数理解析研究所講究録 1368 巻 2004 年 136-143

Crapper の表面張力波の一意性について

岡本 久*†
〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町
京都大学数理解析研究所

要旨

Two-dimensional water-waves of permanent shape with constant propagation speed are considered under the assumption that the gravity is neglected and only the surface tension is taken into account. We prove that, Crapper's solutions, which are exact solutions of the governing equations, are unique among those which satisfy a certain positivity property.

Keywords Crapper's wave, uniqueness, positivity

1 Introduction

非圧縮非粘性流体の表面を伝わる 2 次元の定常進行波を考える. 本論文では流れは無限に深いものと仮定する. 重力が無視できて表面張力だけが働いているものと仮定するとき, Crapper[4, 3] は初等関数で表示できる厳密解が存在することを示した.

これは波の形状を決定する問題であるから, いわゆる自由境界問題となるのであるが, 適当な変数変換をすることによって, 複素平面内の単位円板における解析関数の問題に帰着できることが知られている ([6]). 途中を省略して結果だけを書くと, 定常進行波の形は次の方程式 ([6] で Levi-Civita 方程式と呼ばれているもの) を解くことによって決定される.

$$q\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma} = -\sinh(H\theta) \qquad (-\pi \le \sigma \le \pi). \tag{1}$$

ここで, $\theta = \theta(\sigma)$ が未知関数で, 2π 周期であり, $\int_{-\pi}^{+\pi} \theta(\sigma)\mathrm{d}\sigma = 0$ であるとする. σ は自由表面上のラグランジュパラメータである. また, H は Hilbert 変換である. q は無次元パラメータで, 表面張力に比例するものである. 詳しくは [6] を参照していただきたい. θ は自由表面における接線と水平線とのなす角度を表すので (図 1), θ を積分することによって波形を決定することができる.

*Partly supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research from JSPS No14204007.
†同僚の山田道夫氏からいろいろとアドバイスをいただいた. ここに感謝の意を表したい.

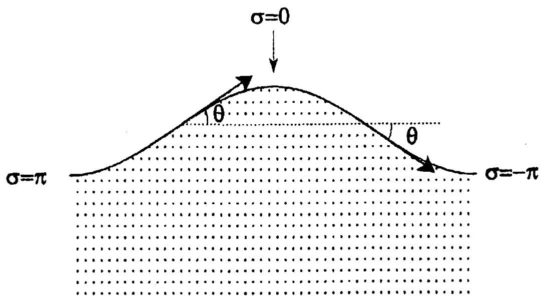

図 1: θ は接戦と水平線のなす角度である.

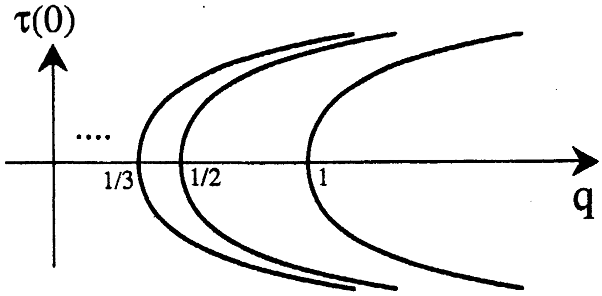

図 2: Crapper の解のなす分岐図式. $\tau(0) = (H\theta)(0)$.

Crapper[4] の解を具体的に表示すると次式のようになる ([6]):

$$q = \frac{1+A^2}{1-A^2}, \tag{2}$$

$$\theta(\sigma) = -2\arctan\left(\frac{2A\sin\sigma}{1-A^2}\right) = -4\left(A\sin\sigma + \frac{A^3}{3}\sin 3\sigma + \frac{A^5}{5}\sin 5\sigma + \cdots\right). \tag{3}$$

ここで, 解はパラメータ $A \in (-1,1)$ を含んでいる. θ の Hilbert 変換は

$$H\theta(\sigma) = \log\frac{1+A^2+2A\cos\sigma}{1+A^2-2A\cos\sigma} = 4\left(A\cos\sigma + \frac{A^3}{3}\cos 3\sigma + \frac{A^5}{5}\cos 5\sigma + \cdots\right) \tag{4}$$

と表される. 次に, n を自然数とすると, (1) の他の解として, $q/n, \theta(n\sigma)$ を得る ($n = 1, 2, \cdots$). こうして (1) の解の族が見つかったが, これらを図式化すると図 2となる. このグラフからわかるように, **Crapper の解は $q = 1, 1/2, 1/3, \cdots$ において, 自明解 $\theta \equiv 0$ から分岐する解である.** 図 3にいくつかの波形を示した.

