コヒーレント物質輸送などその応用が期待されおり、さらには量子情報・通信の素子としても注目を集めはじめた。こういった将来の応用面を考えた場合、気体原子の BEC にはもうひとつ長所がある。それは、原子が内部自由度もち、多成分のチャンネルを取り扱うことができるという点である。この内部自由度とその成分間の結合を利用した量子計算のスキームが、既にいくつかの理論グループにより提案されている。

本稿では、現在ホットなこれら 2 つの話題—物質波ソリトンと内部自由度系—を融合させた状況を想定し、多成分 NLSE を用いて内部自由度を有する凝縮体のダイナミクスを解析する。§2 ではモデルを紹介し、§3 において解析手法として用いた逆散乱法について簡単にまとめ、1-ソリトン解を与える。さらに §4 において 2-ソリトンの衝突のうち特徴的なものとして、内部自由度間のスイッチングをとりあげ、§5 で結論を述べる。

2 $F = 1$ Spinor Condensate

今回我々が取り扱うのは、多くのアルカリ原子がそうであるような、 $F = 1$ 超微細基底状態である。この状態にある凝縮体は、3 成分スピノールと呼ばれる超微細スピン空間で回転対称なベクトル秩序パラメーターで特徴付けられる [6, 7]。スピノール凝縮体は、一般的な多成分系から区別される³。外部磁場がない場合、エネルギー的に縮退した 3 つの内部原子状態 $|F = 1, m_F = 1\rangle$, $|F = 1, m_F = 0\rangle$, $|F = 1, m_F = -1\rangle$ があり、それらは 3 成分の場合 $\Phi(x, t) \equiv \{\Phi_1(x, t), \Phi_0(x, t), \Phi_{-1}(x, t)\}^T$ によって表される。ここで上付きの T で転置を、 \dagger でエルミート共役をそれぞれ表すものとし、全粒子数 N_T を与えるように規格化条件 $\int dx \Phi(x, t)^\dagger \cdot \Phi(x, t) = N_T$ を課す。エネルギー汎関数は

$$E_{MF} = \int dx \left(\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \Phi_\alpha^* \cdot \partial_x \Phi_\alpha + \frac{c_0}{2} \Phi_\alpha^* \Phi_\alpha^* \Phi_{\alpha'} \Psi_\alpha + \frac{c_2}{2} \Phi_\alpha^* \Phi_{\alpha'}^* \hat{f}_{\alpha\beta} \cdot \hat{f}_{\alpha'\beta'} \Phi_\beta \Phi_{\beta'} \right) \quad (1)$$

で与えられる。ここで $\{\alpha, \beta, \alpha', \beta' = 1, 0, -1\}$ 、上付きの $*$ は複素共役、積分区間は全空間にわたり、スピン演算子 $\hat{f} = \{\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{f}_z\}^T$ には以下の表式を用いる。

$$\hat{f}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{f}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{f}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

式 (1) の第一項が運動エネルギー、第二項がスピンの依存しない相互作用エネルギー、第三項がスピンの依存した相互作用エネルギーに対応している。スピノール凝縮体 $\Phi(x, t)$ の時間発展方程式は、変分法

$$i\hbar \partial_t \Phi_\alpha(x, t) = \frac{\delta E_{MF}}{\delta \Phi_\alpha^*(x, t)} \quad (3)$$

²初期の実験と理論を集めたレビューとして [1] を挙げる。最近、教科書として [2] や [3] も出版された。

³詳細は、最近邦訳も出版された P. マスター氏の本 [3] などを参照してほしい。

により、以下のように与えられる。

$$i\hbar\partial_t\Phi_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Phi_1 + (c_0 + c_2)\{|\Phi_1|^2 + |\Phi_0|^2\}\Phi_1 + (c_0 - c_2)|\Phi_{-1}|^2\Phi_1 + c_2\Phi_{-1}^*\Phi_0^2 \quad (4)$$

$$i\hbar\partial_t\Phi_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Phi_0 + c_0|\Phi_0|^2\Phi_0 + (c_0 + c_2)\{|\Phi_1|^2 + |\Phi_{-1}|^2\}\Phi_0 + 2c_2\Phi_0^*\Phi_1\Phi_{-1} \quad (5)$$

$$i\hbar\partial_t\Phi_{-1} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Phi_{-1} + (c_0 + c_2)\{|\Phi_{-1}|^2 + |\Phi_0|^2\}\Phi_{-1} + (c_0 - c_2)|\Phi_1|^2\Phi_{-1} + c_2\Phi_1^*\Phi_0^2 \quad (6)$$

