数理解析研究所講究録 1369 巻 2004 年 189-203

ラグランジアン系とハミルトニアン系の幾何学的構造

ー 解析力学の幾何学的方法への導入 ー

早稲田大学 理工学部　吉村 浩明 (Hiroaki Yoshimura)
School of Science and Engineering, Waseda University

1　はじめに

ラグランジュ力学とハミルトン力学を基礎とする解析力学は，言うまでもなく，19 世紀後半までに確立されたものであるが，いわゆる，Geometric Mechanics と呼ばれる幾何学的方法に基づく力学理論の構築は，比較的新しく 1960 年代に始まる [5, 7]. Geometric Mechanics は，接バンドル上のラグランジアン系と余接バンドル上のハミルトニアン系から成る多様体上の力学理論を基礎とするが [2, 3]，単なる数学的方法による力学理論の再構成ではなく，剛体運動，完全流体やプラズマ物理との関連で，リダクション理論，リー・ポアソン構造及びオイラー・ポアンカレ方程式といった，従来の解析力学の体系には無かった新しい枠組みを創出している [8]. 最近では，宇宙ロボットや移動ロボットの制御の関連で，幾何学的な力学理論による非ホロノミック系の力学や制御への応用へ関心が集まり，これまでに多くの研究成果がもたらされている [4].

本稿では，これら Geometric Mechanics の最も基礎となる，ラグランジアン系とハミルトニアン系の幾何学とその基本構造について概説する.

2　ラグランジアン系

多様体上の解析力学の理論は，配位空間 Q の接バンドル TQ と余接バンドル T^*Q が主要な舞台となる. 本稿では，最初に，接バンドル TQ 上に生起するラグランジアン系から始め，ルジャンドル変換を介して，余接バンドル T^*Q 上のハミルトニアン系へ繋げるオーソドックスな方法をとることにする. なお，本稿では，退化ラグランジアン系については扱わない.

ラグランジュ力学は，配位空間 Q の接バンドル TQ，すなわち，速度相空間上で生起する. ここでは，ハミルトンの原理より，オイラー・ラグランジュ方程式を導き，その上で，ラグランジュ力学の基礎となる TQ 上のラグランジアン形式及びラグランジアン系の定義について述べる.

定義 2.1. 正則なラグランジアン $L : TQ \to \mathbb{R}$ に対して，Q の２点 q_1 と q_2 及び時間の間隔 $[a, b]$ を固定する．点 q_1 から q_2 への**軌跡空間**として

$$\Omega(q_1, q_2, [a, b]) = \{c : [a, b] \to Q \mid c \text{ は } C^2 \text{ 曲線，} c(a) = q_1,\ c(b) = q_2\}$$

を定義する．さらに，**作用関数** $\mathfrak{S} : \Omega(q_1, q_2, [a, b]) \to \mathbb{R}$ を

$$\mathfrak{S}(c) = \int_a^b L\left(c(t), \dot{c}(t)\right) dt$$

と定義する．

定理 2.2 (ハミルトンの変分原理). L を TQ 上のラグランジアンとすると，$q_1 = c_0(a)$ と $q_2 = c_0(b)$ を結ぶ曲線 $c_0 : [a, b] \to Q$ が，**オイラー・ラグランジュ方程式**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

を満足するための必要かつ十分条件は，関数 $\mathfrak{S} : \Omega(q_1, q_2, [a, b]) \to \mathbb{R}$ が c_0 で作用関数 $\mathfrak{S}$ が停留すること，すなわち，

$$\delta \int_a^b L(c_0(t), \dot{c}_0(t)) dt = 0$$

が成立することである．

証明. 軌跡空間 $\Omega(q_1, q_2, [a, b])$ において $c_0 = c$ なる曲線 $c_\epsilon \in \Omega(q_1, q_2, [a, b])$ の接ベクトル，すなわち，無限小変分を

$$v = \left.\frac{d}{d\epsilon} c_\epsilon\right|_{\epsilon=0}$$

と定義すると[1]，作用関数 $\mathfrak{S}$ の変分は，v を用いて，

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\mathfrak{S}(c) \cdot v &= \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \mathfrak{S}(c_\epsilon) \\ &= \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \int_a^b L(c_\epsilon(t), \dot{c}_\epsilon(t)) dt \end{aligned}$$

となる．ここに，$c_\epsilon(t)$ は曲線 $c(t)$ の変形であり，$c_\epsilon(t) = c(t) + \epsilon\, v(t)$ と定義される．Q の局所座標 $(q^1, \ldots q^n)$ を用いると，上式は，

$$\mathbf{d}\mathfrak{S}(c) \cdot v = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} v^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{v}^i\right) dt$$

と表され，$v(a) = v(b) = 0$ に注意して変形すると，次式を得る．

$$\mathbf{d}\mathfrak{S}(c) \cdot v = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) v^i dt.$$

$\mathfrak{S}$ の停留条件は，全ての $v \in T_c\Omega(q_1, q_2, [a, b])$ に対して，$\mathbf{d}\mathfrak{S}(c) \cdot v = 0$ が成り立つことであり，これより，オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$$

を得る． □

[1] 力学では，通常，v のことを仮想変位と呼び，δc と記す．

接バンドル上のラグランジアン１形式，２形式　以下に，ラグランジュ力学の幾何学的構成について述べる．まず，配位空間 Q の接バンドル TQ 上のラグランジアン形式を余接バンドル T^*Q 上の正準シンプレクティック形式の引き戻しによって定義し，その上でラグランジアン系の定義を与える．

定義 2.3. Q を微分多様体とする．ラグランジアン $L : TQ \to \mathbb{R}$ を用いて，**ファイバー微分** $\mathbb{F}L : TQ \to T^*Q$ を

$$\mathbb{F}L(v)\cdot w = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} L(v+\epsilon\, w)$$

