

## 中空円筒液体シートの安定性に及ぼす粘性の影響

阪大・基礎工 三富 和憲 (MITOMI Kazunori)

阪大・基礎工 菅 健太郎 (KAN Kentarou)

阪大・基礎工 吉永 隆夫 (YOSHINAGA Takao)

Faculty of Engineering Science, Osaka University

### 1 はじめに

液体シートは、その形状から平面シートと中空円筒シートに分けることができるが、両者ともシート表面に発生する表面張力波と呼ばれる攪乱が安定か不安定かによって、シート全体の振る舞いが決定される。実際、噴霧器やバブルジェット、プリンター、そして燃料噴射において見られる液滴形成、微粉末や球殻の製造等は、表面張力波の不安定性を利用したものである [1]。一方、コーティング、ポリマー繊維やプラスチックシートの製造、化学反応炉やレーザー核融合炉での遮蔽幕、将来の宇宙用放熱器への応用等では、表面張力波の不安定性をうまく抑える必要がある [2,3,4,5]。このように、シート上の表面張力波の安定性に関する問題は、流体力学における代表的な問題の一つであるばかりでなく、工業技術の諸分野においても実用上非常に重要な問題でもある。

液体シートの安定性の解析はこれまで、攪乱が微小であるとした線形安定性が主に調べられてきた。しかし、不安定により最終的にシートが崩壊するかどうかを調べるためには、さらに非線形の安定性を調べる必要がある。また、液体シートの問題は元来境界が自由境界であることに加え、シートの破断や崩壊付近では非線形性が顕著になるため、厳密で解析的な取り扱いが困難である。そのため直接数値解析を適用する機会が多いが、特に中空円筒シートに対しては有効な手法は現在のところまだ確立されていないようである。これに対して、適当な近似を施すことによって現象をうまく記述できるような比較的簡単な発展方程式を導出し、その解を調べることも行われている。この方法はうまく行けば解析解が求まる可能性もあり、シートの振る舞いをより広いパラメータ領域で統一的に理解できるという利点がある。この代表的な方法として、シートの厚みが十分薄いと見做して、シート内部での物理量の変化を無視してシート厚み中心面での値で代表させる「薄膜近似法」が知られている。

これまで中空円筒液体シートについていくつかの研究がなされてきたが [6,7,8]、粘性を考慮に入れた非線形の解析は未だなされていない。そこで本研究では粘性効果を考慮に入れた中空円筒シートに薄膜近似を適用することにより、粘性項を含む非線形の発展方程式を導出し、その時間発展を調べることで非線形の安定性を明らかにすることを目的としている。また、平面シートの場合と異なり中空液体シートは長波長攪乱に対しては線形不安定であることが知られているが、このようなシートに対して強い非線形攪乱を与えた場合、粘性の影響がどのように作用するかを明らかにしていく。

### 2 基礎方程式と定式化

シートは図 2.1 に示すように、シートの長さ方向を  $z$  軸、半径方向を  $r$  軸とする円柱座標系で考える。  $\rho, \mu, \sigma$  をそれぞれ液体の密度、粘性係数、表面張力係数とする。シート界面  $r = r_+, r_- (r_+ > r_-)$  を用いて、シート中心面半径  $R = (r_+ + r_-)/2$ 、シート厚み  $b = r_+ - r_-$  を導入し、シート界面での圧力を  $p_+, p_-$  とする。さらにシートの速

度の  $(z, r)$  成分は  $(u, v)$  で、圧力は  $p$  で与えられるとする。なお、円筒シート外部及び内部の流体（例えば空気等）の運動や重力の影響は考えず、内部、外部から一定圧力  $p_{0+}, p_{0-}$  のみがシート表面にかかっていると仮定する。

