数理解析研究所講究録 1370 巻 2004 年 86-101

How many miles to $\beta\omega$? — $\beta\omega$ まで何マイル?

嘉田 勝* (Masaru Kada)
北見工業大学 (Kitami Institute of Technology)
友安 一夫† (Kazuo Tomoyasu)
都城工業高等専門学校 (Miyakonojo National College of Technology)

How many miles to Babylon?
Three score miles and ten.
Can I get there by candle-light?
Yes, and back again.
If your heels are nimble and light,
You may get there by candle-light.

1 はじめに

ここでは特に断らない限り，コンパクトでない局所コンパクト距離空間を扱うものとする．一般に位相空間 X の Stone-Čech コンパクト化を βX で表す．

位相空間 X のコンパクト化 $\alpha X, \gamma X$ について，γX から αX への連続な全射で，X への制限が恒等写像となるものが存在するとき，$\alpha X \leq \gamma X$ と表す．特にその写像が同相写像でとれるとき，$\alpha X \simeq \gamma X$ と表し，αX と γX は同値であるという．X のコンパクト化全体を $K(X)$ とする．通常，$K(X)$ の元は $\simeq$ に関する同値類と考え，同値なコンパクト化は区別しないものとする．このとき，$K(X)$ は $\leq$ 関係について上半束をなし，X の Stone-Čech コンパクト化 βX は $\leq$ に関する最大元，X の一点コンパクト化は（存在すれば）最小元となる．

本稿での研究目標は，$K(X)$ の部分集合 $\mathcal{P}$ が束の意味で $\beta X \simeq \sup\mathcal{P}$ を満たすとき，βX を近似するための本質的に必要な $\mathcal{P}$ の元の個数を調べることである．扱うコンパクト化のクラスは Smirnov コンパクト化と Higson コンパクト化である．ともに距離に依

* 文部科学省 科学研究費補助金 若手研究 (B) 14740058.
† 文部科学省 科学研究費補助金 若手研究 (B) 14740057.

存するコンパクト化として知られている．

位相空間 X から $\mathbb{R}$ への有界連続関数全体の集合を $C^*(X)$ で表す．$C^*(X)$ は（各点ごとの和と積について）環の構造を持ち，また，sup-norm によって距離が導入される．一般に，位相空間 X のコンパクト化 αX について，X から $\mathbb{R}$ への有界連続関数のうち αX 上に連続に拡張できる（すなわち，$\bar{f} \in C^*(\alpha X)$ で，$\bar{f} \restriction X = f$ を満たすものが一意的に存在する）ものの全体を C_α とおくと，C_α は $C^*(X)$ の点と閉集合を分離する閉部分環をなし，定数関数をすべて含む．また，この C_α は αX を生成する $C^*(X)$ の部分集合のうち最大のものである．逆に，定数関数をすべて含み，かつ $C^*(X)$ の点と閉集合を分離する閉部分環 R が与えられたとき，X のコンパクト化 αX で，$C_\alpha = R$ となる，すなわち，αX 上に連続に拡張できる X から $\mathbb{R}$ への有界連続関数の全体がちょうど R と一致するものが存在する．特に，X の Stone-Čech コンパクト化 βX については，すべての $f \in C^*(X)$ が βX 上に連続に拡張できる．

本稿限りの記法として，次の略記法を導入する．空間 X のコンパクト化 αX と，X の空でない閉集合 A, B に対して，$\mathrm{cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{cl}_{\alpha X} B = \emptyset$ であるときに $A \parallel B$ (αX) と記し，その否定を $A \nparallel B$ (αX) と記す．Stone-Čech コンパクト化については，X の互いに素な閉集合 A, B について常に $A \parallel B$ (βX) が成り立つ．

ここで，次の補題は基本的であり，本稿では断ることなく使う．

補題 1.1. X のコンパクト化 $\alpha X, \gamma X$ について，次は同値である．

1. $\alpha X \leq \gamma X$.
2. X の閉集合 A, B について，$A \parallel B$ (αX) ならば $A \parallel B$ (γX) である．
3. $f \in C^*(X)$ が αX 上に連続に拡張可能ならば，f は γX 上に拡張可能である．

次の補題は，以下の議論において重要である．

補題 1.2. $\mathcal{A}$ を X のコンパクト化の集合とする．X の空でない互いに素な閉集合 A, B について，以下は同値である．

1. $A \parallel B$ $(\sup \mathcal{A})$.
2. ある有限集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ に対し，$A \parallel B$ $(\sup \mathcal{F})$.

証明. $\alpha X \in \mathcal{A}$ に対し，C_α を，αX 上に連続に拡張可能な X 上の有界連続関数全体のなす $C^*(X)$ の閉部分環とする．$R = \mathrm{cl}\langle \bigcup \{C_\alpha : \alpha X \in \mathcal{A}\} \rangle$（ただし，$S \subseteq C^*(X)$ に対し $\langle S \rangle$ は S で生成される $C^*(X)$ の部分環を表す）とおくと，R は $\sup \mathcal{A}$ 上に連続に拡張可能な X 上の有界連続関数全体のなす $C^*(X)$ の閉部分環と一致する．

$A \parallel B$ $(\sup \mathcal{A})$ とすると，$f \in R$ で，f は A と B を関数分離する，すなわち，$f''A = \{0\}$, $f''B = \{1\}$ を満たすものが存在する．この f は，$\bigcup\{C_\alpha : \alpha X \in \mathcal{A}\}$ の元の和，積および一様収束する関数列の極限によって得られる．ところが，f が一様収束する関数列の極限として得られたとすると，その関数列の途中に現れる関数によって，すでに A と B は関数分離されている．したがって，f は $\bigcup\{C_\alpha : \alpha X \in \mathcal{A}\}$ の元の和と積によって得られているとしてよい．すると，$\bigcup\{C_\alpha : \alpha X \in \mathcal{A}\}$ の元のうち，f の構成に関わっているものは有限個である．したがって，ある有限集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ について，$f \in \mathrm{cl}\langle\bigcup\{C_\alpha : \alpha X \in \mathcal{F}\}\rangle$ となる．これは $A \parallel B$ $(\sup \mathcal{F})$ を意味する． □