のように定義する．ここに，$v, w \in T_uQ$ であり，$\mathbb{F}L(v)\cdot w$ は，ラグランジアン L の w 方向のファイバーに沿った v における微分を意味する．写像 $\mathbb{F}L : TQ \to T^*Q$ はファイバー保存写像であり，各点 $q \in Q$ におけるファイバー T_q^*Q からファイバー T_uQ への写像である．V を Q のモデル空間として，TQ の局所座標系 $U \times V$ を考え，局所座標を (u, e) とすると，ファイバー微分は，

$$\mathbb{F}L(u,e) = (u, \mathbf{D}_2L(u,e))$$

となる．ここに，$\mathbf{D}_2L$ は L の第二成分 e に関する微分である．有限次元では，L のファイバー微分は，

$$\mathbb{F}L(q^i, v^i) = \left(q^i, \frac{\partial L}{\partial v^i}\right)$$

で与えられる．力学では，$p_i = \partial L/\partial v^i$ として運動量を定義し，$\mathbb{F}L : TQ \to T^*Q$ を**ルジャンドル変換**と呼ぶ．

定義 2.4. ルジャンドル変換 $\mathbb{F}L : TQ \to T^*Q$ によって，余接バンドル T^*Q の正準１形式 Θ と正準シンプレクティック形式（正準２形式）Ω を接バンドル TQ 上に引き戻すことにより[2]，

$$\Theta_L = (\mathbb{F}L)^*\Theta \quad \text{および} \quad \Omega_L = (\mathbb{F}L)^*\Omega$$

が定義できる．Θ_L を**ラグランジアン１形式**，Ω_L を**ラグランジアン２形式**という．$\Omega = -\mathbf{d}\Theta$ が成立すること，及び外微分 $\mathbf{d}$ と引き戻し $(\mathbb{F}L)^*$ が可換であることから，$\Omega_L = -\mathbf{d}\Theta_L$ を得る．

ラグランジアン形式の局所表現　ラグランジアン１形式 Θ_L とラグランジアン２形式 Ω_L に関する局所表現を考えてみよう．Q のモデル空間を V として，V の開集合を U とすると，接バンドル TQ の局所座標は，$(u, e) \in U \times V$ となる．さらに，TQ の接バンドル $T(TQ)$ を考えると，$(u, e) \in U \times V$ の接ベクトルは，$(e_1, e_2), (f_1, f_2) \in V \times V$ と表すことができる．ルジャンドル変換 $\mathbb{F}L : TQ \to T^*Q$ の微分写像 $T\mathbb{F}L : T(TQ) \to T(T^*Q)$ は，局所的に，

$$T_{(u,e)}\mathbb{F}L\cdot(e_1, e_2) = (u, \mathbf{D}_2L(u,e),\, e_1,\, \mathbf{D}_1(\mathbf{D}_2L(u,e))\cdot e_1 + \mathbf{D}_2(\mathbf{D}_2L(u,e))\cdot e_2)$$

と表される．ラグランジアン１形式 $\Theta_L : T(TQ) \to \mathbb{R}$ は，局所的に，

$$\Theta_L(u,e)\cdot(e_1,e_2) = \mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e_1$$

[2] 余接バンドル上の正準１形式 Θ と正準シンプレクティック形式 Ω の内在的な定義については，§3 で述べる．

と表される．また，ラグランジアン2形式 $\Omega_L : T(TQ) \times T(TQ) \to \mathbb{R}$ の局所表現は，次式となる．

$$\begin{aligned}\Omega_L(u,e)\cdot((e_1,e_2),(f_1,f_2)) &= \mathbf{D}_1(\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e_1)\cdot f_1 - \mathbf{D}_1(\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot f_1)\cdot e_1 \\ &\quad + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e_1\cdot f_2 - \mathbf{D}_2\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot f_1\cdot e_2.\end{aligned} \tag{1}$$

有限次元の多様体では，ラグランジアン1形式 Θ_L は，局所座標を用いて，

$$\Theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}dq^i$$

と与えられ，ラグランジアン2形式 Ω_L は，

$$\Omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}dq^i \wedge d\dot{q}^j$$

のように表される．以上より，$\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2L(u,e)$，すなわち，有限次元では $\partial^2 L/\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j$ が非退化のとき，L は正則，または，非退化ラグランジアンとなる．陰関数定理より，L が正則ならば，ファイバー微分 $\mathbb{F}L : TQ \to T^*Q$ は局所的に可逆である．

ラグランジアン系とオイラー・ラグランジュ方程式

定義 2.5. $L : TQ \to \mathbb{R}$ をラグランジアンとする．写像 $A : TQ \to \mathbb{R}$ を $A(v) = \mathbb{F}L(v)\cdot v$ によって定義する．A を L **の作用**と呼ぶ．さらに，ラグランジアン L に関するエネルギ $E = A - L$ として定義する．TQ に関するチャート $(u,e) \in U \times V$ を用いると，局所的に，

$$A(u,e) = \mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e,$$

$$E(u,e) = \mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e - L(u,e)$$

と記述できる．有限次元の多様体では，次のようになる．

$$A(q^i,\dot{q}^i) = \dot{q}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i},$$

$$E(q^i,\dot{q}^i) = \dot{q}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L(q^i,\dot{q}^i).$$

定義 2.6. TQ 上のベクトル場 X_E が，全ての $v \in T_qQ$, $w \in T_v(TQ)$ に対して，**ラグランジアン条件**，

$$\Omega_L(v)(X_E(v),w) = \mathbf{d}E(v)\cdot w \tag{2}$$

を満たすとき，X_E を**ラグランジアンベクトル場**，または，L に対する**ラグランジアン系**という．

命題 2.7. $X_E : TQ \to T(TQ)$ を $L : TQ \to \mathbb{R}$ に関するラグランジアンベクトル場としよう．また，$v(t) \in TQ$ を X_E の積分曲線とすると，エネルギ E は時間 t に関して一定である．

