

# 遅延フィードバックによるカオス制御

大阪大学・大学院基礎工学研究科 山本 茂 (Shigeru Yamamoto)  
Graduate School of Engineering Science  
Osaka University

## 1 はじめに

カオス制御の目的は、カオスアトラクタに埋め込まれた不安定周期軌道をシステムのパラメータの微小摂動により安定化することである [1]。工学分野で見られるカオス現象はその乱雑な振動ゆえ厄介者として抑制すべき対象である場合が多い。そのような振動を抑制する手法として、フィードバック制御が有効である。フィードバックを用いた代表的なカオス制御法は、OGY法 [2] と遅延フィードバック制御 (Delayed Feedback Control; 以下DFCと略す) [3] である。本稿では、DFC法の最近の結果を紹介する。

## 2 カオス制御

制御の対象となるのは次式で記述されるような  $n$  次元カオスシステムの周期軌道である。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t)) \quad (1)$$

ここで、 $t$  は連続時間を、 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$  は状態を表す。  $u \in \mathcal{R}^m$  は制御入力であるが、カオスシステムの調節可能なパラメータベクトル  $p$  のノミナル値  $p_0$  からの微小摂動  $\delta p$  を表すものとする (すなわち、 $u = \delta p = p - p_0$ )。また、 $f: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^n$  は適当な階数の微分が可能であるとする。パラメータベクトル  $p$  が恒等的に  $p \equiv p_0$  であるとき、カオス軌道  $\mathbf{x}(t)$  が生ずるとする。また同時に、周期が  $T$  の周期軌道  $\mathbf{x}_T(t)$  を有しているものとする。すなわち、任意の時間  $t$  で  $\mathbf{x}_T(t) = \mathbf{x}_T(t - T)$  かつ  $\dot{\mathbf{x}}_T(t) = f(\mathbf{x}_T(t), 0)$  を満たす。

制御の目的は、微小摂動  $\delta p$  を制御入力  $u$  としたフィードバック制御による周期軌道の  $\mathbf{x}_T(t)$  の安定化である。言いかえるなら、(1) のカオス軌道  $\mathbf{x}(t)$  を  $\mathbf{x}_T(t)$  へ漸近させるような微小な制御入力  $u(t)$  をフィードバックによって決定することである。このとき、系が安定となるまでパラメータ  $p$  を移動させてその値を保持するのではないということに注意しなくてはならない。たとえば、 $p = p_0$  のときカオス軌道が生じ、 $p = p_1$  のとき安定周期軌道が生じるとすると、パラメータを  $p_0$  から  $p_1$  へ移動させて、安定周期軌道を発生させることは容易であるが、ここではそのような方法は用いない。あくまでも、安定化後にはパラメータが元の値  $p_0$  に戻るような方法でカオスを制御することが目的である。また、カオスアトラクタには可算無限個の不安定周期軌道が密に分布しており、カオス軌道が任意の不安定周期軌道の近傍を通過する時刻が必ず存在する。したがって、安定化したい不安定周期軌道の近傍を軌道を通るときに、パラメータの微小摂動によって、安定多様体上に軌道がとどまるようにできる。

OGY制御法は、Ott, Grebogi, Yorkeにより1990年に提案されたフィードバックによるカオス制御法で、安定多様体と不安定多様体の構造を巧みに利用し、パラメータ摂動によって周期解の安定化を行うものである[2].

OGY法の原理は離散時間状態フィードバックである。カオス状態にある系のスカラー変数  $y(t)$  を観測する。安定化したい周期軌道の周期が  $T$  であるとき、この観測データから、3次元変数  $z(t)$  を次のように構成する。

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t-T) \\ y(t-2T) \end{bmatrix} \quad (2)$$

この  $z$  の軌道は

$$\dot{z}(t) = f(z(t), p) \quad (3)$$

に従っているものとみなせる。この軌道が3次元位相空間のポアンカレ平面を横切る点  $\xi \in \mathbb{R}^2$  を記録する。このとき、 $k$  回目の点を  $\xi(k)$  とするならば、この系の運動は

$$\xi(k+1) = F(\xi(k), p) \quad (4)$$

に従う。この系がカオスアトラクターをもち、 $p = p_0$  であるとき、双曲型の不安定不動点  $\xi_f$  を有するとする。すなわち

$$\xi_f = F(\xi_f, p_0) \quad (5)$$

が成り立ち、(4)は不安定不動点  $\xi_f$  近傍で

$$\xi(k+1) - \xi_f = A(\xi(k) - \xi_f) + B(p(k) - p_0) \quad (6)$$

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_f, p=p_0}, \quad B = \left. \frac{\partial F}{\partial p} \right|_{\xi=\xi_f, p=p_0} \quad (7)$$