ω から ω への関数全体の集合を ω^ω で表す．$f, g \in \omega^\omega$ に対し，すべての $n < \omega$ について $f(n) \leq g(n)$ であるとき $f \leq g$ と表し，**有限個を除く**すべての $n < \omega$ について $f(n) \leq g(n)$ であるとき $f \leq^* g$ と表す．ω^ω の部分集合 $\mathcal{F}$ が $\leq^*$ (あるいは $\leq$) に関する dominating family であるとは，任意の $g \in \omega^\omega$ に対し，ある $f \in \mathcal{F}$ が $g \leq^* f$ $(g \leq f)$ を満たすときにいう．基数 $\mathfrak{d}$ を，$\leq^*$ に関する dominating family の最小の濃度として定義する．ただし，$\leq^*$ でなく $\leq$ に関する dominating family の最小の濃度としても，基数としては同じになる．

ω から $2 = \{0, 1\}$ への関数全体の集合 2^ω に，2 点離散空間 $\{0, 1\}$ の可算直積としての位相を導入した空間を**カントール空間**と呼ぶ．また，$\{0, 1\}$ の各点に 1/2 の測度を与え，直積測度を考えることで，2^ω に測度を導入する．2^ω におけるベール第一類集合の全体を $\mathcal{M}$，ルベーグ測度零の集合の全体を $\mathcal{N}$ で表す．$\mathcal{M}$ および $\mathcal{N}$ は 2^ω 上の可算加法的なイデアルである．基数 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ および $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ を，

$$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \text{ かつ } \bigcup \mathcal{A} = 2^\omega\}$$
$$\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \text{ かつ } \bigcup \mathcal{A} = 2^\omega\}$$

によって定義する．

本稿では ω 上の超フィルタを扱うが，単に超フィルタといえば，non-principal な（すなわち，有限集合の補集合をすべて元として持つ）超フィルタを意味するものとする．フィルタ $\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{G}$ が $\mathcal{F}$ を**生成する**とは，任意の $X \in \mathcal{F}$ に対し，ある $Y \in \mathcal{G}$ が $Y \subseteq X$ を満たすときにいう．基数 $\mathfrak{u}$ を，ω 上の超フィルタを生成する $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合の最小濃度として定義する．

$\mathfrak{d}$, $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$, $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$, $\mathfrak{u}$ の間には，次の関係が成り立つ．

命題 1.3. 1. $\aleph_1 \leq \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$，$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{u} \leq \mathfrak{c}$ かつ $\aleph_1 \leq \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{u}$ である．さらに，それぞれの $\leq$ について，$<$ が成り立つことは ZFC 上無矛盾である．

2. $\mathfrak{d} < \mathsf{cov}(\mathcal{N})$ は ZFC 上無矛盾である.
3. $\mathsf{cov}(\mathcal{N}) < \mathsf{cov}(\mathcal{M})$ は ZFC 上無矛盾である.
4. $\mathfrak{u} < \mathfrak{d}$ は ZFC 上無矛盾である.

$X, Y \subseteq \omega$ に対し, $X \setminus Y$ が有限集合であるとき, $X \subseteq^* Y$ と表す.
実数 r に対し, $\lfloor r \rfloor$ は r を超えない最大の整数, $\lceil r \rceil$ は r 以上の最小の整数を表す.
正の有理数全体の集合を $\mathbb{Q}^+$ で表す.

2 Smirnov コンパクト化による Stone-Čech コンパクト化の近似

X から $\mathbb{R}$ への距離 d に関する有界一様連続関数の全体を $U_d^*(X)$ で表す. $U_d^*(X)$ は $C^*(X)$ の閉部分環で, 定数関数をすべて含み, かつ点と閉集合を分離する族である. この $U_d^*(X)$ と対応するコンパクト化を u_dX で表し, X の Smirnov コンパクト化という.

次の補題に示されている Smirnov コンパクト化の特徴づけは, 以下の議論においてしばしば用いられる.

補題 2.1. コンパクトでない距離空間 (X, d) のコンパクト化 αX について, 次は同値である.

1. $\alpha X \simeq u_dX$.
2. $f \in C^*(X)$ について, f が αX 上に連続に拡張できることと $f \in U_d^*(X)$ であることが同値である.
3. X の閉集合 A, B について, $A \parallel B$ (αX) と $d(A, B) > 0$ が同値である.

X と同じ位相を導く距離関数の全体を $\mathrm{M}(X)$ で表す. 次の定理は, 距離空間 X の Stone-Čech コンパクト化 βX は, X と同じ位相を導く距離関数に関する Smirnov コンパクト化の全体で近似できることを意味する.

定理 2.2. ([8]) X をコンパクトでない距離空間とするとき, $\beta X \simeq \sup\{u_dX : d \in \mathrm{M}(X)\}$ である.

それでは, その近似のために本質的に必要な距離関数の個数はいくらだろうか.

定義 2.3. 距離空間 X に対し,

$$\mathfrak{sa}(X) = \min\{|D| : D \subseteq \mathrm{M}(X) \text{ かつ } \sup\{u_dX : d \in D\} \simeq \beta X\}$$

と定義する．

まず手始めに，X として半直線 $[0,\infty)$ を考えてみよう．

命題 2.4. $\mathfrak{sa}([0,\infty))=\mathfrak{d}$.