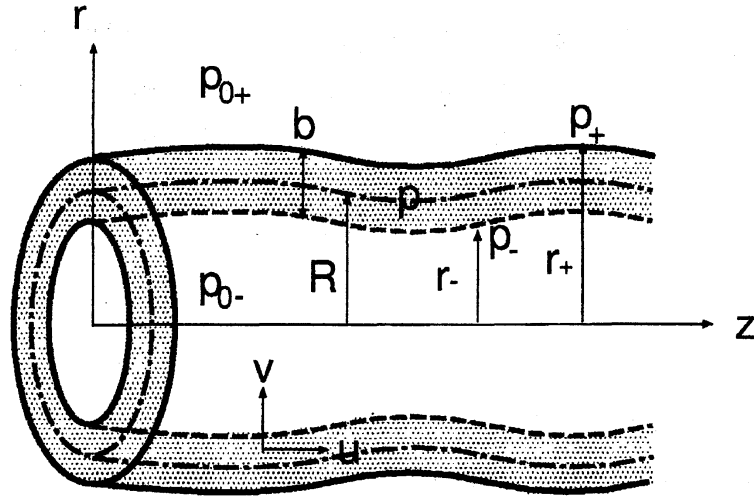


図 2.1: 中空円筒シートの形状

## 2.1 基礎方程式および境界条件

まずはじめに、 $r_- < r < r_+$  のシート円筒部について考える。連続の式より、

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0, \quad (2.1)$$

運動方程式より、

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\}, \quad (2.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \quad (2.3)$$

を得る。

次に、境界面  $r = r_{\pm}$  での条件を考える。境界面での運動学的条件より、

$$v = \frac{\partial r_{\pm}}{\partial t} + u \frac{\partial r_{\pm}}{\partial z}, \quad (2.4)$$

法線方向及び接線方向の応力連続の条件より、

$$p_{\pm} = p_{0\pm} \pm \sigma \left\{ \frac{1}{r_{\pm} \left[ 1 + \left( \frac{\partial r_{\pm}}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left( \frac{\partial^2 r_{\pm}}{\partial z^2} \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial r_{\pm}}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} + \frac{2\mu}{1 + \left( \frac{\partial r_{\pm}}{\partial z} \right)^2} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial r_{\pm}}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right] - \frac{\partial r_{\pm}}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right\}, \quad (2.5)$$

$$2 \frac{\partial r_{\pm}}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left[ 1 - \left( \frac{\partial r_{\pm}}{\partial z} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \quad (2.6)$$

を得る。ここで、 $p_{0+}$  は円筒シート外側 ( $r > r_+$ ) の圧力、 $p_{0-}$  は内側 ( $r < r_-$ ) の圧力であり一定と仮定する。一方  $p_+$  は環状シートの外側界面 ( $r = r_+ = R + \frac{b}{2}$ ) の圧力、 $p_-$  は内側界面 ( $r = r_- = R - \frac{b}{2}$ ) の圧力である。

## 2.2 発展方程式

シート厚みが十分小さいとすれば,  $u, v, p$  がシート厚みに関係する量  $(r - R)$  によって展開できると仮定できて  $(|r - R| \sim O(b/2))$ , それらを以下のように表す:

$$u = u_0 + u_1(r - R) + u_2(r - R)^2 + \dots, \quad (2.7)$$

$$v = v_0 + v_1(r - R) + v_2(r - R)^2 + \dots, \quad (2.8)$$

$$p = p_0 + p_1(r - R) + p_2(r - R)^2 + \dots. \quad (2.9)$$

式(2.7)~(2.9)を基礎方程式及び境界条件に用いて,  $(r - R)$  のべきで整理することにより以下の発展方程式を得る:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -u_0 \frac{\partial b}{\partial z} - b \frac{\partial u_0}{\partial z} - v_0 \frac{b}{R}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v_0 - u_0 \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} = & -u_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_0}{\partial z} - p_1 \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + 2u_2 - 2 \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_1 \left( \frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial t} = & -u_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} - \frac{p_1}{\rho} \\ & + \frac{\mu}{\rho} \left\{ -\frac{v_0}{R^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + 2v_2 - 2 \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial v_1}{\partial z} + v_1 \left( \frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで,

$$p_0 = P + 2\mu(1 + R_z^2)^{-1} [R_z^2(u_{0z} - u_1 R_z) + v_1 - R_z(v_{0z} - v_1 R_z + u_1)],$$

$$bp_1 = \Delta P + 4\mu(1 + R_z^2)^{-1} [R_z^2(u_{1z} - 2u_2 R_z)b/2 + bv_2 - R_z(v_{1z} - 2v_2 R_z)b/2 - R_z b u_2],$$