と近似できる。

$\xi(k)$  の軌道の観測をもとに、ヤコビ行列  $A$  の単位固有ベクトル  $e_s, e_u$  と対応する固有値  $\lambda_s$  と  $\lambda_u$  がそれぞれ求まる。なお、不動点  $\xi_f$  は双曲型であるので、 $|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u|$  である。これらの間には

$$A \begin{bmatrix} e_s & e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s & e_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_s & 0 \\ 0 & \lambda_u \end{bmatrix} \quad (8)$$

が成り立っている。ここで、

$$\begin{bmatrix} v_s^T \\ v_u^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s & e_u \end{bmatrix}^{-1} \quad (9)$$

とすると、

$$A = \lambda_s e_s v_s^T + \lambda_u e_u v_u^T \quad (10)$$

である。OGY法は、 $v_u^T B \neq 0$  のもとで

$$p(k) = -\frac{\lambda_u}{v_u^T B} v_u^T (\xi(k) - \xi_f) + p_0 \quad (11)$$

として、パラメータ  $p(k)$  を決定する。OGY法は、 $\xi(k)$  が不動点の近傍にあれば (11) を用い、そうでないなら、 $p(k) = p_0$  とするものである。

(6) と (11) を  $x(k) = \xi(k) - \xi_f$ ,  $u(k) = p(k) - p_0$  として書き直すと

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (12)$$

$$u(k) = Kx(k) \quad (13)$$

$$K = -\frac{\lambda_u}{v_u^T B} v_u^T \quad (14)$$

である。(13) を (12) に施すと閉ループ系

$$x(k+1) = (A + BK)x(k) \quad (15)$$

が得られる。閉ループ系 (15) が安定であることと、 $A + BK$  の固有値が複素単位円内にあることとは等価である。OGY法では、(14) の  $K$  によって、 $A + BK$  の固有値は 0 と  $\lambda_s$  となる (固有値 0 と  $\lambda_s$  は共に複素単位円内にあり、安定な固有値である)。これは (15) の  $A + BK$  の正則変換によって確かめられる。

$$\begin{bmatrix} v_s^T \\ v_u^T \end{bmatrix} (A + BK) \begin{bmatrix} v_s^T \\ v_u^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_s & -\lambda_u \frac{v_s^T B}{v_u^T B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

一般に極配置問題は、閉ループ系 (15) の極を任意に与えられた  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  とする  $K$  を求める問題であるが (なお、複素極  $\lambda_i$  に対しては必ずその複素共役極も与えられるものとする)、OGY法は、安定な極  $\lambda_s$  は動かさず、不安定な極  $\lambda_u$  のみ原点に移動させる特殊な極配置法となっていることが分かる。なお、OGY法を用いるためには不動点  $\xi_f$  やベクトル  $e_s$ ,  $e_u$  などを正確に知る必要がある。しかし、一般にそれらを精度良く求めることは困難であり、不確かな不動点  $\xi_f$  や  $e_s$ ,  $e_u$  などを基に OGY法を用いると、安定化できない場合がある。

システム (12) が極配置可能である必要十分条件は  $(A, B)$  が可制御であることである。 $(A, B)$  は可制御であるとは、システム (12) の初期状態  $x(0)$  と目標状態  $x^*$  が任意に与えられたとき、 $x^* = x(k^*)$  となるような時刻  $k^* > 0$  と入力の列  $u(0), \dots, u(k^* - 1)$  が存在する場合いう。このときシステム (12) は可制御ともいう。厳密にはこの定義は可到達性を意味しており、可制御性は有限時間で状態を原点に移動させる入力の存在性を指すが、ここでは、可制御性として定義する。なお  $(A, B)$  が可制御であることと等価な条件として次のものが知られている。

1. 可制御行列  $M$  のランクが  $n$ 。ただし、 $M$  はサイズが  $n \times nm$  で

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (17)$$

2. すべての複素数  $z$  に対し、次の行列  $M(z)$  のランクが  $n$ 。ただし、 $M(z)$  はサイズが  $n \times (n + m)$  で

$$M(z) = \begin{bmatrix} zI - A & B \end{bmatrix} \quad (18)$$

3.  $B$  と直交する  $A$  の左固有ベクトル  $v^T$  と固有値  $\lambda$  が存在しない。すなわち、

$$\lambda v^T = v^T A, \quad v^T B \neq 0 \quad (19)$$

### 3 遅延フィードバック制御 (DFC)

遅延フィードバック制御 (DFC) の特徴は、現時刻の観測値と 1 周期分過去の観測値との差のみをフィードバックに用い、不安定周期軌道をフィードバックに直接用いていないという点にある。このことから、遅延フィードバック制御は、time-delayed feedback control, time-delayed auto-synchronization と呼ばれている。