証明. まず，$\mathfrak{sa}([0,\infty))\le\mathfrak{d}$ を示す．$\mathcal{F}\subseteq\omega^\omega$ を $\le$ に関する dominating family で，濃度が $\mathfrak{d}$ のものとする．ここで，すべての $f\in\mathcal{F}, n<\omega$ について $f(n)\ge 1$ と仮定して一般性を失わない．各 $f\in\mathcal{F}$ に対し，距離関数 ρ_f を，$x,y\in[0,\infty)$ に対し

$$\rho_f(x,y)=\left|\int_x^y f(\lfloor t\rfloor)dt\right|$$

とおくことにより定義する．

$D=\{\rho_f : f\in\mathcal{F}\}$ とし，$A,B\subseteq[0,\infty)$ を互いに素な閉集合とする．このとき，$A\parallel B$ $(\sup\{u_d[0,\infty):d\in D\})$ を示すことが目標であるが，そのためには，ある $f\in\mathcal{F}$ について $A\parallel B$ $(u_{\rho_f}[0,\infty))$ となることを示せば十分である．

一般性を失うことなく，A,B は，正の無限大に発散する実数の非減少列 $0\le c_0\le c_1\le\cdots$ によって

$$A=\bigcup_{k<\omega}[c_{4k},c_{4k+1}],\quad B=\bigcup_{k<\omega}[c_{4k+2},c_{4k+3}]$$

の形に表されているとしてよい．特に，$A\cap B=\emptyset$ より，すべての $k<\omega$ について $c_{2k+1}<c_{2k+2}$ である．この A,B に対し，$h_{A,B}\in\omega^\omega$ を

$$h_{A,B}(m)=\max\left(\left\{\left\lceil\frac{1}{c_{2k+2}-c_{2k+1}}\right\rceil : c_{2k+2}<m+1\right\}\cup\{1\}\right)$$

により定義する．$\mathcal{F}$ は $\le$ に関する dominating family であるから，$h_{A,B}\le f$ となる $f\in\mathcal{F}$ が存在する．このとき，ρ_f と $h_{A,B}$ の定義によって，すべての $k<\omega$ について $\rho_f(c_{2k+1},c_{2k+2})\ge 1$ となるので，$\rho_f(A,B)=\inf\{\rho_f(c_{2k+1},c_{2k+2}):k<\omega\}>0$ である．ゆえに，$A\parallel B$ $(u_{\rho_f}[0,\infty))$ が成り立つ．

次に，$\mathfrak{sa}([0,\infty))\ge\mathfrak{d}$ を示す．そのために，$\kappa<\mathfrak{d}$ を固定し，$D\subseteq\mathcal{M}([0,\infty))$ かつ $|D|\le\kappa$ ならば $\sup\{u_d[0,\infty):d\in D\}\not\ge\beta[0,\infty)$ であることを示す．

各 $d\in D$ に対し，$g_d\in\omega^\omega$ を，

$$g_d(m)=\min\left\{k<\omega : \mathrm{B}_d\left(m,\frac{1}{m}\right)\supseteq\left(m-\frac{1}{k},m+\frac{1}{k}\right)\right\}$$

によって定義する．また，各 $F\in[D]^{<\omega}$ に対し，$g_F(m)=\max\{g_d(m):d\in F\}$ によって $g_F\in\omega^\omega$ を定義する．$|D|^{<\omega}=|D|\le\kappa<\mathfrak{d}$ であるから，$f\in\omega^\omega$ で，すべての

$F \in [D]^{<\omega}$ について $f \not\leq^* g_F$ となるものが存在する．ここで，すべての $n < \omega$ について $f(n) \geq 2$ と仮定してよい．

$[0, \infty)$ の閉集合 A, B を，$A = \omega$, $B = \{m + 1/f(m) : m < \omega\}$ により定義する．

各 $F \in [D]^{<\omega}$ に対し，$I_F = \{m < \omega : g_F(m) < f(m)\}$ とおくと，I_F は ω の無限部分集合となる．g_F の定義より，$m \in I_F$ については，すべての $d \in F$ に対して $d(m, m + 1/f(m)) < 1/m$ が成り立つ．したがって，$\bigcup\{U_d^*([0,\infty)) : d \in F\}$ に属する関数 ψ については，数列 $\{\psi(m) - \psi(m + 1/f(m)) : m \in I_F\}$ は 0 に収束しなければならない．したがって，$A \not\parallel B$ $(\sup\{u_d[0,\infty) : d \in F\})$ である．補題 1.2 により，これは $A \not\parallel B$ $(\sup\{u_d[0,\infty) : d \in D\})$ と同値である．ゆえに，$\sup\{u_d[0,\infty) : d \in D\} \not\simeq \beta[0,\infty)$ である． □

ところで，ある $d \in \mathrm{M}(X)$ について $u_d X \simeq \beta X$ が成り立つ場合には，$\mathfrak{sa}(X) = 1$ となり，$\mathfrak{sa}(X)$ の概念は意味をなさない．

定理 2.5. ([1, 8]) 以下は同値である．

1. ある $d \in \mathrm{M}(X)$ について $u_d X \simeq \beta X$ が成り立つ．
2. ある $d \in \mathrm{M}(X)$ について $U_d^*(X) = C^*(X)$ が成り立つ．
3. X から孤立点を除いて得られる部分空間がコンパクトである．

特に，X が離散空間であれば，$\mathfrak{sa}(X) = 1$ である．

3 $\beta\omega$ の自明でない近似

ω の Smirnov コンパクト化による $\beta\omega$ の近似を考えようとすると，$\mathfrak{sa}(\omega)$ では意味をなさないので，別の定義を考える必要がある．

定義 3.1. $\mathrm{M}'(X) = \{d \in \mathrm{M}(X) : u_d X \not\simeq \beta X\}$ と定義する．$D \subseteq \mathrm{M}'(\omega)$ が Smirnov Finite Intersection Property (Smirnov-FIP) を満たすとは，すべての $F \in [D]^{<\omega}$ に対して $\sup\{u_d\omega : d \in F\} \not\simeq \beta\omega$ が成り立つときにいう．

基数 $\mathfrak{sp}, \mathfrak{st}$ を，次のように定義する．

$$\mathfrak{sp} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{M}'(\omega),\ D \text{ は Smirnov-FIP を満たし，} \\ \text{かつ } \sup\{u_d\omega : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{st} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{M}'(\omega),\ \{u_d\omega : d \in D\} \text{ は } \leq \text{ で整列されていて，} \\ \text{かつ } \sup\{u_d\omega : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}$$