ここから先、我々は結合定数が $c_0 = c_2 < 0$ を満たす場合のみを取り扱う⁴。この設定は系に高い対称性を導入し、以下に見るように完全可積分であるための条件となっている。その一方、現在の実験技術からすると、全光学的フェッシュバツハ共鳴 [8, 9] を駆使することで近い将来実現が可能な仮定でもある。適当なスケール変換、および置き換え $\phi_{\pm 1} = \Phi_{\pm 1}$, $\phi_0 = \Phi_0/\sqrt{2}$ ののち、(4)-(6) は以下のように書き換えられる。

$$i\partial_t\phi_1 = -\partial_x^2\phi_1 - 2\{|\phi_1|^2 + 2|\phi_0|^2\}\phi_1 - 2\phi_{-1}^*\phi_0^2 \quad (7)$$

$$i\partial_t\phi_0 = -\partial_x^2\phi_0 - 2\{|\phi_{-1}|^2 + |\phi_0|^2 + |\phi_1|^2\}\phi_0 - 2\phi_0^*\phi_1\phi_{-1} \quad (8)$$

$$i\partial_t\phi_{-1} = -\partial_x^2\phi_{-1} - 2\{|\phi_{-1}|^2 + 2|\phi_0|^2\}\phi_{-1} - 2\phi_1^*\phi_0^2 \quad (9)$$

ここで得られた方程式系は、

$$Q = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_0 \\ \phi_0 & \phi_{-1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

と 2×2 行列の形に置くことによって、行列型非線形シュレーディンガー方程式 (MNLSE)

$$i\partial_t Q + \partial_x^2 Q + 2QQ^\dagger Q = 0 \quad (11)$$

に埋め込むことができる。(11) 式を含むより一般の MNLSE は、逆散乱法 (ISM) などの手法によって詳しく解析されており、完全可積分系であることが示されている⁵。MNLSE の立場からすると、式 (10) はもともと 4 つあった自由度を 3 成分に減らしているという意味でリダクションを行ったことに相当する。リダクションを行っても系の可積分性は保たれるため、方程式系 (7)-(9) も完全可積分であることが示された。その他のリダクションとしては、

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

によってマナコフ模型

$$i\partial_t q_1 + \partial_x^2 q_1 + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_1 = 0 \quad (13)$$

$$i\partial_t q_2 + \partial_x^2 q_2 + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_2 = 0 \quad (14)$$

が得られることが知られている。我々のスピノール模型との違いは成分間の結合の仕方である。マナコフ模型ではどの成分も同等であり通常の多成分系であるのに対し、スピノール模型の場合はスピン空間での回転対称性に由来する制限から 0 成分と ± 1 成分がそれぞれ異なる役割を果たすことになる。

これから、MNLSE に対して拡張された逆散乱法を用いて、方程式系 (7)-(9) の持つソリトン解について議論する。

⁴結合定数の c_0 と c_2 が共に負という状況は、スピんに依存しない平均場相互作用が引力で、スピン交換相互作用が強磁性的であることに対応している。

⁵MNLSE の N -ソリトン解は土田と和達によつてはじめて得られた [10, 11]。

3 Inverse Scattering Method for $F = 1$ Spinor Model

この節では、 $F = 1$ スピノール模型のソリトン解を ISM によって求める。 2×2 行列型関数 Q の各成分が $x = \pm\infty$ において十分速く 0 になるという境界条件のもとで、次のザハロフ・シャバットの固有値問題

$$\partial_x \begin{bmatrix} \Psi_I \\ \Psi_{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k^* I & 2Q \\ -2Q & -k^* I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_I \\ \Psi_{II} \end{bmatrix} \quad (15)$$

を考える。ここで波動関数 Ψ_I 、および Ψ_{II} は 2×2 行列に値を持つ関数で、複素数 k はスペクトルパラメータ、 I は 2×2 単位行列である。また行列 Q は、この線形問題においてポテンシャルの役割をしている。土田・和達の求めた公式 [10, 11] から、一般の N -ソリトン解は

$$Q(x, t) = \underbrace{(II \cdots I)}_N S^{-1} \begin{pmatrix} \Pi_1 e^{x_1} \\ \Pi_2 e^{x_2} \\ \vdots \\ \Pi_N e^{x_N} \end{pmatrix} \quad (16)$$