以後, $H\theta$ を τ で表すことにする:

$$\tau = H\theta.$$

また, θ は奇関数であると仮定する. これは波形が対称軸を持つということと同値である.

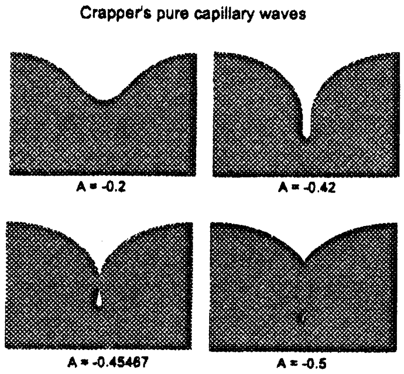

図 3:

[6] では Crapper の解の族から 2 次分岐する解がないことが証明された．また，様々な状況証拠から (1) には Crapper の解しかないことが予想されたが，これまでのところ証明は見つかっていないようである．Crapper は解を見つけるときにある種の変数分離形を仮定しており，その中では彼の解がただ一つであることを証明することは簡単である．しかし，そうした変数分離形をしていない解があるかもしれない，という心配はあるわけで，何らかの証明は必要であると思う．本論文では，部分的な結果であるが，一意性を正値性の仮定の下で証明する．

第 2 節では Crapper の解に関する基本的な事実を復習する．主定理は第 3 節で述べられ，そこで証明を与える．一般の場合に関する注意を第 4 節で与える．

2 復習

[6] に書いてあるいくつかの事実を復習する．

R1 $\theta(\sigma)+\mathrm{i}H\theta(\sigma)$ は単位円板 $|z|\le 1$ における解析関数の境界値となる．すなわち，ある解析関数 $F(z)$ ($|z|\le 1$) が存在して，$F(e^{\mathrm{i}\sigma})=\theta(\sigma)+\mathrm{i}H\theta(\sigma)$.

R2 Hilbert 変換 H は

$$Hf(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{\sigma-s}{2}\right)f(s)\,\mathrm{d}s$$

あるいは

$$H\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\sin n\sigma+b_n\cos n\sigma\Big)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-a_n\cos n\sigma+b_n\sin n\sigma\Big)$$

(a_n b_n は実定数) で特徴づけられる．さらに，I を恒等写像とするとき $H^2=-I$ が成り立つ．

R3 (1) の任意の解 $\theta(\sigma)$ は C^∞ 級である．また，$\tau(\sigma)$ も C^∞ 級である

R4 $(H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma})^{-1}$ は積分作用素で表される: 特に, f が σ の奇関数ならば, $H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}f = g$ は

$$f(\sigma) = \int_0^\pi G(\sigma, s)g(s)\mathrm{d}s \qquad (0 \leq \sigma \leq \pi) \tag{5}$$

と同値である. ここに,

$$G(\sigma, s) = \frac{1}{\pi}\log\left|\frac{\sin\frac{\sigma+s}{2}}{\sin\frac{\sigma-s}{2}}\right| = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sigma)\sin(ns)}{n} \qquad (0 \leq \sigma, s \leq \pi). \tag{6}$$

すべての $0 < \sigma, s < \pi$ に対して $G(\sigma, s) > 0$ である.

最初の準備として, $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}$ がある種の固有値問題の解になることを示す. (1) を微分すると

$$q\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\sigma^2} = -\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}\cosh\tau$$

を得る. これと $H^2 = -I$ を用いると $f = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}$ が次の固有値問題の固有関数になることがわかる:

$$H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}f = \frac{1}{q}(\cosh\tau)f. \tag{7}$$

次に, $\sin\theta$ も同じ固有値問題の関数関数になることを示す. このために,

$$H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\sin\theta = -\frac{1}{q}H(\cos\theta\sinh\tau) \tag{8}$$

に注意する. $\sin(\theta + \mathrm{i}\tau) = \sin\theta\cosh\tau + \mathrm{i}\cos\theta\sinh\tau$ は解析関数になるから,

$$\cos\theta\sinh\tau = H(\sin\theta\cosh\tau).$$

従って, (8) によって

$$H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\sin\theta = \frac{1}{q}\cosh\tau\sin\theta \tag{9}$$

となる.

$\sin\theta$ も $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}$ も奇関数であるから, それらは

$$qf(\sigma) = \int_0^\pi G(\sigma, s)\cosh(\tau(s))f(s)\mathrm{d}s \tag{10}$$

を満たす.