ただし，min の対象が空集合の場合には，$\min\emptyset$ を記号 ∞ で表現し，すべての基数 κ に対して $\kappa<\infty$ と規約する．

この定義は，「Stone-Čech コンパクト化を近似するためにいくつの Smirnov コンパクト化が必要か」という当初の問題意識に沿ったものである．しかし，このままの定義では扱いづらいので，思考の手がかりとして，より単純な概念を定義する．

X を距離空間とする．$d_1, d_2 \in \mathrm{M}(X)$ に対し，$d_1 \le d_2$ とは，すべての $x, y \in X$ について $d_1(x,y) \le d_2(x,y)$ であることを表す．このとき，$U^*_{d_1}(X) \subseteq U^*_{d_2}(X)$ であり，したがって $u_{d_1}X \le u_{d_2}X$ であることが容易にわかる．また，関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を，すべての $x, y \in X$ に対して $d(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ とおくことにより定義し，この d を $\max\{d_1, d_2\}$ で表す．このとき，$d \in \mathrm{M}(X)$ である．すなわち，$\mathrm{M}(X)$ は順序関係 $\le$ に関して有向 (directed) である．

$d_1, d_2 \in \mathrm{M}(X)$ に対し，$U^*_{d_1}(X) \subseteq U^*_{d_2}(X)$ であるとき（あるいは，同値な条件として，$u_{d_1}X \le u_{d_2}X$ であるとき），$d_1 \preceq d_2$ と表す．これは，X 上の恒等写像が (X, d_2) から (X, d_1) への一様連続関数になっていることと同値である．

$d_1 \preceq d_2$ かつ $d_2 \preceq d_1$ であるとき，$d_1 \sim d_2$ と表し，d_1, d_2 は**一様同値**であるという．このとき，$\sim$ は $\mathrm{M}(X)$ 上の同値関係となり，$\preceq$ は自然な射影によって商集合 $\mathrm{M}(X)/\sim$ 上の半順序関係を導く．明らかに，$d_1 \le d_2$ ならば $d_1 \preceq d_2$ である．逆に，$\rho_1 \preceq \rho_2$ ならば，$\rho_2' \sim \rho_2$ かつ $\rho_1 \le \rho_2'$ を満たす ρ_2' が存在する．

定義 3.2. 基数 $\mathfrak{sp}'$, $\mathfrak{st}'$ を，次のように定義する．

$$\mathfrak{sp}' = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{M}'(\omega),\ D \text{ は } \preceq \text{ に関して有向で，} \\ \text{かつ } \sup\{u_d\omega : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{st}' = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{M}'(\omega),\ D \text{ は } \preceq \text{ で整列されていて，} \\ \text{かつ } \sup\{u_d\omega : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}$$

次に示す相互関係は明らかである．

命題 3.3. $\mathfrak{sp} \le \mathfrak{sp}' \le \mathfrak{st}' = \mathfrak{st}$.

4 コーエン実数，ランダム実数と $\mathfrak{sp}'$

本節では，$\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ および $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ が $\mathfrak{sp}'$ の下限となることを示す．

補題 4.1. $d \in \mathrm{M}'(\omega)$ に対し，次の性質を満たす自然数の組の列 $\{(a_i^d, b_i^d) : i < \omega\}$ が存在する．

1. すべての $i, j < \omega$ について $a_i^d \neq b_j^d$.
2. $i \neq j$ ならば $a_i^d \neq a_j^d$, $b_i^d \neq b_j^d$.
3. $d(a_i^d, b_i^d) < 2^{-i}$.

証明. $u_d\omega \not\preceq \beta\omega$ だから，ω の互いに素な無限集合 A, B で，$A \nparallel B$ $(u_d\omega)$ すなわち $d(A, B) = 0$ を満たすものが存在する．さらに，A, B 両方からそれぞれ有限集合を取り除いても，やはりそれらの間の距離は 0 である．したがって，A, B からそれぞれ a_i^d, b_i^d を，与えられた条件を満たすように帰納的に選び出すことができる． □

補題 4.2. $d \in \mathrm{M}'(X)$ に対し，

$$E^d = \{f \in 2^\omega : \text{無限個の } n < \omega \text{ について } f(a_n^d) \neq f(b_n^d)\}$$

とおくと，$2^\omega \setminus E^d \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ である．

証明.

$$E^d = \bigcap_{m<\omega} \bigcup_{n>m} \{f \in 2^\omega : f(a_n^d) \neq f(b_n^d)\}$$

と表せる．この式から，E^d が 2^ω の稠密開集合の可算共通部分であることが容易にわかる．また，$\{\cdots\}$ の部分は測度 1/2 で，かつ n ごとに独立なので，$\bigcup\{\cdots\}$ の部分は測度 1 である．したがって E^d は測度 1 である． □

命題 4.3. $\mathfrak{sp}' \geq \max\{\mathsf{cov}(\mathcal{M}), \mathsf{cov}(\mathcal{N})\}$.

証明. $D \subseteq \mathrm{M}'(\omega)$ を，$\preceq$ に関して有向で，かつ $|D| = \kappa < \max\{\mathsf{cov}(\mathcal{M}), \mathsf{cov}(\mathcal{N})\}$ を満たす集合とする．補題 1.2 により，いかなる有限集合 $F \subseteq D$ に対しても $X \nparallel \omega \setminus X$ $(\sup\{u_d\omega : d \in F\})$ となる $X \subseteq \omega$ が存在することを示せばよい．ところが，D は $\preceq$ について有向だから，すべての $d \in D$ について $X \nparallel \omega \setminus X$ $(u_d\omega)$ を満たす $X \subseteq \omega$ を見つければ十分である．

補題 4.2 および $\mathsf{cov}(\mathcal{M})$, $\mathsf{cov}(\mathcal{N})$ の定義より，$\bigcap\{E^d : d \in D\} \neq \emptyset$ である．$f \in \bigcap\{E^d : d \in D\}$ とし，$X = f^{-1}(\{1\})$ とおく．このとき，どの $d \in D$ に対しても，無限個の $n < \omega$ について