証明. エネルギを時間 t で微分し，式 (2) の条件と Ω_L の歪対称性を利用して，次式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(v(t)) &= \mathbf{d}E(v(t))\cdot\dot{v}(t) = \mathbf{d}E(v(t))\cdot X_E(v(t)) \\ &= \Omega_L(v(t))\,(X_E(v(t)),X_E(v(t))) = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

□

定義 2.8. TQ 上のベクトル場 $X : TQ \to T(TQ)$ は,

$$T\tau_Q \circ X = \mathrm{id}$$

が成立するとき，**2階のベクトル場**という．ここに，$\tau_Q : TQ \to Q$ は標準射影である．2階の接バンドル $T(TQ)$ の部分多様体,

$$T^{(2)}Q = \{w \in TTQ \mid T\tau_Q(w) = \tau_{TQ}(w)\}$$

を定義する．TQ のチャート $(u, e) \in U \times V$ を用いると，$T(TQ)$ は，$(U \times V) \times (V \times V)$ となり，局所座標を用いて，$w = ((u, e), (e_1, e_2)) \in TTQ$ とすると,

$$e_1 = e$$

を満たす $T(TQ)$ の部分多様体となっている．したがって，2階のベクトル場は $X : TQ \to T^{(2)}Q$ として定義される．$c(t)$ を X の積分曲線とするとき，$(\tau_Q \circ c)(t)$ を $c(t)$ の**ベース積分曲線**という．

定理 2.9. X_E を $L : TQ \to \mathbb{R}$ のラグランジアンベクトル場としよう．TQ のチャート $U \times V$ では，X_E の積分曲線 $(u(t), e(t)) \in U \times V$ は，全ての $e_1 \in V$ に対して，オイラー・ラグランジュ方程式

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= e(t), \\ \frac{d}{dt}\mathbf{D}_2 L(u(t), e(t)) \cdot e_1 &= \mathbf{D}_1 L(u(t), e(t)) \cdot e_1 \end{aligned} \tag{4}$$

を満たす．ラグランジアンが正則，すなわち，Ω_L が非退化ならば，X_E は2階のベクトル場となり,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{de}{dt} = [\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2 L(u, e)]^{-1}(\mathbf{D}_1 L(u, e) - \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 L(u, e) \cdot e)$$

を得る．$u(t)$ は，式 *(4)* のオイラー・ラグランジュ方程式を満たすとき，ラグランジアンベクトル場 X_E のベース積分曲線である．有限次元では，オイラー・ラグランジュ方程式は，次のように表される．

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= v^i, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) &= \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

したがって,

$$\ddot{q}^j = G^{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\dot{q}^j\right), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

を得る．ここに，ラグランジアン L は正則であり，G^{ij} は次式で表される．

$$[G^{ij}] = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j}\right]^{-1}.$$

証明. エネルギ E は，TQ に関する $(u, e) \in U \times V$ のチャートで,

$$E(u, e) = \mathbf{D}_2 L(u, e) \cdot e - L(u, e)$$

のように表される．これより，

$$\mathbf{D}E(u,e)\cdot(e_1,e_2)=\mathbf{D}_1(\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e)\cdot e_1+\mathbf{D}_2(\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e)\cdot e_2-\mathbf{D}_1L(u,e)\cdot e_1$$

を得る．したがって，ラグランジアンベクトル場 X_E は，局所的に，

$$X_E(u,e)=(u,e,Y_1(u,e),Y_2(u,e))$$

のように記述できる．式 (1) で表された Ω_L を用いると，式 (2) のラグランジアン条件は，

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}_1\left(\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot Y_1(u,e)\right)\cdot e_1-\mathbf{D}_1(\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e_1)\cdot Y_1(u,e)\\&+\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot Y_1(u,e)\cdot e_2-\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e_1\cdot Y_2(u,e)\\&=\mathbf{D}_1(\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e)\cdot e_1-\mathbf{D}_1L(u,e)\cdot e_1+\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e\cdot e_2\end{aligned}\tag{5}$$

となる．$\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2L(u,e)$ が非退化であるとき，Ω_L はシンプレクティックであり，$e_1=0$ と置くことで，$Y_1(u,e)=e$ を得るので，X_E は 2 階のベクトル場である．X_E が 2 階のベクトル場であれば，式 (5) は，全ての $e_1\in V$ に対して，

$$\mathbf{D}_1L(u,e)\cdot e_1=\mathbf{D}_1(\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e_1)\cdot e+\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2L(u,e)\cdot e_1\cdot Y_2(u,e)$$

となる．さらに，X_E の積分曲線を $(u(t),v(t))$ とすると，$\dot{u}=v$，$\ddot{u}=Y_2(u,v)$ であり，

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1L(u,\dot{u})\cdot e_1&=\mathbf{D}_1(\mathbf{D}_2L(u,\dot{u})\cdot e_1)\cdot\dot{u}+\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2L(u,\dot{u})\cdot e_1\cdot\ddot{u}\\&=\frac{d}{dt}\mathbf{D}_2L(u,\dot{u})\cdot e_1\end{aligned}$$

としてオイラー・ラグランジュ方程式を得る． □

3 ハミルトニアン系

シンプレクティック多様体とハミルトニアン系　ハミルトン力学は，配位空間 Q の余接バンドル T^*Q，すなわち，運動量相空間上で生起する．余接バンドル T^*Q は，いわゆる，シンプレクティック多様体の代表例である．そこで本節では，シンプレクティック多様体 P について概説し，その上で，P 上のハミルトニアン系の定義を述べる．

定義 3.1. 多様体 P 上に，非退化の閉じた 2 形式 $\Omega:TP\times TP\to\mathbb{R}$ が与えられるとき，(P,Ω) のペアを**シンプレクティック多様体**という．