となる。ここにあらわれた、 $2N \times 2N$ 行列の S は、

$$S_{ij} = \delta_{ij} I + \sum_{l=1}^N \frac{\Pi_i \cdot \Pi_l^\dagger}{(k_i + k_l^*)(k_j + k_l^*)} e^{\lambda_i + \lambda_l^*}, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (17)$$

で与えられており、同時に以下の記号も導入した。

$$\Pi_i = \begin{pmatrix} \beta_i & \alpha_i \\ \alpha_i & \gamma_i \end{pmatrix}; \quad \|\Pi_i\|_2 \equiv \sqrt{2|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 + |\gamma_i|^2} = 1 \quad (18)$$

$$\lambda_i \equiv \chi_i(x, t) = k_i x + i k_i^2 t - \epsilon_i \quad (19)$$

Π_i は、定義より Q と同じ配置を持ち、二乗ノルムの意味で 1 に規格化された行列である。今後この行列 Π_i を、マナコフ模型のときに倣い、分極行列と呼ぶことにする。スピノール模型では、この行列が各ソリトン内における $\{1, 0, -1\}$ 成分の分布、および相対位相を決定する。複素定数 k_i は離散固有値であり、ポテンシャル Q の作る i 番目の束縛状態にそれぞれ対応する。全ての時間・空間依存性は $\chi_i(x, t)$ を通してのものに限られ、あとで見るように $\chi_i(x, t)$ の実部は i 番目の包絡ソリトンの座標を、同じく虚部は i 番目のソリトンが伝送する正弦波の座標を表している。また、 $\chi_i(x, t)$ の中にある ϵ_i は、ソリトン同士の初期変位を調整するのに用いられる実定数である。

スピノール模型 (7)-(9) は完全可積分系であるから、無限個の保存量を有する。ここでは特に物理的に重要なものを列挙する。

全粒子数

$$N_T = \int dx n(x, t); \quad n(x, t) = |\Phi_1|^2 + |\Phi_0|^2 + |\Phi_{-1}|^2 = \text{tr}\{Q^\dagger Q\} \quad (20)$$

スピン変調

$$F_+ = \int dx m_+(x, t); \quad m_+(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_1^* \Phi_0 + \Phi_0^* \Phi_{-1}] = \{Q^\dagger Q\}_{12} \quad (21)$$

$$F_- = \int dx m_-(x, t); \quad m_-(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_0^* \Phi_1 + \Phi_{-1}^* \Phi_0] = \{Q^\dagger Q\}_{21} \quad (22)$$

全運動量

$$P_T = \int dx p(x, t); \quad (23)$$

$$p(x, t) = -i\hbar [\Phi_1^* (\partial_x \Phi_1) + \Phi_0^* (\partial_x \Phi_0) + \Phi_{-1}^* (\partial_x \Phi_{-1})] = -i\hbar \cdot \text{tr}\{Q^\dagger Q_x\} \quad (24)$$

全エネルギー

$$E_T = \int dx e(x, t); \quad (25)$$

$$\begin{aligned} e(x, t) &= \frac{\hbar^2}{2m} [|\partial_x \Phi_{-1}|^2 + |\partial_x \Phi_0|^2 + |\partial_x \Phi_1|^2] \\ &\quad - c \left[|\Phi_1|^4 + \frac{1}{2} |\Phi_0|^4 + |\Phi_{-1}|^4 + 2|\Phi_0|^2 \{ |\Phi_1|^2 + |\Phi_{-1}|^2 \} + (\Phi_1^* \Phi_{-1}^* \Phi_0^2 + h.c.) \right] \\ &= c \cdot \text{tr} \{ Q_x^\dagger Q_x - Q^\dagger Q Q^\dagger Q \} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで $\text{tr}\{\cdot\}$ は行列のトレースを、添え字 $\{ \cdot \}_{ij}$ は行列の ij -成分を表す。