1. $a_n^d \in X$ かつ $b_n^d \in \omega \setminus X$
2. $a_n^d \in \omega \setminus X$ かつ $b_n^d \in X$

のいずれかが成り立つ．すべての $d \in D$, $n < \omega$ について $d(a_n^d, b_n^d) < 2^{-n}$ であるから，これは，すべての $d \in D$ について $d(X, \omega \setminus X) = 0$ すなわち $X \not\parallel \omega \setminus X$ $(u_d\omega)$ であることを意味する． □

命題 4.3 を強制法理論的に解釈すると，次のようになる．コーエン実数，ランダム実数の定義については [2, Chapter 1] または [6] を参照されたい．

系 4.4. $\mathbf{V}$ を基底モデル，$f \in 2^\omega$ を $\mathbf{V}$ 上のコーエン実数またはランダム実数とし，$X = f^{-1}(\{1\})$ とおくと，すべての $d \in \mathrm{M}'(\omega) \cap \mathbf{V}$ について $X \not\parallel \omega \setminus X$ $(u_d\omega)$ が成り立つ．

命題 1.3 によって，$\mathfrak{d} < \mathrm{cov}(\mathcal{N})$ は ZFC 上無矛盾である．

系 4.5. $\mathfrak{d} < \mathfrak{sp}'$ は ZFC 上無矛盾である．

5 超フィルタと $\mathfrak{sp}'$

次に，$\mathfrak{sp}'$ の上限を論じる．

定義 5.1. $d \in \mathrm{M}(\omega)$ と，ω の部分集合 X に対し，X が d-Smirnov-good (または単に d-good) であるとは，任意の $Y \subseteq X$ について $Y \parallel \omega \setminus Y$ $(u_d\omega)$ であるときにいう．$Z \subseteq \omega$ が d-Smirnov-bad (または単に d-bad) であるとは，任意の d-Smirnov-good set $X \subseteq \omega$ に対して，$Z \cap X$ が有限であるときにいう．

ω の無限部分集合 X に対し，ω 上の距離 d_X を，次のように定義する．$h : \omega \to \mathbb{R}$ を，

$$h(j) = \begin{cases} -1 + 2^{-j} & (j \in X) \\ j & (j \in \omega \setminus X) \end{cases}$$

と定義し，$d_X(m, n)$ を $h(m)$ と $h(n)$ の $\mathbb{R}$ における距離とする．

明らかに，$\omega \setminus X$ は d_X-good であり，X は d_X-bad である．特に，すべての ω の無限部分集合 X について，$u_{d_X}\omega \not\simeq \beta\omega$ すなわち $d_X \in \mathrm{M}'(\omega)$ である．また，$X \subseteq Y$ であれば $d_Y \leq d_X$ であり，$X \subseteq^* Y$ であれば $d_Y \preceq d_X$ である．

補題 5.2. ω の無限集合 X, Z について，$g \in U^*_{d_X}(\omega)$ かつ $Z \subseteq X$ ならば，g の部分列 $g{\restriction}Z = \{g(n) : n \in Z\}$ はコーシー列となり，したがって収束する．

証明． 略． □

命題 5.3. $\mathfrak{sp}' \leq \mathfrak{u}$.

証明. $\mathcal{U}$ を，ω 上の超フィルタの生成集合で，濃度がちょうど $\mathfrak{u}$ のものとする．$D = \{d_X : X \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathrm{M}(\omega)$ とする．$\mathcal{F}$ を $\mathcal{U}$ で生成される超フィルタとし，$\mathcal{I}$ を $\mathcal{F}$ の双対イデアルとする．

主張 1. D は $\leq$ に関して（したがって，$\preceq$ に関しても）有向である．

証明. $\mathcal{U}$ の元 X, Y をとる．$Z = X \cap Y$ とおくと，Z は $\mathcal{F}$ の元であるから，ある $W \in \mathcal{U}$ について $W \subseteq Z$ である．$W \subseteq X$, $W \subseteq Y$ であるから，$d_X \leq d_W$ かつ $d_Y \leq d_W$ である．$d_W \in D$ であるから，これは，D が $\leq$ に関して有向であることを示す．□

主張 2. $\beta\omega \simeq \sup\{u_d\omega : d \in D\}$.

証明. 無限集合 $A \subseteq \omega$ を任意にとる．$A \parallel \omega \setminus A$ $(\sup\{u_d\omega : d \in D\})$ を示せば十分である．

$\mathcal{I}$ は極大イデアルなので，A, $\omega \setminus A$ のいずれか一方は $\mathcal{I}$ に属する．$\mathcal{I}$ は $\mathcal{F}$ の双対イデアルであり，かつ，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{U}$ によって生成されるので，ある $X \in \mathcal{U}$ について，A, $\omega \setminus A$ のいずれか一方は $\omega \setminus X$ の部分集合である．$\omega \setminus X$ は d_X-good であるから，$A \parallel \omega \setminus A$ $(u_{d_X}\omega)$ である．ところで，$d_X \in D$ であるから，$u_{d_X}\omega \leq \sup\{u_d\omega : d \in D\}$ であり，したがって，$A \parallel \omega \setminus A$ $(\sup\{u_d\omega : d \in D\})$ である．□

上の 2 つの主張により，$\mathfrak{sp}' \leq \mathfrak{u}$ が示された．□

$\mathfrak{st}$ については，次のように，p-point と関連付けることができる．非可算正則基数 κ に対し，ω 上の超フィルタ $\mathcal{F}$ が *simple* p_κ*-point* であるとは，$\mathcal{F}$ が長さ κ の $\subseteq^*$ に関する下降列からなる生成集合を持つときにいう．

命題 5.4. 非可算正則基数 κ に対し，simple p_κ-point が存在するならば，$\mathfrak{st} \leq \kappa$ である．

証明. $\mathcal{U} = \{U_\xi : \xi < \kappa\}$ を，simple p_κ-point を生成する $\subseteq^*$-下降列とする．$\xi < \kappa$ に対し，$d_\xi = d_{U_\xi}$ と定義すると，$\mathrm{M}'(\omega)$ の元の列 $\{d_\xi : \xi < \kappa\}$ は $\preceq$ に関する上昇列であり，かつ，$\sup\{u_{d_\xi}\omega : \xi < \kappa\} \simeq \beta\omega$ となる．□

系 5.5. $\mathfrak{pp} = \min\{\kappa : \text{simple } \mathrm{p}_\kappa\text{-point が存在する}\}$（存在しない場合は $\mathfrak{pp} = \infty$）と定義すると，$\mathfrak{st} \leq \mathfrak{pp}$ である．

CH（連続体仮説）のもとでは，p-point は存在し，しかもそれは simple $p_{\aleph_1}$-point である．また，CH を満たす基底モデルに対し，$\mathfrak{c} = \aleph_2$ を強制し，かつ，基底モデルの p-point を強制拡大における p-point の生成集合として保つ強制概念は存在する [2, Section 7.4].