定理 3.2 (ダルブーの定理). (P,Ω) が有限次元のシンプレクティック多様体とすると，P は偶数次元であり，$z\in P$ の近傍で，局所座標 $(q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_n)$ を用いて，

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n}dq^i\wedge dp_i$$

と表すことができる．但し，$\dim P=2n$ である．この局所座標を**正準座標**と呼ぶ．

定義 3.3. (P,Ω) をシンプレクティック多様体とし，ハミルトニアン $H:P\to\mathbb{R}$ を与えたとき，

$$\Omega_z(X_H(z),v)=\mathbf{d}H(z)\cdot v$$

が，全ての $v\in T_zP$ に対して成り立つとき，ベクトル場 $X_H:P\to TP$ を**ハミルトニアンベクトル場**，または，**ハミルトニアン系**という．上式は，内部積を用いて，$\mathbf{i}_{X_H}\Omega=\mathbf{d}H$, $X_H\lrcorner\Omega=\mathbf{d}H$ と表される．さらに，Ω に付随するバンドル写像 $\Omega^\flat:TP\to T^*P$ を用いると

$$\Omega^\flat(z)X_H(z)=\mathbf{d}H(z)$$

のように表される．P が有限次元で Ω が非退化ならば，各点 $z\in P$ で，$\Omega^\flat_z:T_zP\to T^*_zP$ は同相写像であり，H に対して，X_H が一意に定まる．

定義 3.4. P 上の曲線 $z(t)$ に対し，ハミルトニアンベクトル場 X_H に関する微分方程式は，

$$\frac{dz(t)}{dt}=X_H(z(t)) \tag{6}$$

と表される．

正準形式と余接バンドル上のハミルトニアン系　ハミルトニアン系は，T^*Q 上の正準１形式 Θ 及び正準シンプレクティック形式（正準２形式）Ω によって特徴付けられる．そこで，T^*Q 上の正準１形式 Θ 及び正準シンプレクティック形式 Ω の内在的な定義を与えよう．

定義 3.5. Q を微分多様体とする．余接バンドル T^*Q 上の**正準１形式** $\Theta:T(T^*Q)\to\mathbb{R}$ は，

$$\Theta_\alpha(v)=\langle\alpha,\,T\pi_Q\cdot v\rangle$$

として定義される．ここに，$\alpha\in T^*Q, v\in T_\alpha(T^*Q)$，$\pi_Q:T^*Q\to Q$ は標準射影であり，$T\pi_Q:T(T^*Q)\to TQ$ である．**正準シンプレクティック形式** $\Omega:T(T^*Q)\times T(T^*Q)\to\mathbb{R}$ は，$\Omega=-\mathbf{d}\Theta$ で与えられる．

次に，余接バンドル T^*Q 上の正準１形式 Θ と正準シンプレクティック形式 Ω の局所表現を与えよう．まず，配位空間 Q のモデル空間を V とし，V の開集合を U とすると，T^*Q のチャートは $U\times V^*$ で与えられる．$U\times V^*$ 上の正準シンプレクティック形式 Ω は，各点 $(w,\alpha)\in U\times V^*$ において，

$$\Omega_{(w,\alpha)}((u,\beta),(v,\gamma))=\langle\gamma,u\rangle-\langle\beta,v\rangle \tag{7}$$

と定義できる．但し，$(u,\beta),(v,\gamma)\in V\times V^*$ である．同様に，正準１形式 Θ は

$$\Theta_{(w,\alpha)}((u,\beta))=\langle\alpha,\,u\rangle$$

として与えられる．

ハミルトン力学の生起する空間は，運動量相空間，すなわち，配位空間 Q の余接バンドル T^*Q である．有限次元の場合，Q の各点 q の局所座標として $(q^1,...,q^n)$ を与えると，T^*_qQ の基底は $(dq^1,...,dq^n)$ と表さ

れるので，余接ベクトル $\alpha \in T_q^*Q$ は，$\alpha = p_i\, dq^i$ と表される．したがって，$z^I = (q^i, p_i)$ が T^*Q の誘導された局所座標である．ダルブーの定理より，T^*Q 上の正準シンプレクティック形式 Ω は，局所座標によって $\Omega = dq^i \wedge dp_i$ と表される．ここに，正準 1 形式は，$\Theta = p_i\, dq^i$ で与えられ，$\Omega = -\mathbf{d}\Theta$ であることは言うまでもない．

ハミルトニアン $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ について，T^*Q 上のハミルトニアンベクトル場は，局所座標 $z^I = (q^i, p_i)$ によって，$X_H(z) = (q^i, p_i, \dot{q}^i, \dot{p}_i)$ と表される．また，全ての $(\delta q^i, \delta p_i) \in T_z T^*Q$ に対して，

$$\mathbf{d}H(z) \cdot (\delta q^i, \delta p_i) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial q^i}, \delta q^i \right\rangle + \left\langle \delta p_i, \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle \tag{8}$$

が成立する．一方，式 (7) より，次式を得る．

$$\Omega_z(X_H(q^i, p_i), (\delta q^i, \delta p_i)) = \langle \delta p_i, \dot{q}^i \rangle - \langle \dot{p}_i, \delta q^i \rangle.$$

上式が，任意の δq^i，δp_i に対して，式 (8) と等価であることより，次のハミルトン方程式を得る．

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$
$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

命題 3.6. X_H を H に関するハミルトニアンベクトル場とする．$z(t) \in T^*Q$ を X_H の積分曲線とすると，$H(z(t))$ は保存される．

証明. $X_H(z(t))$ に沿ってのハミルトニアン H の微分は，式 (6) と Ω の歪対称性より，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(z(t)) &= \mathbf{d}H(z(t)) \cdot \frac{d}{dt}z(t) = \Omega_{z(t)}\left(X_H(z(t)), \frac{d}{dt}z(t)\right) \\ &= \Omega_{z(t)}\left(X_H(z(t)), X_H(z(t))\right) = 0\end{aligned}$$