ここで, 作用素 L を

$$Lf(\sigma) = \int_0^\pi G(\sigma, s)\cosh(\tau(s))f(s)\mathrm{d}s. \tag{11}$$

(ここで τ は固定されている) で定義する. このとき $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}$ も $\sin\theta$ も L の固有関数で, q が固有値である.

定理に入る前に関数解析の定理を復習しておこう. Banach 空間 E を次で定義する:

$$E = \{ f \in C[0,\pi] \,;\, f(0) = f(\pi) = 0 \}.$$

ノルムは $\|f\| = \max_{0 \le \sigma \le \pi} |f(\sigma)|$ とする. さらに, K を

$$K = \{ f \in E \,;\, f(\sigma) \ge 0 \ \ (0 \le \sigma \le \pi) \}$$

で定義する.

定義 1 w_0 を $K \setminus \{0\}$ の要素とする. 有界線形作用素 $L : E \to E$ が w_0 正値であるとは, すべての $u \in K \setminus \{0\}$ に対して自然数 n と正数 α, β が存在して $\alpha w_0(\sigma) \le (L^n u)(\sigma) \le \beta w_0(\sigma)$ がすべての $0 \le \sigma \le \pi$ について成り立つこと.

このとき次の定理が成り立つ.

定理 1 $L : E \to E$ を線形コンパクト作用素とする. そして, すべての $f \in K$ に対して $Lf \in K$ であると仮定する. さらに, L が w_0 正値であるような $w_0 \in K \setminus \{0\}$ が存在するものと仮定する. 最後に, L は固有値 $\lambda_0 > 0$ と対応する固有関数 $f \in K \setminus \{0\}$ が存在するものと仮定する. このとき λ_0 は単純固有値である.

この定理は [5, page 76] の Theorem 2.10 そのものであるので, 証明はこの文献を参照していただきたい.

3 一意性定理とその証明

我々は, Crapper の解の一意性を次の仮定のもとで証明する:

A1 $0 \le \theta(\sigma) \le \pi$ がすべての $0 \le \sigma \le \pi$ について成り立つ;

A2 $\frac{d\tau}{d\sigma}(\sigma) \ge 0$ がすべての $0 \le \sigma \le \pi$ について成り立つ.

もちろん, **A1** は $\sin\theta(\sigma) \ge 0$ が $0 \le \sigma \le \pi$ で成り立つことを意味する. Crapper の解は $A < 0$ のときに **A1** も **A2** も満たす.

次の定理が目指すものである:

定理 2 (1) の解 θ が **A1** もしくは **A2** を満たすことを仮定する. このときそれは, 適当な $A \in (-1, 0]$ を用いて (2), (3) で与えられる.

証明. まず, (11) の L が定理 1の仮定を満たすことを見ておく. w_0 正値性以外は簡単である. w_0 正値性を示すには, $w_0(\sigma) = \sin\sigma$ とおく. $u \in K \setminus \{0\}$ ならば, すべての $\sigma \in (0, \pi)$ に対して

$Lu(\sigma) > 0$ であることと, $Lu(0) = Lu(\pi) = 0$ であることが直ちにわかる. もし Lu が C^1 級で $\frac{\mathrm{d}Lu}{\mathrm{d}\sigma}(0) > 0, \frac{\mathrm{d}Lu}{\mathrm{d}\sigma}(\pi) < 0$ となるならば, 適当な $\alpha > 0$ について $Lu \geq \alpha \sin\sigma$ となることは明らかである. しかし, u がただ単に連続であるだけでは Lu は必ずしも C^1 級であることを保証されない. そこで L^2u を考えてみる. $Lu = \left(H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\right)^{-1}(\cosh(\tau)u)$ は任意の $\eta < 1$ に対して η 次 Hölder 連続であることがわかる. 従って, $L^2u \in C^1[0,\pi]$ を得る.

一般に, $v \in K \setminus \{0\}$ が Hölder 連続で $v(0) = 0$ ならば (6) によって,

$$\left.\frac{\mathrm{d}Lv}{\mathrm{d}\sigma}\right|_{\sigma=0} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cot\left(\frac{s}{2}\right)\cosh(\tau(s))\,v(s)\mathrm{d}s > 0$$

となる. 全く同様に $\left.\frac{\mathrm{d}Lv}{\mathrm{d}\sigma}\right|_{\sigma=\pi} < 0$ も成り立つ. これらの事実から『任意の $u \in K \setminus \{0\}$ に対して $L^2u \geq \alpha\sin\sigma$ となる $\alpha > 0$ が存在する』ことがわかる. $L^2u \leq \beta\sin\sigma$ の証明は簡単である.