系 5.6. $\aleph_1 = \mathfrak{sp}' = \mathfrak{st} < \mathfrak{c} = \aleph_2$ は ZFC 上無矛盾である．

また，MA（マルティンの公理）のもとでは，$\mathsf{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ であり，かつ，simple $p_{\mathfrak{c}}$-point が存在することが知られている．

系 5.7. $\aleph_1 < \mathfrak{sp}' = \mathfrak{st} = \mathfrak{c}$ は ZFC 上無矛盾である．

ところで，$\mathfrak{st} = \infty$ は ZFC 上無矛盾だろうか．すなわち，「ω の Smirnov コンパクト化の $\leq$ に関する上昇列では $\beta\omega$ に到達できない」という状況は起こりうるだろうか．

次の定理は Kunen [5] によるもので，コーエン実数を付加して得られる強制モデルに関する有名な結果である．この定理において，2^ω の部分は，$[0,1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\omega$ など，他のポーランド空間（孤立点を持たない可分な完備距離空間）に置き換えても，同様に成り立つ．

定理 5.8. CH を満たす ZFC のモデルに $\aleph_2$ 個のコーエン実数を付加して得られる強制モデルにおいて，A を $(2^\omega)^2$ のボレル集合とすると，

$$\alpha \leq \beta < \omega_2 \iff \langle f_\alpha, f_\beta \rangle \in A$$

を満たす 2^ω の元の列 $\{f_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ は存在しない．

ω 上の距離関数は $\mathbb{R}^{\omega\times\omega}$ の元である．$A \subseteq (\mathbb{R}^{\omega\times\omega})^2$ を，

$$\langle f_1, f_2 \rangle \in A \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \, \exists \delta \in \mathbb{Q}^+ \, \forall \langle m, n \rangle \in \omega \times \omega \, (f_2(m,n) \geq \delta \vee f_1(m,n) \leq \varepsilon)$$

によって定義する．このとき，A は $(\mathbb{R}^{\omega\times\omega})^2$ のボレル集合であり，さらに，ω 上の距離関数 d_1, d_2 について，ω 上の恒等写像が (ω, d_2) から (ω, d_1) への関数として一様連続であることと $\langle d_1, d_2 \rangle \in A$ は同値である．したがって，次の補題が成り立つ．

補題 5.9. CH を満たす ZFC のモデルに $\aleph_2$ 個のコーエン実数を付加して得られる強制モデルにおいて，$\mathrm{M}'(\omega)$ の中に $\preceq$ に関する長さ ω_2 の真の上昇列は存在しない．

一方，CH を満たす ZFC のモデルに $\aleph_2$ 個のコーエン実数を付加して得られる強制モデルにおいては，$\mathsf{cov}(\mathcal{M}) = \aleph_2 = \mathfrak{c}$ が成り立つので，命題 4.3 および 5.3 により，$\mathfrak{sp}' = \aleph_2$ である．したがって，次の結果を得る．

命題 5.10. $\mathfrak{st} = \infty$ は ZFC 上無矛盾である．

6 Higson コンパクト化

X 上の距離関数 d がプロパーであるとは，任意の $r > 0, x \in X$ について，$\mathrm{cl}\,\mathrm{B}_d(x,r)$ がコンパクトであるときにいう．距離空間 X について，X と同じ位相を導くプロパーな距離関数の全体を $\mathrm{PM}(X)$ で表す．局所コンパクトかつ可分な距離空間 X については $\mathrm{PM}(X) \neq \emptyset$ である ([4]).

$d \in \mathrm{PM}(X)$ とする．関数 $f \in C^*(X)$ が（距離 d に関して）slowly oscillating である（または，$(*)_d$-条件を満たす）とは，任意の $r > 0, \varepsilon > 0$ に対し，X のコンパクト部分集合 $K_{r,\varepsilon}$ が存在し，すべての $x \in X \setminus K_{r,\varepsilon}$ について $\mathrm{diam}(f''\mathrm{B}_d(x,r)) < \varepsilon$ が成り立つときにいう．距離 d に関して slowly oscillating な $C^*(X)$ の元の全体を $C^*_d(X)$ で表す．これは $C^*(X)$ の閉部分環で点と閉集合を分離する族となる．この $C^*_d(X)$ と対応するコンパクト化を $\overline{X}^d$ で表し，X の Higson コンパクト化という．

X の部分集合の族 $\{E_0, \ldots, E_{n-1}\}$ が（距離 d に関して）発散するとは，任意の $r > 0$ について，$\mathrm{B}_d(E_i, r) = \{x \in X : d(x, E_i) < r\}$ に対して，$\bigcap_{k<n} \mathrm{B}_d(E_i, r)$ が有界であるとき，または，同値な条件として，任意の $r > 0$ に対して X のコンパクト部分集合 K_r が存在し，すべての $x \in X \setminus K_r$ について $\sum_{i<n} d(x, E_i) > r$ であるときにいう．これの意味することを略記号で $\lim_{x\to\infty} \sum_{i<n} d(x, E_i) = \infty$ と記す．