$$P = (p_{0+} + p_{0-})/2 + (\sigma/2)(R^2 - b^2/4)^{-1} [(f_+ - f_-)R - (f_+ - f_-)b/2] - (\sigma/2)[(f_+^3 + f_-^3)R_{zz} + (f_+^3 + f_-^3)b_{zz}/2],$$

$$\Delta P = p_{0+} - p_{0-} + \sigma(R^2 - b^2/4)^{-1} [(f_+ - f_-)R - (f_+ - f_-)b/2] - \sigma[(f_+^3 + f_-^3)R_{zz} + (f_+^3 - f_-^3)b_{zz}/2],$$

$$f_{\pm} = [1 + R_z^2 \pm R_z b_z + (b_z^2)/4]^{-1/2},$$

さらに,

$$u_1 = (1 + R_z^2)^{-2} [(3 + R_z^2)R_z u_{0z} - (1 - R_z^2)v_{0z} + (1 + R_z^2)R_z v_0/R],$$

$$v_1 = -(1 + R_z^2)^{-2} [(1 - R_z^2)u_{0z} + (1 - R_z^2)R_z v_{0z} + (1 + R_z^2)v_0/R],$$

$$\begin{aligned} u_2 = & (1 + R_z^2)^{-2} \{ (u_{0z} + R_z v_{0z})(\ln b)_z - (1/2)R_z(1 + R_z^2)v_0/R^2 + (1/2)R_z(3 + R_z^2)u_{1z} - (1/2)(1 - R_z^2)v_{1z} \\ & + (1 + R_z^2)[R_z/2R - (\ln b)_z]v_1 \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 = & (1 + R_z^2)^{-2} \{ R_z(u_{0z} + R_z v_{0z})(\ln b)_z + (1/2)(1 + R_z^2)v_0/R^2 - (1/2)(1 - R_z^2)u_{1z} - (1/2)(1 - R_z^2)v_{1z} \\ & - (1 + R_z^2)[R_z(\ln b)_z + (1/2R)]v_1 \}. \end{aligned}$$

ただし, 下付き添字  $z$  は  $z$  微分を表すこととする.

上で得られた  $u_0, v_0, R, b$  に関する式(2.10)~(2.13)では  $O(b^2)$  の微小項は無視されており, これら4式を解くことにより, 非線形粘性シートの振る舞いを調べることができる.

### 3 線形解析

シートの平衡状態が  $b = \bar{b}$ ,  $R = \bar{R}$ ,  $u_0 = \bar{u}_0$ ,  $v_0 = 0$  ( $\bar{b}, \bar{R}, \bar{u}_0 = \text{const.}$ ) で与えられるとき, 先の発展方程式よりシート内外の圧力差 ( $p_{0+} - p_{0-}$ ) がシート内外の表面張力差とつりあい,

$$p_{0+} - p_{0-} = -\frac{2\sigma\bar{R}}{\bar{R}^2 - \frac{\bar{b}^2}{4}}, \quad (3.1)$$

のように決まる.

いま平衡状態に以下のような波数  $k$ , 周波数  $\omega$  の微小攪乱が加わったときの安定性を考える:

$$\tilde{b} = \bar{b}e^{i(kz-\omega t)}, \tilde{R} = \bar{R}e^{i(kz-\omega t)}, \tilde{u}_0 = \bar{u}_0e^{i(kz-\omega t)}, \tilde{v}_0 = \bar{v}_0e^{i(kz-\omega t)}. \quad (3.2)$$

式 (3.2) を式 (2.10)~(2.13) に用いて, 攪乱振幅の 2 次以上の項を無視し線形化を行い, 自明でない解を持つ条件より次の線形分散関係式を得る:

