数理解析研究所講究録 1371 巻 2004 年 140-151

離散不動点定理とその応用について

東京都立短期大学 経営情報学科　　飯村 卓也 (Takuya Iimura)
Department of Management, Tokyo Metropolitan College

概要

本稿では [4] の離散不動点定理の束論的な系を二つ示し，それらの応用として一般均衡の存在問題と非協力ゲームの均衡点の存在問題 ([2]) について論じる．応用の前者についてはその拡張についても考えてみたい．

1　はじめに

筆者は昨年 [2] において離散集合上の対応の不動点問題を考察し，一つの不動点 "定理" を提起した．この "定理" は本集会で報告され，議論されたが，その折の討論を契機とした研究交流のなかで反例がみつかり，その後 [4] の共同研究で [2] の対応の台集合に制限を加えた形の定理に修正された．修正が必要であった理由を若干付言すれば，台集合の凸性として筆者の提案した「連接凸」(contiguously convex [2]) ではいささか広く，対応の「方向保存性」(direction preservingness, 後述) が境界付近で有利に作用しないという問題があったためである．連接凸のなかでも「整凸」(integrally convex, 同) と呼ばれる凸性のクラスに台集合を限定することで，この問題が回避されたといえる．

以下，本稿で離散不動点定理といった場合，当然ながらこの修正された形の定理 (整凸集合上の離散不動点定理 [4]) を指すものとする．証明等，定理自身の詳しいことについては [4] に譲ることにして，本稿では，[2] に述べられている「束論的な」系について改めて証明を示すとともに，その一般均衡理論ならびに非協力ゲームへの応用について主に述べることにする．実際，[2] におけるこれらの応用は，対応もしくは写像の定義域が "矩形"，そしてまた像も "矩形" であるような特殊ケースに関わるものであった．それらが束論的な系によってどう処理されるのかを，困難な点，また [2] ではあまり明らかでない点なども含めて詳らかにしていきたいと思う．

本稿での説明は，基本的には本集会における筆者の報告をベースにしているが，一般均衡の存在問題については少し枠を広げて，定理を応用する際の留意点や応用の仕方の拡張の可能性など，集会以降気づく点にも触れておいた．今後の議論の発展に資するところがあれば幸いである．

2 離散不動点定理とその束論的な系

まず必要な定義をいくつか述べる．整数の n-ベクトルの全体を $\mathbb{Z}^n$, 実数の n-ベクトルの全体を $\mathbb{R}^n$ とする．有限集合 $M \subset \mathbb{Z}^n$ とその凸包 $\mathrm{co}\, M \subset \mathbb{R}^n$ が

$$M = \mathrm{co}\, M \cap \mathbb{Z}^n \tag{1}$$

を満たすとき, M は**離散凸** (discretely convex) であるという．$M \subset \mathrm{co}\, M \cap \mathbb{Z}^n$ は恒真なので式 (1) の本質は $\mathrm{co}\, M \cap \mathbb{Z}^n \subset M$ が成り立つことにある．不動点問題を考える際, この性質は対応の像に仮定して便利である．なぜならば, $X \subset \mathbb{Z}^n$ の上の対応 $\Gamma\colon X \to\!\!\!\to X$ において, ある $x \in X$ が $x \in \mathrm{co}\, \Gamma(x)$ を満たすのに $x \notin \Gamma(x)$(不動点でない) というのは, 少々扱いにくい状況だからである．z が $\mathrm{co}\, \Gamma(x)$ の整数点であれば $z \in \Gamma(x)$, すなわち $\mathrm{co}\, \Gamma(x) \cap \mathbb{Z}^n \subset \Gamma(x)$ と Γ の各像に離散凸性を仮定しておけば, そのような困難な状況は避けられる．なお, Γ が写像なら離散凸値であるのはいうまでもない．

任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対して $N(y) = \{z \in \mathbb{Z}^n\colon \|z - y\|_\infty < 1\}$ として, 有限集合 $M \subset \mathbb{Z}^n$ が

$$y \in \mathrm{co}\, M \Rightarrow y \in \mathrm{co}(M \cap N(y)) \qquad (\forall y \in \mathbb{R}^n) \tag{2}$$

を満たすとき, M は**整凸** (integrally convex [3]) であるという．y として特に $\mathrm{co}\, M$ の整数点をとれば $N(y)$ は y の 1 点集合, したがって整凸性はこの y が M の点であることを含意している．すなわち, 整凸集合は離散凸集合である．不動点問題を考える際, このことと先に述べたことから整凸な $\Gamma(x)$ を仮定するのも悪くはないが, むしろこの性質を仮定して便利なのは Γ の定義域 X の方である．詳細は [4] に譲るが, 有限な整凸集合はその凸包に対して都合のよい単体分割を許容する．このことが, X を $\mathbb{R}^n$ に埋め込んで連続の世界で既知の定理に訴える [4] の定理の証明にとって要である．