1-ソリトン解は、公式 (16) において $N = 1$ と置くことで得られる。

$$Q = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_0 \\ \phi_0 & \phi_{-1} \end{pmatrix} = \frac{e^\lambda}{\det S} \begin{pmatrix} \beta + \gamma^* e^{2\chi_R + \rho} \det \Pi & \alpha - \alpha^* e^{2\chi_R + \rho} \det \Pi \\ \alpha - \alpha^* e^{2\chi_R + \rho} \det \Pi & \gamma + \beta^* e^{2\chi_R + \rho} \det \Pi \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\det S = 1 + e^{2\chi_R + \rho} + e^{4\chi_R + 2\rho} |\det \Pi|^2 \quad (28)$$

$$e^\rho \equiv \frac{1}{(2k_R)^2}, \quad \Pi \equiv \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\chi_R \equiv \chi_R(x, t) = k_R(x - 2k_1 t) - \epsilon \quad (30)$$

$$\chi_I \equiv \chi_I(x, t) = k_1 x + (k_R^2 - k_1^2)t \quad (31)$$

ソリトンの番号を示す添え字は省略した。また、添え字の R と I はそれぞれ実部と虚部をあらわすものとする。ここで一度、それぞれの変数が持つ意味合いをまとめておく。

$|k_R| = e^{-\rho/2}/2$: ソリトンの振幅

$2k_1$: 包絡ソリトンの速度

χ_R : 包絡ソリトンの座標

χ_I : 伝送波の座標

Π : ソリトンの分極行列 ($\|\Pi\|_2 = 1$)

4 2-Soliton Collision: Spin Switching

この節では、2-ソリトンの衝突を取り扱う。2-ソリトン解は、やはり公式 (16) において $N = 2$ と置いて求めることができるが、計算が少し煩雑になるため一般解を与えるのはやめ⁶、ここではそのなかでもドラスティックな現象であるスピン自由度間のスイッチングを紹介する。

まず二つのソリトンに対応した固有値 k_1, k_2 を以下の領域に制限する。

$$k_{1R} = \Re k_1 > 0, \quad k_{2R} = \Re k_2 < 0, \quad (32)$$

$$k_{1I} = \Im k_1 < 0, \quad k_{2I} = \Im k_2 > 0. \quad (33)$$

このとき二つのソリトンは $t = 0$ 付近で正面衝突を起こし、漸近系はソリトン 1 が $x = \infty$ 、ソリトン 2 が $x = -\infty$ にある始状態 ($t \rightarrow -\infty$) から、ソリトン 1 が $x = -\infty$ 、ソリトン 2 が $x = \infty$ にある終状態 ($t \rightarrow \infty$) にいたる。その他のパラメータを上手に選ぶことによって、図 1 のような衝突が実現する。