$$\begin{aligned} & (\omega^* - k^* u_0^*)^4 + \frac{1}{Re} 4(k^{*2} + i) i(\omega^* - k^* u_0^*)^3 - \left(\frac{1}{Re}\right)^2 12k^{*2}(\omega^* - k^* u_0^*)^2 \\ & + \frac{1}{We} \left\{ \left(\frac{b^* k^{*2}}{2} + \frac{2}{b^*}\right) \left[\frac{1 + \frac{b^{*2}}{4}}{(1 - \frac{b^{*2}}{4})^2} - k^{*2}\right] + \frac{b^*}{(1 - \frac{b^{*2}}{4})^2} \right\} (\omega^* - k^* u_0^*)^2 \\ & + \frac{1}{Re} \frac{1}{We} k^{*2} \left(b^* + \frac{8}{b^*}\right) \left[\frac{1 + \frac{b^*}{4}}{(1 - \frac{b^{*2}}{4})^2} - k^{*2}\right] i(\omega^* - k^* u_0^*) \\ & + \left(\frac{1}{We}\right)^2 k^{*2} \left[k^{*2} - \frac{1}{(1 + \frac{b^*}{2})^2}\right] \left[k^{*2} - \frac{1}{(1 - \frac{b^*}{2})^2}\right] = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで, 代表速度  $v_p = \sqrt{2\sigma/\rho\bar{b}}$ , 代表長さ  $\bar{R}$  を用いて, 無次元パラメータ  $Re = \rho\bar{R}v_p/\mu$ ,  $We = \rho\bar{R}v_p^2/\sigma$  が導入され, 無次元量  $k^* = \bar{R}k$ ,  $\omega^* = \bar{R}\omega/v_p$ ,  $u_0^* = \bar{u}_0/v_p$ ,  $b^* = \bar{b}/\bar{R}$  が用いられている. ただし, 以下では簡単のため  $u_0^* = 0$  と選ぶ. 式 (3.3) から異なる 2 つの不安定モード (準反対称モードと準対称モード) が存在することが次節で示されるが,  $b^* \ll 1$  の場合準対称モードは消滅し [6], 不安定モードは準反対称モードのみとなることを注意しておく.

#### 3.1 時間安定性

中空円筒シートの時間的な安定性を調べるために, 実波数  $k^*$  に対する複素角周波数  $\omega^*$  を調べる. 攪乱成分は式 (3.2) で角周波数  $\omega^*$  を  $\omega^* = \omega_R + i\omega_I$  とおくと,

$$e^{i(kz-\omega t)} = e^{\omega_I t} e^{i(kz-\omega_R t)}, \quad (3.4)$$

となるので, 攪乱の振幅は  $e^{\omega_I t}$  に比例する. したがって, 実波数  $k^*$  を与えた場合に角周波数  $\omega^*$  の虚数部分  $Im(\omega^*) = \omega_I$  が零または負になることが攪乱の時間発展が安定であるための条件である. 以下に横軸に  $k^*$ , 縦軸に  $Im(\omega^*)$  をとった時間安定性の図を示す. なお数値計算にはニュートン法を用いた.

図 3.1 から, 長波長攪乱に対して線形不安定な異なる 2 つのモードが存在することが分かる. しかし, それぞれは平面シートのように完全な対称, 反対称モードではなく, 準反対称, 準対称モードと呼ばれる. 増幅率については, 準反対称モードは常に準対称モードよりも大きいこと, また  $Re$  数が減少すると粘性により増幅率が減少していることが分かる. しかし,  $Re$  数 (すなわち粘性) の大きさに関わらず, 不安定となる  $k^*$  の領域はほとんど変わらないことに注意すべきである.