となり，ハミルトニアンは保存される． □

ポアソン構造とハミルトニアン系　シンプレクティック多様体を P とすると，ポアソン括弧 $\{,\} : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P)$ を次のように定義できる．但し，$\mathcal{F}(P)$ は P 上の滑らかな関数の集合である．

定義 3.7. シンプレクティック多様体 (P, Ω) を考える．P 上の関数 F, G に対して，**ポアソン括弧** $\{,\} : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \to \mathcal{F}(P)$ は，各点 $z \in P$ において

$$\{F, G\}(z) = \Omega(X_F(z), X_G(z))$$

として定義できる．ここに，

$$\{F, G\}(z) = \mathbf{d}F(z) \cdot X_G(z) = -\mathbf{d}G(z) \cdot X_F(z) \tag{9}$$

である．ポアソン括弧 $\{,\}$ は，全ての関数 $F, G, H, F_1, F_2, G_1, G_2 \in C^\infty(P)$ に対して，

$$(i)\ \{c_1F_1 + c_2F_2,\ G\} = c_1\{F_1, G\} + c_2\{F_2, G\},$$

$$\{F, c_1G_1 + c_2G_2\} = c_1\{F, G_1\} + c_2\{F, G_2\},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \textit{(bilinearity)}$$

$$(ii)\ \{F, G\} = -\{G, F\} \quad \textit{(antisymmetry)}$$

$$(iii)\ \{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0 \quad \textit{(Jacobi identity)}$$

$$(iv)\ \{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\} = 0 \quad \textit{(Leibniz's rule)}$$

を満たす．

例． P の局所座標として $z^I = (q^i, p_i)$ を用いると，ポアソン括弧 $\{,\}$ は，P 上の関数 F, G に対して，

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i \text{ について加える})$$

と表される．これを用いて，次の**基本ポアソン括弧**を得る．

$$\{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \text{及び} \quad \{q^i, p_j\} = \delta^i_j.$$

定義 3.8. ポアソン括弧 $\{,\} : P \to \mathbb{R}$ に付随して，共変歪対称２テンソル $B : T^*P \times T^*P \to \mathbb{R}$ が，

$$B(z)(\mathbf{d}F(z), \mathbf{d}G(z)) = \{F, G\}(z)$$

と定義できる．ここに，$\mathbf{d}F(z), \mathbf{d}G(z) \in T^*_zP$ であり，B を**ポアソン構造**と呼ぶ．また，B に付随して，バンドル写像 $B^\sharp : T^*P \to TP$ を

$$B(z)(\alpha_z, \beta_z) = \langle \alpha_z, B^\sharp(z)(\beta_z) \rangle$$

のように定義できる．

ハミルトニアン $H : P \to \mathbb{R}$ を与えると，全ての関数 $F : P \to \mathbb{R}$ について，

$$X_H[F] = \{F, H\} \tag{10}$$

が成立するようなベクトル場 X_H が唯一存在する．これを H のハミルトニアンベクトル場という．ここで，$\dot{F}(z) = \mathbf{d}F(z) \cdot X_H(z)$ とすると，式 (9) と式 (10) より，

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

と表すことができる[3]．さらに，定義 3.8 より，

$$\{F, H\}(z) = B(z)(\mathbf{d}F(z), \mathbf{d}H(z)) = \langle \mathbf{d}F(z), B^\sharp(z)(\mathbf{d}H(z)) \rangle \tag{11}$$

[3]厳密には，P 上のフローを ϕ_t として，$\frac{d}{dt}(F \circ \phi_t) = \{F, H\} \circ \phi_t$ である．

が成立するので，式(10)と合わせて，**ポアソン形式のハミルトン系**として，次式を得る．

$$X_H(z) = B^\sharp(z)\mathbf{d}H(z). \tag{12}$$

局所座標 z^I により，$\{z^I, z^J\}(z) = B^{IJ}(z)$ とすると，ハミルトニアン H と P 上の関数 F について

$$\{F, H\}(z) = B^{IJ}(z)\frac{\partial F}{\partial z^I}\frac{\partial H}{\partial z^J}$$

と表されるので，$\dot{z} = X_H(z)$ であることに注意すると，式(12)の局所座標表現として，

$$\dot{z} = B^{IJ}\frac{\partial H}{\partial z^J}, \quad I, J = 1, \ldots, 2n$$

を導くことができる．

4　ラグランジアン系とハミルトニアン系の基本構造

次に，ラグランジアン系とハミルトニアン系の基本構造について述べる．まず，ラグランジアン $L : TQ \to \mathbb{R}$ を与えよう．L を超正則とすると，$\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2L(u, e)$ は非退化であり，ルジャンドル変換 $\mathbb{F}L : TQ \to T^*Q$ は微分同相写像となる．よって，ハミルトニアン H は，余接バンドル T^*Q 上の関数として，

$$H = E \circ (\mathbb{F}L)^{-1}$$

と定義される．但し，$E : TQ \to \mathbb{R}$ は L のエネルギである．

命題 4.1. ラグランジアンベクトル場 X_E とハミルトニアンベクトル場 X_H の間には，ルジャンドル変換 $\mathbb{F}L$ によって，

$$(\mathbb{F}L)^*(X_H) = X_E$$

が成立する．また，X_E の積分曲線 $c(t)$ と X_H の積分曲線 $d(t)$ の間には，

$$\mathbb{F}L(c(t)) = d(t) \quad \text{及び} \quad (\tau_Q \circ c)(t) = (\pi_Q \circ d)(t)$$

なる関係が成り立つ．但し，$\tau_Q : TQ \to \mathbb{R}$ と $\pi_Q : T^*Q \to \mathbb{R}$ は標準射影であり，$(\tau_Q \circ c)(t)$ は $c(t)$ のベース積分曲線，$(\pi_Q \circ d)(t)$ は $d(t)$ のベース積分曲線である．