さて, 以下 $X \subset \mathbb{Z}^n$ は有限な整凸集合, $\Gamma\colon X \to\!\!\!\to X$ は非空値の対応としよう．各 $x \in X$ に対して x からユークリッドノルムの距離で最短な $\mathrm{co}\, \Gamma(x)$ の点を $\pi(x)$ とし,

$$\sigma_i(x) = \mathrm{sign}(\pi_i(x) - x_i) \in \{+1, 0, -1\}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

とする．その n-組 $\sigma(x) = (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))$ は, いわば x から見た $\Gamma(x)$ の方向である．任意の $z, z' \in \mathbb{Z}^n$ に対して $\mathbb{Z}^n$ の上の二項関係 $\simeq$ を

$$z \simeq z' \Leftrightarrow ||z - z'||_\infty \leq 1 \tag{4}$$

で定義する．$z \simeq z'$ なる z と z' は**連接** (contiguous) な点と呼ぶ.[1] 対応 $\Gamma\colon X \to\!\!\!\to X$ が**方向保存** (direction preserving) であるとは, $x \simeq x'$ なる任意の $x, x' \in X$ に対して

$$\sigma_i(x) > 0 \Rightarrow \sigma_i(x') \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

[1] 最大値ノルムで定義してるように, 例えば $\mathbb{Z}^2$ の $(0,0)$ と $(1,1)$ のような "斜めの" 点も連接としている．これは重要である．$\{(0,0),(1,1)\}$ は整凸だが写像 $(0,0) \mapsto (1,1)$, $(1,1) \mapsto (0,0)$ には不動点がない．この集合上の写像が不動点を持つには $(0,0)$ と $(1,1)$ も連接として次の方向保存性を持つことが必要十分である．

が成り立つこととする．方向保存性の定義は他にも考えられるが，ここでは3値のn-組の値をもつ関数$\sigma(x)$によって，像の方向が“急に変わらない”といった性質を“定性的に”表現することにした．なお，$\simeq$は対称的な関係なので方向保存性は$\sigma_i(x) < 0 \Rightarrow \sigma_i(x') \leq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$を含意していることに注意する．

定理 1 ([4])**.** $X \subset \mathbb{Z}^n$を非空かつ有限な整凸集合とせよ．$\Gamma\colon X \to\to X$が非空値かつ離散凸値の方向保存対応のとき，Γは不動点をもつ．

証明は[4]を参照してもらうことにして，ここではこの定理の束論的な系を二つ導くことにする．集合$X \subset \mathbb{Z}^n$は，$\inf X \leq z \leq \sup X$なる$z \in \mathbb{Z}^n$がみな$X$の元であるとき，**離散矩形** (discrete rectangle) であるということにする．

系 2 ([2])**.** $X \subset \mathbb{Z}^n$を非空な有限離散矩形とせよ．$\Gamma\colon X \to\to X$が非空値かつ離散矩形値の方向保存対応のとき，Γは不動点をもつ．

証明. 離散矩形は明らかに整凸であり，よってまた離散凸である．すなわちXは非空な有限整凸集合，Γは非空値かつ離散凸値の方向保存対応であり，定理1から従う． □

この系自身は定理より明らかと思われるが，大事なことは，Xが離散矩形で$\Gamma(x)$もまた離散矩形であるとき，$x \in X$から見た$\Gamma(x)$の方向$\sigma(x)$は，より直截的に

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} +1 & x_i < \inf \Gamma_i(x) \text{ のとき,} \\ -1 & \sup \Gamma_i(x) < x_i \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases} \tag{6}$$

と定義しても同じなこと $(i = 1, \ldots, n)$，したがって方向保存性の判定が一般の場合と比べて容易なことである．離散矩形の場合の方向保存性の判定についてはまた，次の補題によるのも便利である．対応$\Gamma\colon X \to\to X$は，$x \simeq x'$なる任意の$x, x' \in X$に対して$\Gamma(x) \cap \Gamma(x') \neq \emptyset$を満たすとき，**交叉的** (overlapping) であるという．

補題 3 ([2])**.** $X \subset \mathbb{Z}^n$が非空な離散矩形，対応$\Gamma\colon X \to\to X$が非空値かつ離散矩形値で交叉的なとき，Γは方向保存である．