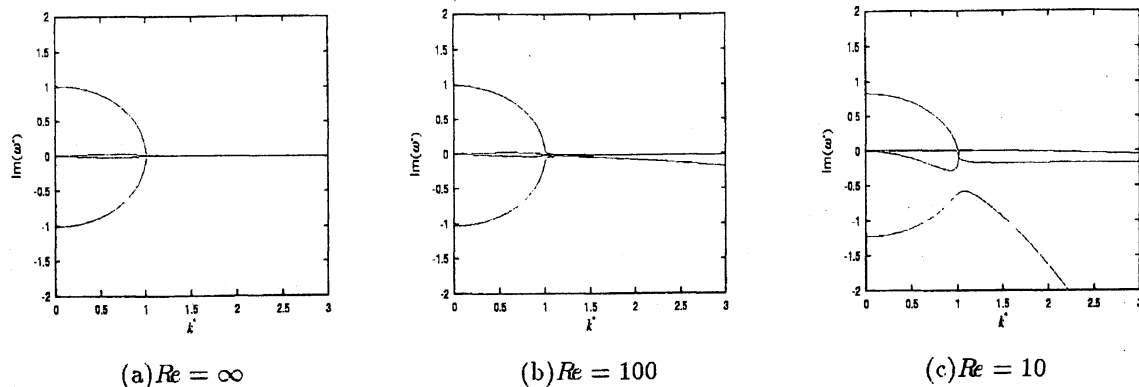


図 3.1: 線形安定性 (a)  $Re = \infty$  (b)  $Re = 100$  (c)  $Re = 10$

## 4 数値解析結果 (時間発展)

ここでは中空円筒シートの時間発展を調べるために、周期境界条件の下で数値計算を行う。計算法は時間微分にルンゲ-クッタ法、空間微分には有限差分法を用いて、シート厚みは  $b^* = 0.1$  としている。初期値は、準反対称モードのときは  $R = 1 + \eta \cos kz$  とし、そのときの  $u, v, b$  は先に得られた線形分散関係式より得る。一方、準対称モードのときには  $b = 0.1 + \eta \cos kz$  とし、同様に  $u, v, R$  を線形分散関係式より得る。また数値計算の精度はシート体積が 0.5% 以下の誤差で保存するようにとられている。

### 4.1 準反対称モード (線形不安定領域)

初期波形に図 4.1 で示すモードの波を与えたときの時間発展を図 4.2 に示す。ただし  $\eta = 0.1$  としている。このとき、中空円筒シートは非粘性、粘性ありの両方の場合ともにシート半径が大きく変動することにより「閉じて」崩壊するが、粘性を考慮することでシート崩壊までの時間は遅れ、また粘性が大きいほど崩壊時の閉じた部分のシート形状は平らになり、中空部はより大きく膨らむ。

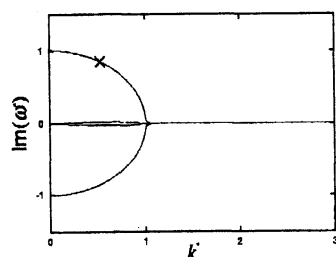


図 4.1: 初期波形選択モード

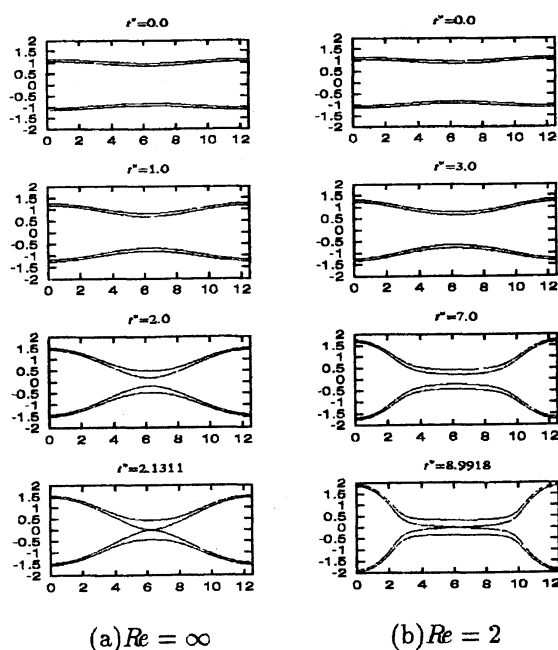


図 4.2: 準反対称モード中空円筒シートの時間発展

4.2 準対称モード (線形不安定領域)

初期波形に図 4.3 で示すモードの波を与えたときの時間発展を図 4.4 に示す。ただし  $\eta = 0.05$  としている。中空円筒シートは準対称モードの攪乱を入れているにもかかわらず、最終的には準反対称攪乱を誘起し‘閉じて’崩壊する。粘性の影響により崩壊に至るまでの時間が延びること、崩壊時の形状に影響を与えることは準反対称攪乱のときと同様である。