証明. $v \in TQ$ 及び $w \in T_v(TQ)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\Omega(\mathbb{F}L(v))(T_v\mathbb{F}L(X_E(v)), T_v\mathbb{F}L(w)) &= ((\mathbb{F}L)^*\Omega)(v)(X_E(v), w) \\
&= \Omega_L(v)(X_E(v), w) \\
&= \mathbf{d}E(v) \cdot w \\
&= \mathbf{d}(H \circ \mathbb{F}L)(v) \cdot w \\
&= \mathbf{d}H(\mathbb{F}L(v)) \cdot T_v\mathbb{F}L(w) \\
&= \Omega(\mathbb{F}L(v))(X_H(\mathbb{F}L(v)), T_v\mathbb{F}L(w))
\end{aligned}$$

が成立する．Ω の非退化性と $T_v\mathbb{F}L : TTQ \to TT^*Q$ が同相写像であることから，

$$T_v\mathbb{F}L(X_E(v)) = X_H(\mathbb{F}L(v))$$

となる．したがって，$T\mathbb{F}L \circ X_E = X_H \circ \mathbb{F}L$ であり，

$$X_E = (\mathbb{F}L)^* X_H \tag{13}$$

が成り立つ．ψ_t を X_H の流れ，φ_t を X_E の流れとすると，式 (13) は，

$$\mathbb{F}L \circ \varphi_t = \psi_t \circ \mathbb{F}L$$

と等価である．いま，初期条件 $v = c(0)$ とともに，$c(t) = \varphi_t(v)$ ならば，

$$\mathbb{F}L(c(t)) = \psi_t(\mathbb{F}L(v))$$

は，時刻 $t = 0$ で，$\mathbb{F}L(v) = \mathbb{F}L(c(0))$ を通る X_H の積分曲線である．よって，$\psi_t(\mathbb{F}L(v)) = d(t)$ であり，

$$(\pi_Q \circ c)(t) = (\pi_Q \circ \mathbb{F}L \circ c)(t) = (\pi_Q \circ d)(t)$$

を得る．但し，$\tau_Q = \pi_Q \circ \mathbb{F}L$ である． □

ラグランジアン L の作用 $A : TQ \to \mathbb{R}$ は，ラグランジアンベクトル場 X_E を用いて，

$$A(v) = \langle \Theta_L(v), X_E(v) \rangle, \quad v \in TQ \tag{14}$$

と定義できる．ラグランジアンベクトル場 Z は，2 階のベクトル場であるので，

$$\begin{aligned}
\langle \Theta_L(v), X_E(v) \rangle &= \langle ((\mathbb{F}L)^*\Theta)(v), X_E(v) \rangle \\
&= \langle \Theta(\mathbb{F}L(v)), T_v\mathbb{F}L(X_E(v)) \rangle \\
&= \langle \mathbb{F}L(v), T\pi_Q \cdot T_v\mathbb{F}L(X_E(v)) \rangle \\
&= \langle \mathbb{F}L(v), T_v(\pi_Q \circ \mathbb{F}L)(X_E(v)) \rangle \\
&= \langle \mathbb{F}L(v), T_v\tau_Q(X_E(v)) \rangle = \langle \mathbb{F}L(v), v \rangle = A(v)
\end{aligned}$$

が成立する．L が超正則であり，ハミルトニアン $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ を $H = E \circ (\mathbb{F}L)^{-1}$ によって定義すると，

$$A \circ (\mathbb{F}L)^{-1} = (\mathbb{F}L)_* A = (\mathbb{F}L)_*(\langle \Theta_L, X_E \rangle) = \langle (\mathbb{F}L)_*\Theta_L, (\mathbb{F}L)_* X_E \rangle = \langle \Theta, X_H \rangle$$

であることから，$A \circ (\mathbb{F}L)^{-1} = \langle \Theta, X_H \rangle$ が成立する．ここに，$G = \langle \Theta, X_H \rangle$ として定義された写像 $G : T^*Q \to \mathbb{R}$ を H の**作用**という．

定義 4.2. ハミルトニアン $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ は，$\alpha, \beta \in T_q^*Q$ に対して，

$$\mathbb{F}H(\alpha) \cdot \beta = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} H(\alpha + s\beta)$$

によって定義される写像 $\mathbb{F}H : T^*Q \to TQ$ が微分同相写像であるとき，H を超正則なハミルトニアンという．H の超正則性は，$\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2H(u,\alpha)$ の非退化性による．曲線 $s \mapsto \alpha + s\beta$ は，$\alpha(0) = \alpha$, $\alpha'(0) = \beta$ なる余接バンドル T^*Q 上の任意の曲線 $\alpha(s)$ によって置き換えられる．

命題 4.3. *(1)* $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ を超正則なハミルトニアンとする．ラグランジアン $L : TQ \to \mathbb{R}$ を

$$E = H \circ (\mathbb{F}H)^{-1}, \quad A = G \circ (\mathbb{F}H)^{-1}, \quad \text{及び} \quad L = A - E$$

と定義すると，L は超正則であり，ルジャンドル変換は，$\mathbb{F}L = (\mathbb{F}H)^{-1}$ で与えられる．
(2) 逆に，$L : TQ \to \mathbb{R}$ を超正則なラグランジアンとする．ハミルトニアンを，$H = E \circ (\mathbb{F}L)^{-1}$ と定義すると，H は超正則であり，$\mathbb{F}H = (\mathbb{F}L)^{-1}$ となる．