証明. 交叉の条件より任意の連接な$x, x' \in X$に対して$\inf \Gamma_i(x) \leq \sup \Gamma_i(x')$または$\inf \Gamma_i(x') \leq \sup \Gamma_i(x)$がすべての$i$に成り立つ．一般性を失うことなく$i$について$\inf \Gamma_i(x) \leq \sup \Gamma_i(x')$とし，$\sigma_i(x) > 0$，すなわち$x_i < \inf \Gamma_i(x)$であるとしてみよ．$x_i < \inf \Gamma_i(x)$ならば高々1だけ異なる$x'_i$については$x'_i \leq \inf \Gamma_i(x) \leq \sup \Gamma_i(x')$なので$\sup \Gamma_i(x') \not< x'_i$，すなわち，$\sigma_i(x') \geq 0$である． □

系 4 ([2])**.** $X \subset \mathbb{Z}^n$を非空な有限離散矩形とせよ．$\Gamma\colon X \to\to X$が非空値かつ離散矩形値で交叉的なとき，Γは不動点をもつ．

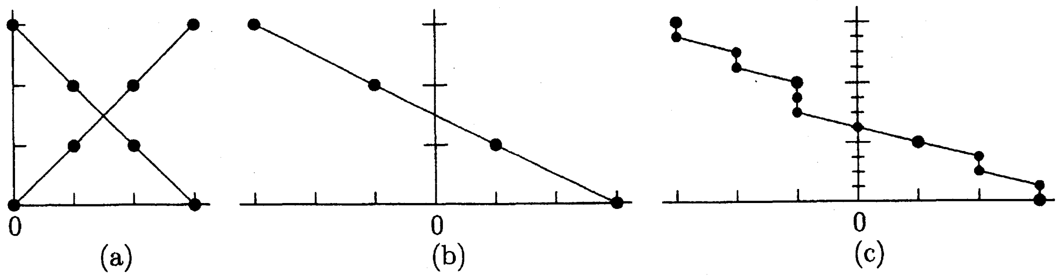
証明.　系2と補題3より従う.　□

系4について一つ注意しておくと, Γ が写像だと交叉的な写像は定値写像に他ならず, 不動点の存在は自明という点である.

3　応用

(A) 一般均衡の存在

先に式 (4) で $\mathbb{Z}^n$ の上の連接性 $\simeq$ を定義したが, この二項関係は有理数の n-ベクトルの全体 $\mathbb{Q}^n$ の離散部分集合, 例えば, ν を所与の正整数とし, n 個の座標の値がみな $1/\nu$ の非負の整数倍であるような有理数点の集合 $\mathbb{Q}_+^{n(\nu)}$ の上にも定義できる (任意の $q, q' \in \mathbb{Q}_+^{n(\nu)}$ に対して $q \simeq q' \Leftrightarrow \|q - q'\|_\infty \leq 1/\nu$). さらに, そのような連接性が定義された二つの集合 X, Y に対し, 写像 $f\colon X \to Y$ が $x \simeq x' \Rightarrow f(x) \simeq f(x')$ を満たすとき, f のこの性質を再び連接性と呼んで f を**連接写像** (contiguous mapping) と呼ぶのも自然であろう. このような用語の準備の下, まず [2] にある一般均衡の存在問題への応用の基本的な着想を述べる.



(i) 図の (a) は教科書的な需要曲線と供給曲線の離散版である. 縦軸が価格, 横軸が数量で, いずれもまず整数とする. この図に需給一致点がないのはなぜか. それは超過需要曲線 (b) を書くと明らかなように連接した価格に対して超過需要が連接でないためであろう. しかし縦軸の価格に有理数を認めてその幅を 1/2, 1/4 と細かくしていけば, 自然な場合には (c) のように, 連接した価格に対して連接した超過需要を期待できるのではないか. すなわち, 価格の幅を細かくして (c) のような連接超過需要関数が得られれば, 少なくとも部分均衡の存在は保証されるであろう. なお, 通常このような部分均衡の図で価格といえば当該財の数量1単位と交換される価値尺度財の数量に等しいので, 価格に有理数を認めるというのは価値尺度財の数量に有理数を認めることに等しいであろう. 例えば, 価値尺度財を貨幣として 1.01 ドル/個といった価格が存在するためには, 1/100 ドル刻みに貨幣数量が存在することが必要かつ十分である.