1992年に遅延フィードバック制御の基本的なアイデアがPyragas[3]によって提案されて以来、様々な対象に適用され注目を集めている。このことは、理論的に明快である OGY 法がその実装に際しては膨大かつ精密なデータ解析を必要とするのに対し、遅延フィードバック制御では、周期軌道をあらかじめ求める必要もないという容易さとそれさえ未知であるような場合にも安定化を可能とする能力を備えていることによるものといってもよい。

遅延フィードバック制御は、安定化したい周期軌道  $\mathbf{x}_T(t)$  の代わりとして、 $T$  時間前の状態  $\mathbf{x}(t-T)$  を用いるフィードバックである。

$$u(t) = K(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-T)) \quad (20)$$

制御に用いることのできる観測出力  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^p$  が、状態ではなく

$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t)) \quad (21)$$

で与えられるときは、

$$u(t) = K(\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t-T)) \quad (22)$$

となる。(20)や(22)をみれば明らかなように、状態が  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_T(t)$  であれば入力  $u(t) = 0$  となる。したがって、周期解そのものが DFC によって影響を受けないことがわかる。このことから、フィードバックゲイン  $K$  が適切に選ばれば、カオスシステムが本来持っている周期軌道  $\mathbf{x}_T(t)$  の安定化が可能となる。

連続時間系における周期軌道の安定化問題は、ストロボ写像やポアンカレ写像を用いて離散時間系の不動点の安定化問題に帰着できる。ストロボ写像は周期外力をもつ非自律系の場合、ポアンカレ写像は自律系の場合に用いられる。連続時間周期軌道はこれらの写像の不動点と一致する。いずれの場合も、状態の離散的な点列が不動点に収束することが周期軌道の安定性を意味することとなるので、これらを次式の離散時間システムとして表現することとする。なお、表記が煩雑となることを避けるため、連続時間系と同じ記号を用いる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= f(\mathbf{x}(k), u(k)) \\ \mathbf{y}(k) &= g(\mathbf{x}(k)) \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $k$  は離散時間、 $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  は状態、 $u(k) \in \mathbb{R}^m$  は入力、 $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^p$  は観測可能な出力を表す。 $u \equiv 0$  のときの (23) の不動点を  $\mathbf{x}_f$  とする。ただし、不動点であることから  $\mathbf{x}_f = f(\mathbf{x}_f, 0)$  を満たす。関数  $f, g$  は適当な階数微分可能であるとする。制御の目的は、不安定不動点  $\mathbf{x}_f$  の安定化である。このとき遅延フィードバック制御は、

$$u(k) = K(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1)) \quad (24)$$

または,

$$u(k) = K(y(k) - y(k-1)) \quad (25)$$

となる。ここで,  $K$  はゲイン行列を表す。

不動点の安定化以外に制御入力がかオスシステムに作用することを防ぐため,  $\|y(k) - y(k-1)\|$  が十分小さくなったときのみフィードバックを施す。したがって, 閉ループ系の安定性は, 不動点近傍での局所的なもののみ考慮することとなり, フィードバックゲイン  $K$  の設計は, 不動点近傍での線形化システムに対して行えばよい。

#### 4 遅延フィードバックの問題点：奇数制約

遅延フィードバック制御には, 奇数制約, あるいは奇数条件と呼ばれる本質的な適用限界がある。それは「奇数制約をもつ不安定不動点は安定化できない」というものである。このことが初めて明らかにされたのは, 連続時間系に対してではなく離散時間系に対してであった [4]。その後, 連続時間系においても同様のことが示されている [5]。また, Pyragas のアイデアをさらに発展させた拡張遅延フィードバック制御 (Extended Delayed Feedback Control; EDFC) [6] やそれをさらに一般化した遅延フィードバック制御においても同様の奇数制約が存在する [7, 8]。

(25) を用いたときの閉ループ系は, 不動点近傍で次のように線形化できる。

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BKC & -BKC \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \end{bmatrix} \quad (26)$$

ただし,  $x(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_f$  であるとし,

$$A = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}_f, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = \frac{\partial}{\partial u} f(\mathbf{x}_f, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad C = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}_f) \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

である。これは,

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [C \quad -C] \quad (27)$$

と定義したとき,

$$\xi(k+1) = (A + BKC)\xi(k) \quad (28)$$

と書けることから, 遅延フィードバックによる安定化問題は, 定数出力フィードバックによる安定化問題となっていることがわかる。たとえば, 状態すべてが観測できたとしても ( $C = I_n$ ), 状態フィードバック問題とはならないことに注意する。