証明. (1) 超正則なハミルトニアン $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ を与えよう．また，Q のモデル空間を V とし，V の双対空間を V^* とする．さらに，V の開集合を U とすると，T^*Q のチャートは $U \times V^*$ によって表すことができ，$\alpha \in V^*$ とすると，H の作用 G は，局所的に，

$$G(u,\alpha) = \langle \alpha, \mathbf{D}_2H(u,\alpha) \rangle$$

と表される．但し，$A(u, \mathbf{D}_2H(u,\alpha)) = (A \circ \mathbb{F}H)(u,\alpha) = G(u,\alpha) = \langle \alpha, \mathbf{D}_2H(u,\alpha) \rangle$ である．このとき，

$$(L \circ \mathbb{F}H)(u,\alpha) = L(u, \mathbf{D}_2H(u,\alpha)) = \langle \alpha, \mathbf{D}_2H(u,\alpha) \rangle - H(u,\alpha) \tag{15}$$

である．いま，$\epsilon = \mathbf{D}_2(\mathbf{D}_2H(u,\alpha)) \cdot \beta$ とし，$e(s) = \mathbf{D}_2H(u, \alpha + s\beta)$ を $s = 0$ で $e(0) = \mathbf{D}_2H(u,\alpha), e'(0) = e$ となる T_qQ の曲線とする．このとき，$s = 0$ における $e(s)$ の微分は，

$$\epsilon'(0) = \mathbf{D}_2(\mathbf{D}_2H(u,\alpha)) \cdot \beta = \epsilon$$

と表される．よって，式 (15) を用いて，

$$\begin{aligned}
\langle (\mathbb{F}L \circ \mathbb{F}H)(u,\alpha), \epsilon \rangle =& \langle (\mathbb{F}(L \circ \mathbb{F}H)(u,\alpha), e \rangle \\
=& \langle \mathbb{F}L(u, \mathbf{D}_2H(u,\alpha)), e \rangle \\
=& \frac{d}{dt}\bigg|_{s=0} L(u, e(s)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{s=0} L(u, \mathbf{D}_2H(u, \alpha + s\beta)) \\
=& \frac{d}{dt}\bigg|_{s=0} [\langle \alpha + s\beta, \mathbf{D}_2H(u, \alpha + s\beta) \rangle - H(u, \alpha + s\beta)] \\
=& \langle \alpha, \mathbf{D}_2(\mathbf{D}_2H(u,\alpha)) \cdot \beta \rangle = \langle \alpha, e \rangle
\end{aligned}$$

を得る．$\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2H(u,\alpha)$ は非退化であり，上式において，$e \in V$ は任意であることから，$\mathbb{F}L \circ \mathbb{F}H = \mathrm{id}$ を得る．$\mathbb{F}H$ は微分同相写像であり，$\mathbb{F}L = (\mathbb{F}H)^{-1}$ と表されるので，ラグランジアン L は超正則である．H の作用 G は，$G = \langle \Theta, X_H \rangle$ と表されることから，

$$A = G \circ (\mathbb{F}H)^{-1} = \langle \Theta, X_H \rangle \circ \mathbb{F}L$$

となり，A が L の作用であることがわかる．したがって，$E = A - L$ は L のエネルギである．

(2) 逆に，正則なラグランジアン $L : TQ \to \mathbb{R}$ が与えられるとする．ハミルトニアン $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ を，$H = E \circ (\mathbb{F}L)^{-1}$ と定義すると，ルジャンドル変換 $\mathbb{F}L$ を用いて，局所的に，

$$
\begin{aligned}
(H \circ \mathbb{F}L)(u, e) =& H(u, \mathbf{D}_2 L(u, e)) \\
=& A(u, e) - L(u, e) \\
=& \mathbf{D}_2 L(u, e) \cdot e - L(u, e)
\end{aligned} \tag{16}
$$

と表すことができる．次に，$\alpha = \mathbf{D}_2(\mathbf{D}_2 L(u, e)) \cdot f$ とする．但し，$f \in E$ であり，$\alpha(s) = \mathbf{D}_2 L(u, e + sf)$ は，$\alpha(0) = \mathbf{D}_2 L(u, e)$, $\alpha'(0) = \alpha$ なる T_q^*Q の曲線であり，式 (16) より，

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha, (\mathbb{F}H \circ \mathbb{F}L)(u, e) \rangle =& \langle \alpha, \mathbb{F}(H \circ \mathbb{F}L)(u, e) \rangle \\
=& \langle \alpha, \mathbb{F}H(u, \mathbf{D}_2 L(u, e)) \rangle \\
=& \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} H(u, \alpha(s)) \\
=& \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} H(u, \mathbf{D}_2 L(u, e + sf)) \\
=& \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} [\langle \mathbf{D}_2 L(u, e + sf), e + sf \rangle - L(u, e + sf)] \\
=& \langle \mathbf{D}_2(\mathbf{D}_2 L(u, e)) \cdot f, e \rangle = \langle \alpha, e \rangle
\end{aligned}
$$

となる．ここに，$\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2 L$ は非退化であり，$\mathbb{F}H \circ \mathbb{F}L = \mathrm{id}$ である．さらに，$\mathbb{F}L$ は微分同相写像であるから，$\mathbb{F}H = (\mathbb{F}L)^{-1}$ となり，ハミルトニアン $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ は超正則であることがわかる． □

以上の関係から，超正則なラグランジアン $L : TQ \to \mathbb{R}$ と超正則なハミルトニアン $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ の間には，図 1 の可換図が成り立つ．すなわち，超正則なラグランジアン L が与えられると，

$$
H = E \circ (\mathbb{F}L)^{-1} = (A - L) \circ (\mathbb{F}L)^{-1} = G - L \circ \mathbb{F}H
$$

として超正則なハミルトニアン H が定義できる．さらに，この超正則なハミルトニアンから

$$
\begin{aligned}
L' =& G \circ (\mathbb{F}H)^{-1} - H \circ (\mathbb{F}H)^{-1} \\
=& G \circ (\mathbb{F}H)^{-1} - (G - L \circ \mathbb{F}H) \circ (\mathbb{F}H)^{-1} = L
\end{aligned}
$$