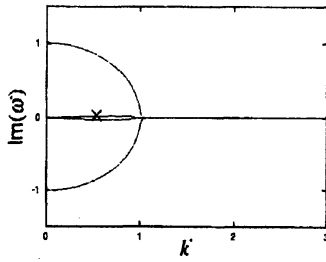


図 4.3: 初期波形選択モード

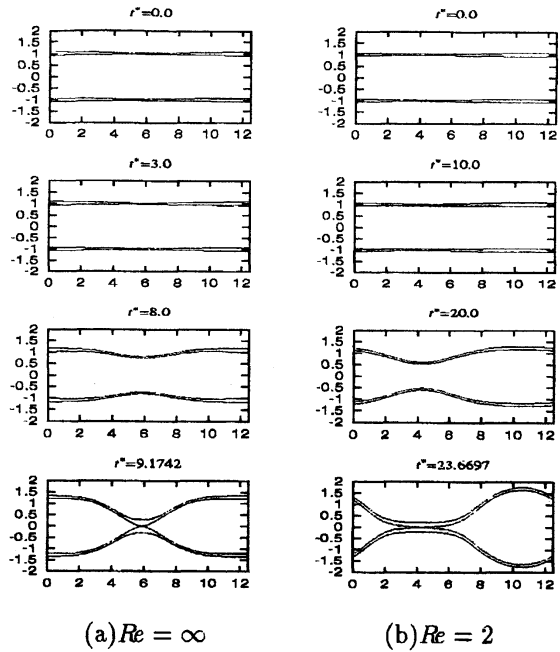


図 4.4: 準対称モード中空円筒シートの時間発展 1

4.3 準対称モード (線形中立安定領域)

初期波形に図 4.5 で示すモードの波を与えたときの時間発展を図 4.6 に示す。ただし  $\eta = 0.09$  としている。非粘性のときにはシート厚みが薄くなっていくことにより最終的には‘切れて’崩壊するが、わずかでも (少なくとも  $Re = 1000$ ) 粘性があるとシートは崩壊しない。

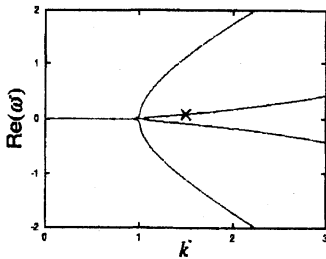


図 4.5: 初期波形選択モード

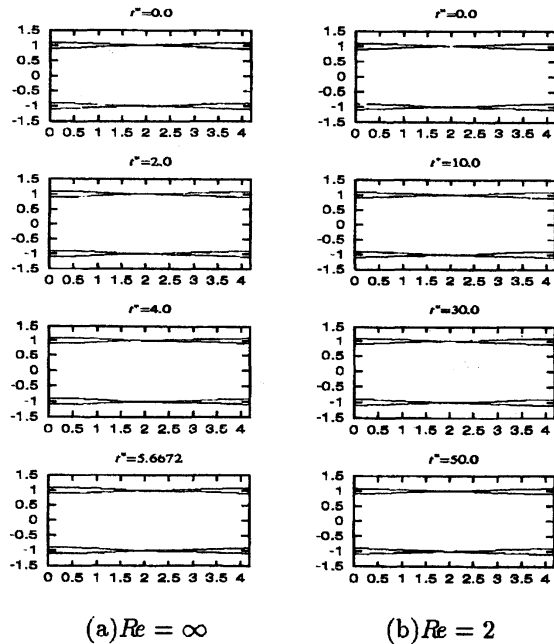


図 4.6: 準対称モード中空円筒シートの時間発展 2

このことをさらに詳しく見るため、 $\eta = 0.09$  に対するシートの厚み変動の時間発展を示したのが図 4.7 である。図の横軸に時間、縦軸に厚みの最大値と最小値の差をとっている。この図から、 $Re = \infty$  では厚みの差は増加して破断するのに対し、少なくとも  $Re = 1000$  以下では変化なし、もしくは振動しながら減少していくことが分かる。

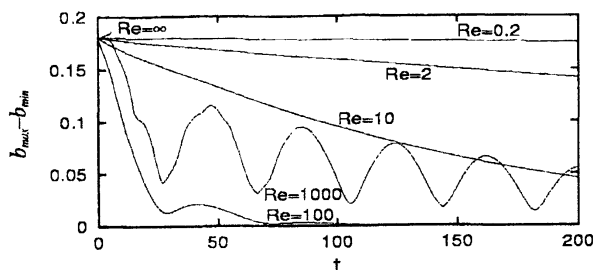


図 4.7: シート厚みの変動

#### 4.4 シート内における速度ベクトルの分布

これまで調べた中空円筒シートの振舞いについて、 $t = 0$  およびシート崩壊時のシート内の速度ベクトル ( $u, v$ ) の分布を以下に示す。

(1) ‘閉じて’ 崩壊する場合 (準反対称モード, 線形不安定領域)