閉ループ系 (26) あるいは (28) の安定性をみるために, 多項式  $F(z) := \det(zI - A - BKC)$  を定義する。閉ループ系 (28) が漸近安定であるためには,  $F(z) = 0$  の根が  $|z| \geq 1$  にあってはならないので,  $F(1) \neq 0$  が必要である。さらに  $z$  を正の実数とするならば,  $F(z)$

の連続性と  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = +\infty$  とから  $F(1) > 0$  が必要であることも分かる。  $F(1)$  を実際計算すると  $A, B, C$  の構造から

$$F(1) = \det(I_n - A)$$

となる。したがって、閉ループ系 (28) が漸近安定であるためには

$$\det(I_n - A) > 0 \quad (29)$$

が必要となる。この条件は  $K$  の値に依存していないので、安定化可能であるための必要条件にもなっている。  $\det(I_n - A)$  は、  $A$  の固有値を  $\lambda_i$  としたとき、  $\prod_1^n (1 - \lambda_i)$  に等しいことから、  $\det(I_n - A) > 0$  は  $1 - \lambda_i < 0$  なる実固有値が存在しないか、存在したとしてもそれが偶数個なくてはならないことを意味している。逆に言うならば、  $1 < \lambda_i$  なる実固有値が奇数個存在する場合は、この必要条件を満たし得ない。すなわち、いかなる遅延フィードバック制御 (22) をもってしても安定化できない。これがいわゆる奇数制約と呼ばれるものである [4]。

**定理 1** カオスシステム (23) の不安定不動点近傍での線形化システム (26) を漸近安定とするような遅延フィードバック制御 (22) が存在するためには、 (29) が必要である。

奇数制約を解消するいくつかの手法がこれまでに提案されている。フィードバックに用いる遅延の項を修正する修正型 DFC [9, 10, 11] やフィードバックに新たなダイナミクスを付与する動的 DFC [12] などである。離散時間系では動的 DFC が有効であり、オブザーバを用いた DFC [13]、Newton 法を用いる DFC [14]、再帰型 DFC [15]、一般化 DFC [16] などがこのクラスに属するが、フィードバックコントローラの次数や安定化の十分条件などが異なっている。

また、離散時間系では周期ゲインを用いる DFC も有効である [17, 18, 19]。しかし、この方法の連続時間系への単純な適用は一般化 DFC に含まれるため、奇数制約の解消はできない [7]。

連続時間系では半周期 DFC [20]、可変構造によるもの [21] などがある。1 入力可制御系とほとんどすべての多入力可制御系に対する平衡点の安定化が DFC (20) で行えるための十分条件が文献 [22, 23] で示されている。

## 5 動的フィードバック

離散時間系における動的遅延フィードバック制御 [12] は次のような  $n$  次元の動的コントローラとして実現できる。

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}e(k) \\ u(k) &= \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}e(k) \\ e(k) &= y(k) - y(k-1) \end{aligned} \quad (30)$$

ただし,  $\hat{A} \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$ ,  $\hat{B} \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times n}$ ,  $\hat{C} \in \mathbb{R}^{m \times \hat{n}}$ ,  $\hat{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\hat{x} \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ . 制御入力  $u(k)$  は,  $\|e(k)\|$  が十分小さくなったときのみ印加されるものとし, それ以外では,  $u(k) = 0$  かつ  $\hat{x}(k) = 0$  とする. したがって, 安定性の解析は不動点  $x_f$  の近傍で線形化された閉ループ系

$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) \quad (31)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} A + B\hat{D}\hat{C} & B\hat{C} \\ \hat{B}\hat{C} & \hat{A} \end{bmatrix}, \quad x_c(k) = \begin{bmatrix} \xi(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

に対して行う.

多項式  $F(z) := \det(zI - A_c)$  を定義すると,

$$F(1) = \det(I_n - A) \det(I_{\hat{n}} - \hat{A})$$

が得られる. ここで, 閉ループシステム (31) が漸近安定であるためには,  $F(1) \neq 0$  が必要であり, そのためには  $\det(I_n - A) \neq 0$  が必要となる. したがって次が結論できる.

**定理 2** (31) を漸近安定とするような動的遅延フィードバックコントローラ (30) が存在するためには,  $\det(I_n - A) \neq 0$  が必要である.

このことは, 不動点の奇数制約  $\det(I_n - A) < 0$  がコントローラの奇数制約  $\det(I_p - \hat{A}) < 0$  によって解消できることも示している.