としてラグランジアン $L' (= L)$ が再構成できる．

逆に，超正則なハミルトニアン H が与えられると，

$$
L = G \circ (\mathbb{F}H)^{-1} - H \circ (\mathbb{F}H)^{-1} = A - F \circ \mathbb{F}L
$$

によって超正則なラグランジアン L が定義できる．さらに，この超正則なラグランジアンから，

$$
\begin{aligned}
H' =& E \circ (\mathbb{F}L)^{-1} = (A - L) \circ (\mathbb{F}L)^{-1} \\
=& A \circ (\mathbb{F}L)^{-1} - (A - H \circ \mathbb{F}L) \circ (\mathbb{F}L)^{-1} = H
\end{aligned}
$$

として超正則なハミルトニアン $H'(=H)$ が再構成できる．以上の関係は，超正則なラグランジアン L と超正則なハミルトニアン H が，ルジャンドル変換 $\mathbb{F}L=(\mathbb{F}H)^{-1}$ によって，相互に規定する関係にあることを意味している．

$$
\begin{tikzcd}
T(T^*Q) \arrow[rr, shift left, "T\mathbb{F}H"] & & T(TQ) \arrow[ll, shift left, "T\mathbb{F}L"] & \\
& \mathbb{R} & & \\
T^*Q \arrow[uu, "X_H"] \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, shift right, "\mathbb{F}H"'] \arrow[dr, "H"'] & & TQ \arrow[uu, "X_E"'] \arrow[ul, "A"'] \arrow[ll, shift right, "\mathbb{F}L"'] \arrow[dl, "E"] \arrow[r, "L"] & \mathbb{R} \\
& \mathbb{R} & &
\end{tikzcd}
$$

図 1: ラグランジアン系とハミルトニアン系の基本構造

5 おわりに

本稿では，Geometric Mechanics の基本的な考え方として，ラグランジアン系とハミルトニアン系の幾何学的構造について解説した．まず，ハミルトンの原理からオイラー・ラグランジュ方程式を定式化し，配位空間 Q の接バンドル TQ（速度相空間）上で与えられるラグランジアン形式から２階のベクトル場としてラグランジアン系を定義した．この際，ラグランジアンが超正則な場合，ルジャンドル変換は微分同相写像となることから，余接バンドル上の正準シンプレクティック形式を接バンドル上への引き戻すことによって，ラグランジュ形式が定義できることを示した．ハミルトニアン系については，余接バンドルに付随する正準シンプレクティック形式からハミルトニアンベクトル場とハミルトニアンの微分の関係として定義した．また，余接バンドル上の正準シンプレクティク形式からポアソン括弧が自然に定義できることを示した上で，ポアソン形式のハミルトン方程式の定式化を行った．さらに，接バンドル TQ（速度相空間）上の超正則なラグランジアンと余接バンドル T^*Q（運動量相空間）上の超正則なハミルトニアンが，ルジャンドル変換によって，相互に定義できることを示し，ラグランジアン系とハミルトニアン系の基本構造を明らかにした．

紙面の都合上，拘束力学系，リダクション理論，リー・ポアソン方程式やオイラー・ポアンカレ方程式といった内容については触れなかったが，本稿で述べた内容が基礎となることは言うまでもない．

本稿は，著者が所属する早稲田大学の特別研究期間を利用して，カリフォルニア工科大学に１年間滞在し

た際に，Jerrold Marsden 教授との議論を通して直接ご指導して頂いたことに基づいている．ここに，同教授に深く謝意を表します．また，非ホロノミック系と退化ラグランジアンに関連して，ディラック構造と変分原理の関係及び陰的ラグランジアン系の枠組みに関する最新の研究成果については，[12] を参照されたい．

参考文献

[1] Abraham, R. and J. E. Marsden [1978], *Foundations of Mechanics.* Benjamin-Cummings Publ. Co, Updated 1985 version, reprinted by Persius Publishing, second edition.

[2] Abraham, R., J. E. Marsden and T.Ratiu [1991], *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications.* volume 75 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, second edition.

[3] Arnold, V. I. [1978], *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Translated by Vogtmann, K. and Weinstein A., Springer-Verlarg.

[4] Bloch, A. M. [2003], *Nonholonomic Mechanics and Control*, volume 24 of *Interdisciplinary Applied Mathematics.*Springer-Verlag. With the collaboration of J. Baillieul, P. E. Crouch, and J. E. Marsden, and with scientific input from P. S. Krishnaprasad, R. M. Murray and D. Zenkov.

[5] Godbillon, C. [1969], *Géométrrie Différentielle Et Mécanique Analytique*, Hermann, Paris.

[6] 伊藤 秀一 [1997], 常微分方程式と解析力学, 共立講座 ２１世紀の数学 11. 共立出版.

[7] MacLane, S. [1968], *Geometric Mechanics (2 parts). Dept. of Math., Univ. of Chicago, Chicago.*

[8] Marsden, J. E. and T. S. Ratiu [1999], *Introduction to Mechanics and Symmetry,* volume 17 of *Texts in Applied Mathematics.* Springer-Verlag, second edition.

[9] 森田 茂之 [1996], 微分形式の幾何学 1, 2, 岩波講座 現代数学の基礎 [25,26]. 岩波書店.

[10] 大森 英樹 [1979], 力学的な微分幾何，数学セミナー増刊，入門現代の数学 [8]. 日本評論社.

[11] 吉村 浩明 [2003], Geometric Mechanics 入門，機械工学における力学系理論の応用に関する研究会資料，日本機械学会，ぱ・る・るプラザ京都, 2003.

[12] Yoshimura, H. and J. E. Marsden [2004], *Variational principles, Dirac structures, and implicit Lagrangian systems*, preprint, 2004.