X 上のプロパーな距離 d に関する Higson コンパクト化 $\overline{X}^d$ は，次の補題によって特徴づけられる．

補題 6.1. コンパクトでない局所コンパクトかつ可分なプロパー距離空間 (X, d) のコンパクト化 αX について，次は同値である．

1. $\alpha X \simeq u_d X$.
2. $f \in C^*(X)$ について，f が αX 上に連続に拡張できることと $f \in C^*_d(X)$ であることが同値である．
3. X の互いに素な閉集合 A, B について，$A \parallel B$ (αX) と，A, B が距離 d に関して発散することが同値である．

Higson コンパクト化についても，定理 2.2 と同様の結果が成り立つ．

定理 6.2. ([4]) X をコンパクトでない局所コンパクトな可分距離空間とするとき，$\beta X \simeq \sup\{\overline{X}^d : d \in \mathrm{PM}(X)\}$ である．

そこで，次の基数を考えることができる．

定義 6.3. $\mathfrak{ha}(X) = \min\{|D| : D \subseteq \mathrm{PM}(X)$ かつ $\beta X \simeq \sup\{\overline{X}^d : d \in D\}\}$.

命題 6.4. コンパクトでない局所コンパクトな可分距離空間 X に対し，$\mathfrak{sa}(X) \leq \mathfrak{ha}(X)$ である．

証明. $\mathrm{PM}(X) \subseteq \mathrm{M}(X)$ であり，かつ，任意の $d \in \mathrm{PM}(X)$ に対して $\overline{X}^d \leq u_d X$ である．したがって，$\mathfrak{ha}(X)$ の定義の条件式を満たす $D \subseteq \mathrm{PM}(X)$ は，$\mathfrak{sa}(X)$ の定義の条件式をも満たす． □

半直線 $[0,\infty)$ については，命題 2.4 と同様の結果が成り立つ．

命題 6.5. $\mathfrak{ha}([0,\infty)) = \mathfrak{d}$.

証明. 命題 2.4 および 6.4 により，$\mathfrak{ha}([0,\infty)) \geq \mathfrak{d}$ が成り立つ．したがって，$\mathfrak{ha}([0,\infty)) \leq \mathfrak{d}$ を示せば十分である．

$\mathcal{F}$, ρ_f, D, A, B, $\{c_k : k < \omega\}$ は命題 2.4 で定義したものとする．このとき，$A \parallel B$ $(\sup\{\overline{[0,\infty)}^d : d \in D\})$ を示すことが目標であるが，そのためには，ある $f \in \mathcal{F}$ について $A \parallel B$ $(\overline{[0,\infty)}^{\rho_f})$ となることを示せば十分である．$h_{A,B} \in \omega^\omega$ を

$$h_{A,B}(m) = \max\left(\left\{k \cdot \left\lceil \frac{1}{c_{2k+2} - c_{2k+1}} \right\rceil : c_{2k+2} < m+1\right\} \cup \{1\}\right)$$

により定義する．$\mathcal{F}$ は $\leq$ に関する dominating family であるから，$h_{A,B} \leq f$ となる $f \in \mathcal{F}$ が存在する．このとき，ρ_f と $h_{A,B}$ の定義によって，すべての $k < \omega$ について $\rho_f(c_{2k+1}, c_{2k+2}) \geq k$ となるので，$\lim_{x\to\infty}(\rho_f(x,A) + \rho_f(x,B)) = \infty$ である．ゆえに，$A \parallel B$ $(\overline{[0,\infty)}^{\rho_f})$ が成り立つ． □

次の定理によって，X が離散空間の場合には，$\mathfrak{ha}(X) = 1$ となる．

定理 6.6. ([4]) 以下は同値である．

1. ある $d \in \mathrm{PM}(X)$ について $\overline{X}^d \simeq \beta X$ が成り立つ．
2. ある $d \in \mathrm{PM}(X)$ について $C^*_d(X) = C^*(X)$ が成り立つ．
3. X から孤立点を除いて得られる部分空間がコンパクトである．

Higson コンパクト化についても，$\beta\omega$ の近似を考え，以下の通り基数 $\mathfrak{hp}$, $\mathfrak{hp}'$, $\mathfrak{ht}$ を定義する．

定義 6.7. $\mathrm{PM}'(X) = \{d \in \mathrm{PM}(X) : \overline{X}^d \not\simeq \beta X\}$ とする．$D \subseteq \mathrm{PM}'(\omega)$ が Higson finite intersection property (Higson-FIP) を満たすとは，任意の $F \in [D]^{<\omega}$ について $\sup\{\overline{\omega}^d : d \in F\} \not\simeq \beta\omega$ が成り立つときにいう．基数 $\mathfrak{hp}$ を次のように定義する．

$$\mathfrak{hp} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{PM}'(\omega),\ D \text{ は Higson-FIP を満たし，} \\ \text{かつ } \beta\omega \simeq \sup\{\overline{\omega}^d : d \in D\} \end{array} \right\}$$

$d_1, d_2 \in \mathrm{PM}(X)$ について，$C^*_{d_1}(X) \subseteq C^*_{d_2}(X)$ であるとき（あるいは，同値な条件として，$\overline{X}^{d_1} \le \overline{X}^{d_2}$ であるとき），$d_1 \sqsubseteq d_2$ と記す．$d_1, d_2 \in \mathrm{M}(X)$ について，$d_1 \preceq d_2$ は (X, d_2) から (X, d_1) への恒等写像が一様連続であることと同値であったが，$\sqsubseteq$ 関係については，次の補題によって特徴づけられる ([3, 7])．

補題 6.8. $d_1, d_2 \in \mathrm{PM}(X)$ について，以下は同値である．

1. $d_1 \sqsubseteq d_2$.
2. 任意の $r > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在し，すべての $x, y \in X$ について，$d_2(x, y) < r$ ならば $d_1(x, y) < \delta$ である．

定義 6.9. 基数 $\mathfrak{hp}'$, $\mathfrak{ht}$ を次のように定義する．

$$\mathfrak{hp}' = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{PM}'(\omega),\ D \text{ は } \sqsubseteq \text{ に関して有向で，} \\ \text{かつ } \beta\omega \simeq \sup\{\overline{\omega}^d : d \in D\} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{ht} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{PM}'(\omega),\ D \text{ は } \sqsubseteq \text{ で整列されていて，} \\ \text{かつ } \beta\omega \simeq \sup\{\overline{\omega}^d : d \in D\} \end{array} \right\}$$

命題 6.10. $\mathfrak{hp} \le \mathfrak{hp}' \le \mathfrak{ht}$.