奇数制約は, 動的コントローラによる自由度  $\det(I_{\hat{n}} - \hat{A})$  によって回避できていることがわかる. さらにカオスシステムの双曲型不動点は定理 2 の必要条件  $\det(I_n - A) \neq 0$  を必ず満たす. さらにこの条件が十分条件にもなることを以下にみてみよう.

## 5.1 オブザーバベースドDFC

動的遅延フィードバック制御 (30) が安定化すべき対象は,

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A\xi(k) + Bu(k) \\ e(k) &= C\xi(k) \end{aligned} \quad (33)$$

であることから, 低次元オブザーバを用いた出力遅延フィードバックコントローラ的设计が可能となる. 文献 [24] では,  $\text{rank } C = p$  なる仮定のもとで,  $p$  次の観測可能な出力のみを用いた  $2n - p$  次の動的遅延フィードバック制御を考えている ( $\hat{n} = 2n - p$ ). (33) に対する最小次元オブザーバは次式で構成できる.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= F\hat{x}(k) + Re(k) + Su(k) \\ \tilde{\xi}(k) &= H\hat{x}(k) + Je(k) \end{aligned} \quad (34)$$

ただし, 各係数行列は条件

$$\begin{aligned} WA - FW &= RC, \quad S = WB \\ HW + JC &= I_{2n} \end{aligned}$$

を満たすものである。ただし、 $\mathcal{F}$ は安定でなくてはならないが、 $(C, A)$ が可検出であればそのような $\mathcal{F}$ が必ず存在する。しかも、 $I_n - A$ が正則であるという仮定のもとでは、 $(C, A)$ の可検出性と $(C, A)$ の可検出性が等価となる。

オブザーバ(34)による $\xi(k)$ の推定値 $\tilde{\xi}(k)$ を用いて、フィードバック入力を $u(k) = K\tilde{\xi}(k)$ とすれば動的DFC(30)の係数は、次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \mathcal{F} + SKH, & \hat{B} &= R + SKJ \\ \hat{C} &= KH, & \hat{D} &= KJ. \end{aligned} \quad (35)$$

オブザーバベースド制御の特徴である分離定理はこの場合でも成り立ち、閉ループ系のダイナミクスは $\mathcal{F}$ によるものと、 $A + BK$ によるものとに分離できる。特に、 $A + BK$ を安定にする $K$ をもちいて、 $K = [K \ 0]$ とすれば

$$A + BK = \begin{bmatrix} A + BK & 0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

となり、安定化が可能である。以上をまとめると以下となる。

**定理 3**  $(A, B)$ は可安定で、 $(C, A)$ は可検出であると仮定する<sup>1</sup>。そのとき、 $\det(I_n - A) \neq 0$ であれば、不動点近傍での線形化システム(31)を漸近安定とする出力フィードバックコントローラ(30)は存在する。

なお、[13]では、状態すべてが観測できる仮定のもとで、 $2n$ 次のオブザーバを用いた遅延フィードバック制御が考案されている。

## 5.2 状態フィードバック

以下では、状態が観測できる場合( $C = I_n$ )を考える。動的DFCの次数が対象の次数と同じ時( $n = \hat{n}$ )は、以下の結果を得る[12]。

**定理 4**  $(A, B)$ は可安定であるとする。このとき、不動点 $x_f$ の近傍の線形化システムを安定化する動的DFC(30)が存在することと $I_n - A$ が正則であることは等価である。さらに、そのような動的DFC(30)の一つは、以下によって得られる。

$$\begin{aligned} \hat{A} &= (I_n - A)^{-1}BK, & \hat{B} &= -(I_n - A)^{-1}BKA(I_n - A)^{-1} \\ \hat{C} &= K, & \hat{D} &= -KA(I_n - A)^{-1} \end{aligned} \quad (36)$$

ただし、 $K$ は $A + BK$ を安定とする行列である。

動的DFCの次数が対象の次数よりも少ない場合( $\hat{n} < n$ )でも、 $I_n - A$ の正則性は安定化動的DFCが存在するための必要条件である。十分条件は線形不等式に基づいた条件で与えられる[12]。この線形不等式に基づいた条件を用いて、低次の動的DFCを得ることも可能であるが、導出過程での計算コストは大きくなってしまふ。一方、動的DFCの

<sup>1</sup> $A + BK$ を安定とする行列 $K$ が存在するとき $(A, B)$ は可安定という。また、 $A + LC$ を安定とする行列 $L$ が存在するとき $(C, A)$ は可検出という。



次数が対象の次数よりも大きい場合 ( $\hat{n} > n$ ) の結果は,  $2n$  次のオブザーバを用いた遅延フィードバック制御として [13] で得られている. この場合,  $\hat{n} = 2n$  となっている.