⁶2 ソリトン解の陽な表示を含め、より詳細な解析をまとめた論文を現在準備中である。

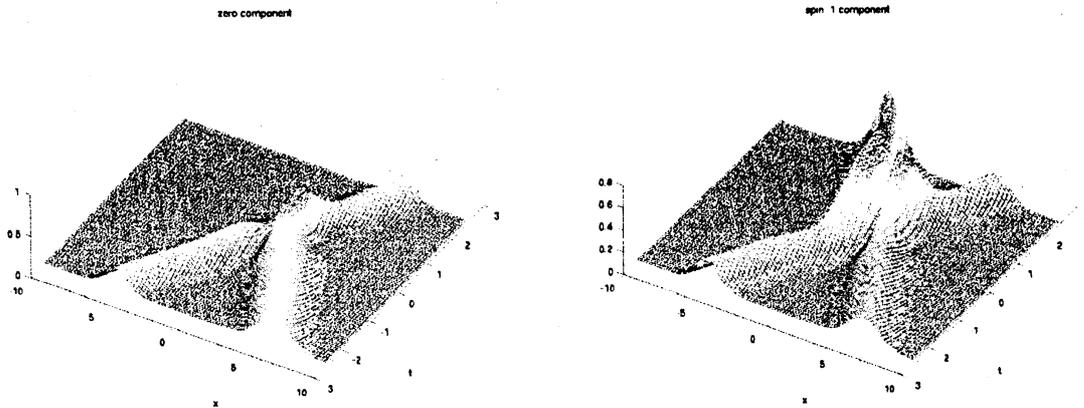


図 1: 左の図が $|\phi_0|^2$ 、右の図が $|\phi_{\pm 1}|^2$ 。手前から右奥へ時間発展。左(右)に進むのがソリトン 1(2)。

ここで、簡単のため ± 1 の成分は同じ包絡ソリトンを持つように設定したので、 $|\phi_0|^2$ と $|\phi_{\pm 1}|^2$ の二つの包絡ソリトンを表示してある。どちらの図も手前から右奥へ向け時間軸が設けてあり、左右方向が空間座標になっている。左に進むのがソリトン 1 で右に進むのがソリトン 2 である。今、ソリトン 1 をシグナル、ソリトン 2 のほうをスイッチとみなすことにする。シグナルのソリトンに注目すると、 $t=0$ の衝突領域を境に 0 成分が消えていることが見てとれる。一方 ± 1 成分のほうに目をやると、それを補うように振幅が増大していることが分かる。§3 で議論したとおり、全粒子数や全スピンは系の保存量であるため衝突の前後で変わることはない。しかし、その保存則を満たす範囲内では内部自由度間の遷移が許される。図 1 に示した現象は、その内部自由度間のダイナミクスを最大限に利用した一例である。

実際は、これら全ての成分が重なり合っただけで、衝突後に磁場をかけてゼーマン分裂を引き起こし、それぞれの成分を分離し別々に観測することは可能である。すなわち、シグナルとして 0 成分のみを観測することになると、スイッチのソリトンをおつけてやることでシグナルを OFF にすることができたことになる。もちろんこれとは逆に、もともと 0 成分を持たないシグナルを、衝突によってスイッチ ON することも可能である。ここに示したような 0 成分の完全消去のためにはパラメータの微調整が必要となるのだが、それが多少ずれたとしても同じように 0 成分の大幅な減衰は実現される。その一方で、BEC の実験では理論家の方が啞然とする程のファインチューニングが日常茶飯事に行われている。

5 Conclusions

本稿では、ボース・アインシュタイン凝縮における多成分物質波ソリトンのダイナミクスを、逆散乱法によって厳密に解析した。その結果、以下のことが分かった。

- 大自由度をもつ MNLSE から物理的に有用なリダクション (スピノール模型) が可能
- 引力相互作用する $F=1$ スピノール BEC はブライトソリトン解を持つ
- 内部自由度のダイナミクスにはスピン交換相互作用が本質的に重要である

- 2ソリトンの特徴的な散乱として内部自由度のスイッチングが存在する

これらを応用することにより、物質波での量子情報処理への道が開かれることを期待する。

Acknowledgement

本研究について貴重なご意見をいただきました、和達三樹先生、土田隆之博士に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii and S. Stringari: Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases, *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999) 463–512.
- [2] C. J. Pethick and H. Smith: *Bose–Einstein Condensation in dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [3] Pierre Meystre: *Atom Optics* (Springer-Verlag, New York, Inc., 2001).
- [4] Kevin E. Strecker, Guthrie B. Partridge, Andrew G. Truscott, Randall G. Hulet: Formation and propagation of matter-wave soliton trains, *Nature* (London) **417** (2002) 150–153.
- [5] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin and C. Salomon: Formation of a Matter-Wave Bright Soliton, *Science* **296** (2002) 1290–1293.
- [6] T. L. Ho: Spinor Bose Condensates in Optical Traps, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 742–745.
- [7] T. Ohmi and K. Machida: Bose–Einstein Condensation with Internal Degrees of Freedom in Alkali Atom Gases, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998) 1822–1825.
- [8] E. K. Fatemi, E. M. Jonse and P. D. Lett: Observation of Optically Induced Feshbach Resonances in Collisions of Cold Atoms, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 4462–4465.
- [9] Jordan M. Gerton, Brian J. Frew and Randall G. Hulet: Photoassociative frequency shift in a quantum degenerate gas, *Phys. Rev. A* **64** (2001) 053410-1–053410-4.
- [10] T. Tsuchida and M. Wadati: The coupled modified Korteweg–de Vries equations, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998) 1175–1187.
- [11] T. Tsuchida: Study of multi-component soliton equations based on the inverse scattering method, Ph.D thesis, Department of Physics, University of Tokyo (2000), available at <http://poisson.ms.u-tokyo.ac.jp/~tsuchida/thesis/>