補題 6.11. $d \in \mathrm{PM}'(\omega)$ に対し，次の性質を満たす実数 $r^d > 0$ および自然数の組の列 $\{(a^d_i, b^d_i) : i < \omega\}$ が存在する．

1. すべての $i, j < \omega$ について $a^d_i \neq b^d_j$.
2. $i \neq j$ ならば $a^d_i \neq a^d_j$, $b^d_i \neq b^d_j$.
3. $d(a^d_i, b^d_i) < r^d$.

証明. 略. □

命題 6.12. $\mathfrak{hp}' \ge \max\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{cov}(\mathcal{N})\}$.

証明. 命題 4.3 と同様の議論を，補題 4.1 のかわりに補題 6.11 を用いて行えばよい． □

系 6.13. $\mathbf{V}$ を基底モデル，$f \in 2^\omega$ を $\mathbf{V}$ 上のコーエン実数またはランダム実数とし，$X = f^{-1}(\{1\})$ とおくと，すべての $d \in \mathrm{PM}'(\omega) \cap \mathbf{V}$ について $X \not\parallel \omega \setminus X$ $(\overline{\omega}^d)$ が成り立つ．

補題 5.9 における考察と同様に，$B \subseteq (\mathbb{R}^{\omega\times\omega})^2$ を

$$\langle f_1, f_2\rangle \in B \iff \forall r \in \mathbb{Q}^+ \exists \delta \in \mathbb{Q}^+ \forall \langle m,n\rangle \in \omega\times\omega\,(f_2(m,n) \geq r \vee f_1(m,n) \leq \delta)$$

によって定義する．このとき，B はボレル集合であり，また，補題 6.8 により，$d_1, d_2 \in \mathrm{PM}(\omega)$ について，$d_1 \sqsubseteq d_2$ と $\langle d_1, d_2\rangle \in B$ は同値である．したがって，定理 5.8 により，次のことがわかる．

補題 6.14. CH を満たす ZFC のモデルに $\aleph_2$ 個のコーエン実数を付加して得られる強制モデルにおいて，$\mathrm{PM}'(\omega)$ の中に $\sqsubseteq$ に関する長さ ω_2 の真の上昇列は存在しない．

CH を満たす ZFC のモデルに $\aleph_2$ 個のコーエン実数を付加して得られる強制モデルにおいては，$\mathsf{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{hp}' = \aleph_2 = \mathfrak{c}$ が成り立つ．

命題 6.15. $\mathfrak{ht} = \infty$ は ZFC 上無矛盾である．

7 問題

本稿の議論で，$\mathfrak{sp}'$ と $\mathfrak{st}$ の位置づけはかなり明らかになったが，$\mathfrak{sp}$ については，非可算であるかどうかさえわかっていない．$\mathfrak{sp}$ に関して，最も期待される結果は次の通りである．

問題 7.1. $\mathfrak{sp}' = \mathfrak{sp}$?

次の問題は，きわめて強い形で $\mathfrak{sp}' = \mathfrak{sp}$ を導く命題である．

問題 7.2. $d_1, d_2 \in \mathrm{M}'(\omega)$, $d = \max\{d_1, d_2\}$ について，$u_d\omega \simeq u_{d_1}\omega \vee u_{d_2}\omega$ であるか?（または，同値な問題として，$U^*_d(\omega) = \mathrm{cl}\langle U^*_{d_1}(\omega) \cup U^*_{d_2}(\omega)\rangle$ であるか?）

$d_1, d_2 \in \mathrm{M}'(\omega)$, $d = \max\{d_1, d_2\}$ について，$u_d\omega \geq u_{d_1}\omega \vee u_{d_2}\omega$ であることは明らかであるが，$u_d\omega \leq u_{d_1}\omega \vee u_{d_2}\omega$ は明らかではない．

$\mathfrak{sp}'$ と $\mathfrak{st}$ の関係については，次の問題も残っている．

問題 7.3. $\mathfrak{sp}' < \mathfrak{st} \leq \mathfrak{c}$ は ZFC 上無矛盾であるか?

最後に，$\mathfrak{hp}$, $\mathfrak{hp}'$, $\mathfrak{ht}$ についての問題を記す.

問題 7.4. 1. $\mathfrak{hp} = \mathfrak{hp}'$?

2. $\mathfrak{hp}' \leq \mathfrak{u}$?

3. $\mathfrak{hp}' < \mathfrak{ht} \leq \mathfrak{c}$ は ZFC 上無矛盾であるか?

謝辞

本研究に関して多くの有益な助言をくださった藤田博司氏にお礼申し上げます.

参考文献

[1] M. Atsuji. Uniform continuity of continuous functions of metric spaces. *Pacific J. Math.*, Vol. 8, pp. 11–16, 1958.

[2] T. Bartoszyński and H. Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line.* A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

[3] Y. Iwamoto. manuscript.

[4] K. Kawamura and K. Tomoyasu. Approximations of Stone-Čech compactifications by Higson compactifications. *Colloquium Mathematicum*, Vol. 88, pp. 75–92, 2001.

[5] K. Kunen. *Inaccessibility properties of cardinals.* Ph.D. dissertation, Stanford, 1968.

[6] K. Kunen. Random and Cohen reals. In K. Kunen and J. E. Vaughan, editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pp. 887–911. North Holland, 1984.

[7] K. Tomoyasu. Proper metric spaces and Higson compactifications of product spaces. *Glas. Mat. Ser. III*, Vol. 34(54), pp. 65–72, 1999.

[8] R. G. Woods. The minimum uniform compactification of a metric space. *Fund. Math.*, Vol. 147, pp. 39–59, 1995.