また, 再帰型遅延フィードバックは  $m$  次の動的 DFC で実現できる [15]. 再帰型 DFC も  $(A, B)$  が可安定となる双曲型不動点を必ず安定化できる. 再帰型 DFC のもう一つ利点は, フィードバックゲインが定数状態フィードバックゲインの設計問題を解くことによって得られる点にある. DFC のフィードバックゲインの設計問題が定数状態フィードバックゲインのそれに帰着できることは, 線形制御系設計理論で知られている様々な手法を適用できることから有益である. たとえば,  $(A, B)$  の不確かさを陽に考慮するために二次安定化などのロバスト制御の手法を適用することも格段に容易となる [15].

### 5.3 数値例

簡単な数値シミュレーションの結果を示しておく [15].

対象は次の離散時間カオスシステムである.

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 1.9x_1(k) - x_1^3(k) + x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 0.5x_1(k). \end{cases} \quad (37)$$

このシステムは 3 つの不動点をもつ.

$$x_{f1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{f2} = \begin{bmatrix} \sqrt{1.4} \\ \sqrt{1.4}/2 \end{bmatrix}, \quad x_{f3} = -x_{f2}.$$

不動点  $x_{f1}$  近傍の線形化システムは,

$$A = \begin{bmatrix} 1.9 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

なる係数行列で与えられる.  $(A, B)$  は可安定であるものの,  $\det(I - A) = -1.4 < 0$  となっており, (24) の DFC によって安定化できない. そこで, 動的型 DFC(30) を用いる. フィードバックゲインを  $(A, B)$  は可制御であるので,  $A + BK$  の固有値をすべて 0 にするような  $K$  が存在する. そのような  $K$  をもちいて, 動的 DFC は

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} 1.3571 & 0.7143 \\ 0.6786 & 0.3571 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 2.5816 & 1.2245 \\ 1.2908 & 0.6122 \end{bmatrix} \\ \hat{C} &= [-1.9 \quad -1], \quad \hat{D} = [-3.6143 \quad -1.7143]. \end{aligned}$$

となる. この動的 DFC を用いたときの状態軌道と制御入力を第 1 図に示す. 初期値は  $[x_1(0), x_2(0)] = [0.7, -0.6]$  である. 時刻  $k = 144$  で始まる制御入力によって状態が  $x_{f1}$  に漸近している. なお, 時刻  $k = 115$  でも  $e$  が小さくなったことにより制御入力が増えられているが, 状態軌道は  $x_{f1}$  の近傍に無かったため, 安定化に失敗している.

## 6 周期ゲインを用いたフィードバック

文献 [17, 18] では, ある種のカオスシステムにはフィードバックゲインを周期的にするとう有効であるとされている. ここではそれらの結果を一般化した文献 [19] の結果を示す.

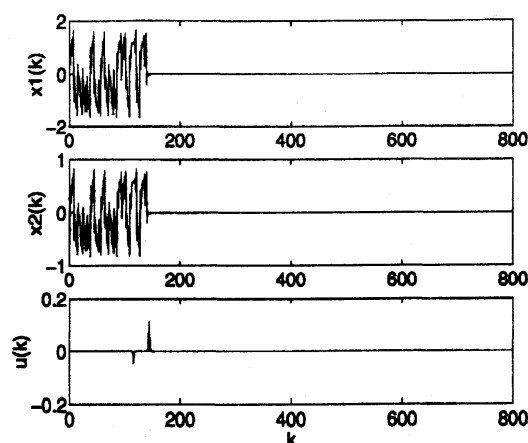


図 1: カオスシステム (37) の不動点  $x_{f1}$  の安定化の様子

(24) の定数フィードバックゲインを周期  $\omega$  のゲインに置き換える.

$$u(k) = K(k)(x(k) - x(k-1)) \quad (38)$$

ゲイン  $K(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  はすべての  $k$  に対し  $K(k) = K(k + \omega)$  をみたす. この周期 DFC によって平衡点  $x_f$  の近傍での線形化システムは同じく周期  $\omega$  の周期システムとなる.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK(k) & -BK(k) \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \end{bmatrix}. \quad (39)$$

このシステムの局所安定性は, モノドロミ行列の固有値によって判別できる. 周期  $\omega$  の行列  $M(\cdot)$  に対し, 行列  $F = \Phi_M(k_0 + \omega, k_0) := M(k_0 + \omega - 1) \cdots M(k_0 + 1)M(k_0)$  の固有値は  $k_0$  に依存せず,  $M(\cdot)$  の特性乗数と呼ばれる. 行列  $F = \Phi_M(k_0 + \omega, k_0)$  は  $k_0$  でのモノドロミと呼ばれる. 周期  $\omega$  の周期システム (39) が漸近安定であることと

$$M(k) := \begin{bmatrix} A + BK(k) & -BK(k) \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

の特性乗数が単位円内に存在することとは等価である. したがって,  $x(k) = 0$  が漸近安定であることと  $k=0$  でのモノドロミ  $F = \Phi_M(\omega, 0)$  が漸近安定であることとは等価である.