図 4.2 に示したシート形状での速度ベクトルの分布を求める。ここで、図 4.8 に  $Re = \infty$ , 図 4.9 に  $Re = 2$  の速度ベクトルの分布を示す。この図から、非粘性の場合、粘性のある場合ともに、 $t^* = 0.0$  ではシート内のベクトル分布がシート全体にわたってほぼ均一に分布しているのに対して、シート崩壊時にはシートが閉じる部分での速度ベクトルが他の部分に比べ局所的に大きくなっていることが分かる。また崩壊時のシート内のベクトル分布に対して粘性の効果について見てみると、シート崩壊時の閉じる部分の形状からも予想できるように、非粘性のときに比べ粘性ありのときの方がシート形状が平らになっている分、速度ベクトルの分布もゆるやかになっており、非粘性のときの方がシート崩壊部分において局所的な速度ベクトルの増加が見られる。

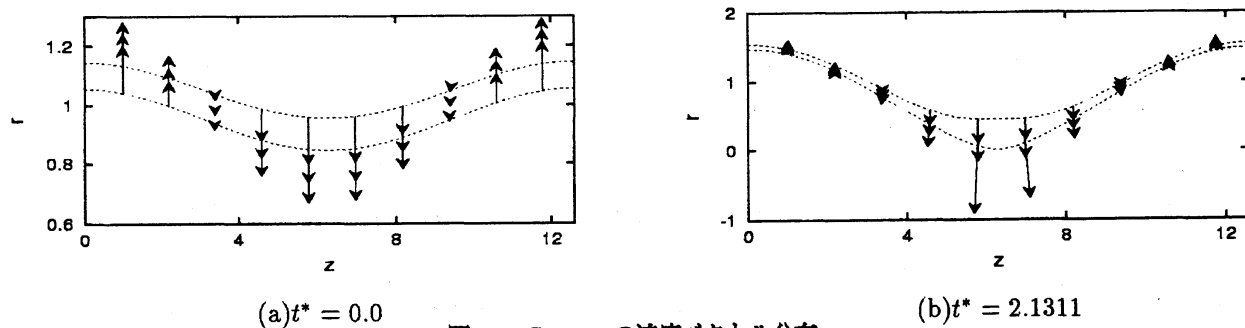


図 4.8:  $Re = \infty$  の速度ベクトル分布

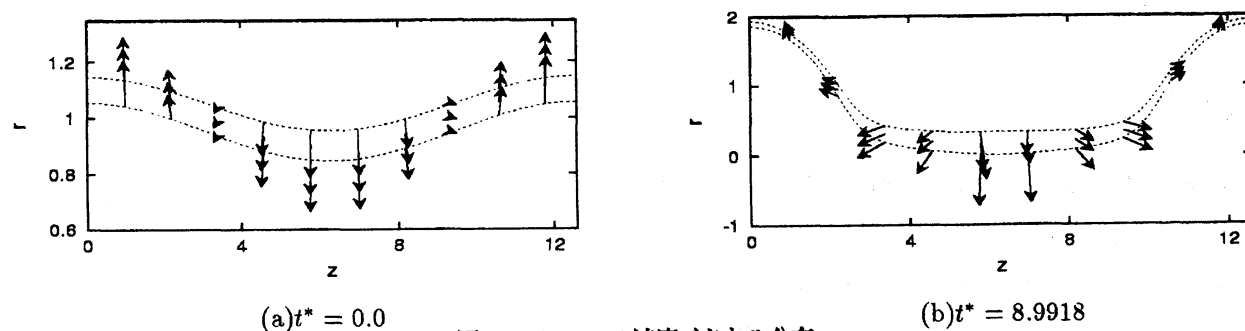


図 4.9:  $Re = 2$  の速度ベクトル分布

(2) ‘切れて’ 崩壊する場合 (準対称モード, 線形中立安定領域)

次に、図 4.6 に示したシート形状での速度ベクトルの分布を示す。ここで、図 4.10 は  $Re = \infty$ , 図 4.11 は  $Re = 2$  の場合を示す。図 4.10 からシート厚みが薄くなることによりシートが崩壊する場合、閉じて崩壊するとき同様、シー

ト崩壊部において局所的な速度の増加が見られる。また図 4.11 を詳しく見ると、時間の経過とともに速度ベクトルの分布が均一になっていっていることから、粘性の影響によりシート全体が安定化していることが分かる。