仮定によって $\sin\theta$ または $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\sigma$ が $0 \leq \sigma \leq \pi$ で至る所非負であるから, **Theorem 1** によって q は単純固有値である. 故に定数 k が存在して,

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} = k\sin\theta \tag{12}$$

となる. この方程式は Toland [7] の第 3 節で考えられている分岐問題と同じである. この論文で Toland は非線形方程式 $H\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\sigma} = \sin f$ を考えて, そのすべての解を書き下すことに成功している. 具体的には, $H\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\sigma} = \sin f$ の任意の解は次の f_1 もしくは f_2 のいずれかであることが証明されている:

$$f_1(\sigma) = \pm 2\tan^{-1}(\sigma + a) + 2\pi m; \tag{13}$$

ここで a は実定数で, m は整数である;

$$f_2(\sigma) = 2\tan^{-1}\left(\gamma^{-1}\tan\delta\sigma\right) - 2\tan^{-1}\left(\gamma\tan\delta\sigma\right); \tag{14}$$

ここで γ と δ は実定数である.

f_2 は次のように書き換えられる;

$$f_2(\sigma) = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}(\gamma^{-1} - \gamma)\sin 2\delta\sigma\right).$$

f_1 は周期関数でないから, 我々の考察から除外することができる. 従って,

$$\theta(\sigma) = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}(\gamma^{-1} - \gamma)\sin 2\delta k\sigma\right)$$

がわかった. θ は 2π 周期であるから $2\delta k$ は整数でなければならない. この整数を n としよう. すると

$$\theta(\sigma) = -2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}(\gamma - \gamma^{-1})\sin n\sigma\right)$$

を得る. $\sin\theta \geq 0$ であるから $n = \pm 1$ でなければならない. $n = 1$ の場合も $n = -1$ の場合も同様に進むことができるので $n = 1$ の場合について考えよう. A が -1 から 1 まで動くとき $2A/(1-A^2)$ は $-\infty$ から ∞ まで動く. 従って

$$\frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{2A}{1-A^2}.$$

を満たす $A \in (-1, 1)$ がただひとつ存在する.

$\theta \geq 0$ であるから, $\gamma - \gamma^{-1} < 0$. 故に, $0 < \gamma < 1$ ならば $A = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ であり, $\gamma < -1$ ならば $A = (1+\gamma)/(1-\gamma)$ である. こうして Crapper の解にたどり着く.

証明終わり

4 一般の場合に対する注意

L の任意の固有値が単純ならば一意性を正値性の仮定無しに証明できる. しかし, 一般論だけでは単純性は従わないのではないかと思う.

Toland [7] は次のようなおもしろい発見をしている: 『 Peierls-Nabarro 方程式と呼ばれている

$$H\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\sigma} = \sin f, \tag{15}$$

は

$$H\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\sigma} = -g + g^2 \tag{16}$$

の二つの解 g_1, g_2 を用いて $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\sigma} = g_1 - g_2$ と表すことができる』. 一方, (16) の任意の解は完全に書き下すことができる ([1, 2]). 彼はこのふたつの事実から (13) と (14) を導いた. 方程式 (15) と (1) の違いは sin と sinh の違いだけであるから, Toland の証明を適当に修正すれば (1) のすべての解を書き下すことができようと思えるが, いろいろとやってみたけれども結局うまくいかなかった. これが前節で行ったいささか迂遠な方法をとった理由である. 結果として正値性を仮定せざるを得なくなったが, この仮定なしでも一意性は証明できるものと筆者は信じている.

参考文献

[1] C.J. Amick and J.F. Toland, Uniqueness of Benjamin's solitary-wave solution of the Benjamin-Ono equation, IMA J. Appl. Math., vol. 46 (1981), 21–28.

[2] C.J. Amick and J.F. Toland, Uniqueness and related properties for the Benjamin-Ono equation — a nonlinear Neumann problem in the plane, Acta Math., vol. 167 (1991), 107–126.

[3] G.D. Crapper, Introduction to Water Waves, Ellis Horwood (1984).

[4] G.D. Crapper, An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude, J. Fluid Mech., vol. 2 (1957), pp. 532–540.

[5] M.A. Krasnosel'skii, Positive Solutions of Operator Equations, Noordhoff (1964).

[6] H. Okamoto and M. Shōji, The Mathematical Theory of Permanent Progressive Water-Waves, World Scientific, (2001).

[7] J.F. Toland, The Peierls-Nabarro and Benjamin-Ono equations, J. Func. Anal., vol. 145, (1997), 136–150.