## 6.1 2周期ゲイン

以下では,  $\omega = 2$  の場合について考察する.  $k=0$  でのモノドロミ行列は  $F_0 = M(1)M(0)$ . 同様に  $k=1$  でのモノドロミ行列は  $F_1 = M(2)M(1) = M(0)M(1)$ . 次の周期ゲインによって安定化できるための条件を導く.

$$\text{(Case1)} \quad K(k) = \begin{cases} K & \text{if } k \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (41)$$

$$\text{(Case2)} \quad K(k) = \begin{cases} K & \text{if } k \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (42)$$

これらのゲインを用いたときのモノドロミ行列は,

$$F_1 \text{ (for Case1)} = F_0 \text{ (for Case2)} = \begin{bmatrix} A(A+BK) & -ABK \\ A+BK & -BK \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$F_0 \text{ (for Case1)} = F_1 \text{ (for Case2)} = \begin{bmatrix} (A+BK)A - BK & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

となる. (43) は

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A+BK & A^2+BKA-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

と等価であるから,  $A^2+BK(A-I)$  が漸近安定ならこれらのモノドロミ行列は漸近安定である. このとき, もし  $(A^2, B)$  が可安定なら,  $A^2+BW$  を漸近安定とする定数ゲイン  $W$  が存在する. さらに,  $I-A$  が正則なら  $K := W(A-I)^{-1}$  は  $A^2+BK(A-I)$  を漸近安定とする.

**定理 5** システム (39) が周期ゲイン (41) または (42) をもつ周期 DFC (38) によって安定化可能となる十分条件は  $(A^2, B)$  が可安定かつ  $I_n - A$  が正則となることである.

この結果は, 周期 DFC も奇数条件を回避できていることを示しており,  $\det(I-A) \neq 0$  となるほとんどすべての不動点を安定化できることを表している.

5.3 節と同じ対象に周期ゲインを適用した結果を示す. 適用した 2 周期ゲインは

$$K = [-4.0654 \quad -1.9023]$$

を用いるものとした. この周期 DFC を用いたときの状態軌道と制御入力を第 2 図に示す. 5.3 節と比べて, 何度か安定化に失敗しているものの最終的には安定化ができていることが確認できる.

## 7 おわりに

本稿では, 遅延フィードバックによるカオス制御を線形制御理論の観点から紹介した. 遅延フィードバックは OGY 法に比べ, 対象の情報を必要としない制御法となっているが, 実対象に適用する場合にはロバスト性の確保など, いくつかの課題が残されており, 今後の進展が期待される. なお, 文献 [1, 25, 26, 27, 28] などあわせて参考にされたい.

## 参考文献

- [1] 潮: カオス制御, カオス全書 4, 朝倉書店 (1996)
- [2] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke: Controlling chaos, *Physical Review Letters*, Vol. 64, No. 11, pp. 1196-1199 (1990).