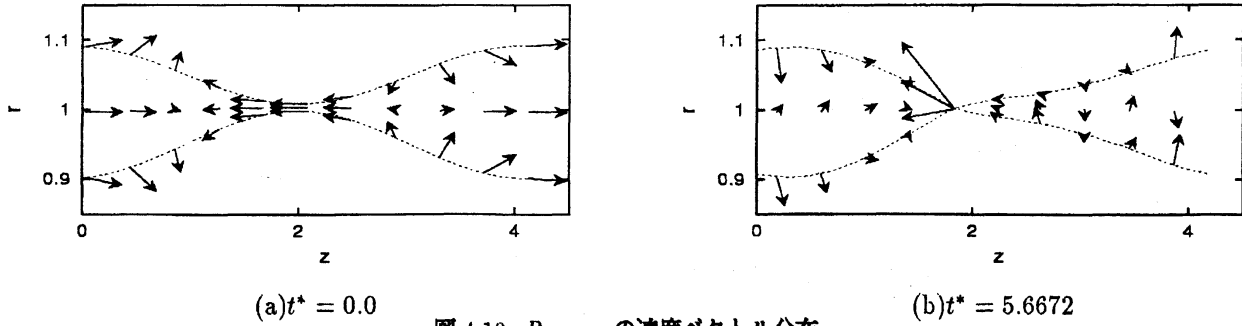


図 4.10:  $Re = \infty$  の速度ベクトル分布

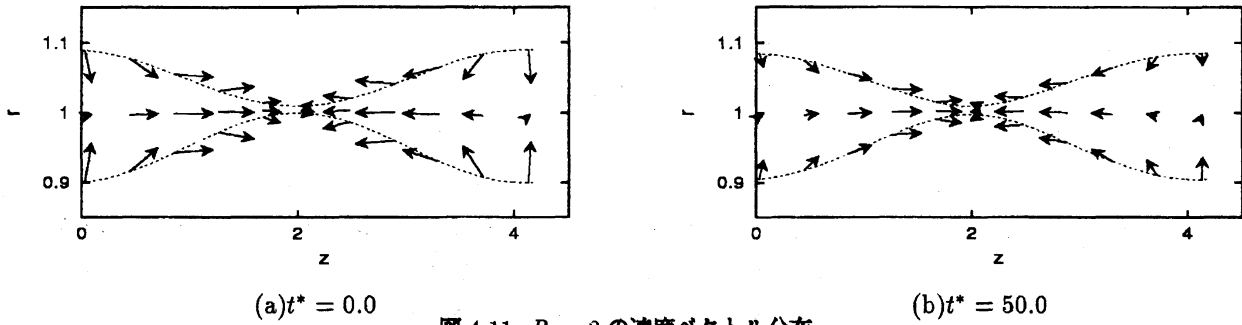


図 4.11:  $Re = 2$  の速度ベクトル分布

## 5 結論

以上得られた結果をまとめると以下のようになる:

- 中空円筒シートは長波長攪乱に対して線形不安定であり、粘性はその増幅率を減少させるが、波数の不安定領域はほとんど変わらない。
- 時間不安定の場合、準反対称、準対称両モードともシートは閉じて崩壊するが、粘性はその崩壊時間を遅らせ、崩壊時のシート形状に影響を与える。
- 時間安定の場合、準対称モードは非粘性の場合は非線形性により破断するが、粘性がわずかでもある ( $Re = 1000$ ) と破断しない。

## 参考文献

- [1] 例えば、倉林俊雄: 液体の微細化技術 (アイピーシー, 1995)70.
- [2] 島健太郎: 特殊機能塗料の開発 (シーエムシー, 1987)290.
- [3] J. I. Ramos: *Chem. Eng. Sci.* **43**(1988)3171.
- [4] D. L. Chuff and K.A.White: *AIAA Paper* 87-1525(1987).
- [5] M. W. White and D.L.Chuff: *J. Propulsion and Power* **13**(1997)74.
- [6] C. P. Lee and T. G. Wang: *Phys. Fluids* **29**(1986)2076.
- [7] C.Mehring and W.A.Sirignano: *Phys. Fluids* **12**(2000)1417.
- [8] T. Yoshinaga and K. Kotani: *J. Phys. Soc. Jpn* **70**(2001)70.