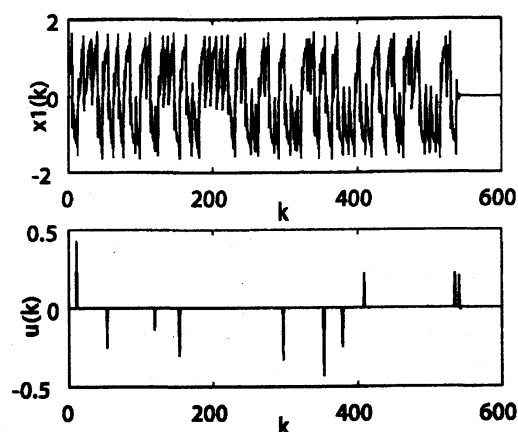


図 2: 周期 DFC によるカオスシステム (37) の不動点  $x_{f1}$  の安定化の様子

- [3] K. Pyragas: Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters A*, Vol. 170, pp. 421–428 (1992)
- [4] T. Ushio: Limitation of delayed feedback control in non-linear discrete-time systems, *IEEE Trans. Circuits and Systems I*, Vol. 43, No. 9, pp. 815–816 (1996)
- [5] H. Nakajima: On analytical properties of delayed feedback control of chaos, *Physics Letters A*, Vol. 232, pp. 207–210 (1997)
- [6] J. E. S. Socolar, D. W. Sukow, and D. J. Gauthier: Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems, *Physical Review E*, Vol. 50, No. 2, pp. 3245–3248 (1994)
- [7] H. Nakajima and Y. Ueda: Limitation of generalized delayed feedback control, *Physica D*, Vol. 111, pp. 143–150 (1998)
- [8] K. Konishi, M. Ishii, and H. Kokame: Stability of extended delayed feedback control for discrete-time chaotic systems, *IEEE Trans. Circuits and Systems I*, Vol. 46, No. 10, pp. 1285–1288 (1999)
- [9] T. Ushio and S. Yamamoto: Delayed feedback control with nonlinear estimation in chaotic discrete-time systems, *Physica Letters A*, Vol. 247, pp. 112–118 (1998)
- [10] T. Ushio and S. Yamamoto: Prediction-based control of chaos, *Physics Letters A*, Vol. 264, pp. 30–35 (1999)
- [11] 中島: 状態予測に基づく連続時間系の遅延フィードバック制御, 信学技報, NLP2000–87, pp. 61–68 (2000)
- [12] S. Yamamoto, T. Hino, and T. Ushio: Dynamic delayed feedback controllers for chaotic discrete-time systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, Vol. 48, No. 6, pp. 785–789 (2001)
- [13] K. Konishi and H. Kokame: Observer-based delayed-feedback control for discrete-time chaotic systems, *Physics Letters A*, Vol. 248, pp. 359–368 (1998)

- [14] D. Xu and S. R. Bishop: Self-locating control of chaotic systems using Newton algorithm, *Physics Letters A*, Vol. 210, pp. 273–278 (1996)
- [15] S. Yamamoto, T. Hino, and T. Ushio: Recursive delayed feedback control for chaotic discrete-time systems, in *Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2187–2192 (2001)
- [16] H. Nakajima: A generalization of the extended delayed feedback control for chaotic systems, in *Proc. of COC2000*, Vol. 2, pp. 209–212 (2000)
- [17] S. Bielawski, D. Derozier and P. Glorieux: Experimental characterization of unstable periodic orbits by controlling chaos, *Physical Review A*, Vol. 47, No. 2, pp. 2493–2495 (1993)
- [18] H. G. Schuster and M. B. Stemmler: Control of chaos by oscillating feedback, *Physical Review E*, Vol. 56, No. 6, pp. 6410–6417 (1997)
- [19] S. Yamamoto and T. Ushio: Stabilization of discrete-time chaotic systems by periodic delayed feedback control, *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, TA17-4 (2002)
- [20] H. Nakajima and Y. Ueda: Half-period delayed feedback control for dynamical systems with symmetries, *Physical Review E*, Vol. 58, No. 2, pp. 1757–1763 (1998)
- [21] X. Yu: Tracking inherent periodic orbits in chaotic dynamic systems via adaptive variable structure time-delayed self control, *IEEE Trans. Circuits and Systems I*, Vol. 46, No. 11, pp. 1408–1411 (1999)
- [22] H. Kokame, K. Hirata, K. Konishi, and T. Mori: State difference feedback for stabilizing uncertain steady states of non-linear systems, *Int. J. of Control*, Vol. 74, No. 6, pp. 537–546 (2001)
- [23] H. Kokame, K. Hirata, K. Konishi, and T. Mori: Difference feedback can stabilize uncertain steady states, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 46, No. 12, pp. 1908–1913 (2001)
- [24] S. Yamamoto, T. Hino, and T. Ushio: Delayed feedback control with a minimal-order observer for stabilization of chaotic discrete-time systems, *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, Vol. 12, No 5, pp.– (2002)
- [25] 小西：カオスシステムの制御，計測と制御，Vol. 41, No. 8, pp. 606–612 (2002)
- [26] 山本：遅延フィードバック制御 – むだ時間を利用したカオス制御，システム／制御／情報，Vol. 46, No. 7, pp. 377–384 (2002)
- [27] S. Yamamoto and T. Ushio: Robust Stabilization of Chaos via Delayed Feedback Control, *Control and Modeling of Complex Systems: Cybernetics in the 21st Century* (K. Hashimoto, Y. Oishi and Y. Yamamoto, eds.), pp. 229–243, Birkhauser, (2003)
- [28] S. Yamamoto and T. Ushio: Odd number limitation in delayed feedback control to appear in Chaos Control: Theory and Applications (G. Chen and X. Yu, eds.), *Lecture Notes in Control and Information Sciences* Vol. 292, pp. 71–87, Springer-Verlag (2003)