(ii) 超過需要関数の連接性は, 実は価格調整関数の方向保存性と密接に関連している. 図の (c) で価格を q, 超過需要を $z(q)$ とし, $z(q) > 0$ ならば1ステップ価格を上げ, $z(q) < 0$ な

らば1ステップ下げて, 調整後の価格を $f(q)$ とするような通常のワルラス的価格調整を考えてみよ. 容易に確かめられるようにこの価格調整関数 f は方向保存となる. そして, f の不動点は均衡価格である. この観察は q, $z(q)$, $f(q)$ を高次元にしても通じる. 一般に, 価格調整ベクトルの向きは $\mathrm{sign}\, z(q)$ ($\mathrm{sign}\, z_i(q)$ の n-ベクトル) で与えられよう. いま, その大きさを価格空間のメッシュ $1/\nu$ ((c) では $1/4$) に等しいとして, $\delta(q) = (1/\nu)\,\mathrm{sign}\, z(q)$ を価格調整ベクトルとする. そして調整後価格を $f(q) = q + \delta(q)$ とすれば, $\mathrm{sign}(f_i(q) - q_i) = \mathrm{sign}\, z_i(q)$, これは z が連接であれば f が方向保存になることを示している (もっと弱くてよい: z の符号が連接ならよい). したがって, 例えば価格 q の集合を有限な離散矩形に制限できてその上で連接な超過需要関数が得られるなら, 価格調整関数 f の不動点 q^* が存在して f の定義より $z(q^*) = \mathbf{0}$ といえそうである.

[2] の基本的な着想は上記のようなものである. もっとも, [2] のモデルは不動点の議論の簡単な応用を意図したもので, 一般均衡モデルとしては本格的なものではない. 超過需要関数から出発していることなど, その最たる点であろう. しかし, 超過需要関数から始めても, 離散の難しさにはすでにいくつか出会う. ここで少しそれらを含めた一般的な考察を述べておく. 困難な点を詳らかにすることで, 今後の本格的な展開に資すればと思う.

$\mathbb{Z}^n_+$ で非負整数点の全体を表わし, 価格の集合を $P = \mathbb{Z}^n_+ - \{\mathbf{0}\}$ としよう (ゼロベクトル $\mathbf{0}$ を除く). いま, ゼロ次同次性を満たすような超過需要関数 $z\colon P \to \mathbb{Z}^n$, もしくは $z\colon P \to \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Q}$ があるとする.[2] P で定義された z がゼロ次同次とは, 任意の $p \in P$ と $tp \in P$ $(t > 0)$ に対して $z(tp) = z(p)$ が成り立つことである. われわれの目標は, $z(p^*) = \mathbf{0}$ を満たすような p^* (均衡価格), あるいは, $z(p^*) \leq \mathbf{0}$ を満たし $p^* \cdot z(p^*) = 0$ を満たすような p^* (自由処分均衡価格) を探すことである. 後者の場合には $z_i(p^*) < 0$ ならば $p^*_i = 0$ であることを要する.

まず, z は非負有理数点 ($\mathbf{0}$ を除く) の集合 $Q = \mathbb{Q}^n_+ - \{\mathbf{0}\}$ にも定義できることに注意する. 各 $q \in Q$ に対し $tq \in P$ となる $t > 0$ は無数にあるが, ゼロ次同次性によって $z(q) = z(tq)$ とできるからである. もちろん Q の上でも z はゼロ次同次である. このように z の定義域を拡張して, ゼロ次同次性による次の二つの価格の規準化について以下考えてみる. 一つは, 財 n の価格が $p_n = \nu$ なる $p \in P$ への規準化である. これは Q の離散部分集合 $Q^{n-1(\nu)} \times \{1\} = \mathbb{Q}^{n-1(\nu)}_+ \times \{1\}$ で z を考えることに等しい. もう一つは, 財ベクトル $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ の価値を ν にするような $p \in P$ への規準化である ($p \cdot \mathbf{1} = \nu$). これは Q の離散部分集合 $\Delta^{n-1(\nu)} = \{q \in \mathbb{Q}^{n(\nu)}_+ \colon \sum_{i=1}^n q_i = 1\}$ で z を考えることに等しい. $Q^{n-1(\nu)}$ も $\Delta^{n-1(\nu)}$ も連接性 $\simeq$ を備えた $n-1$ 次元的離散集合であり, ν を大きくとればメッシュをいくらでも小さくできる. 整凸集合の定義式 (2) にあらわれる $N(y)$ を, $y \in \mathbb{R}^n$ から最大値ノルムの距離で $1/\nu$ 未満にある $\mathbb{Q}^{n(\nu)}$ の点 ($N(y) = \{q \in \mathbb{Q}^{n(\nu)} \colon \|q - y\|_\infty < 1/\nu\}$) と読み替えれば, $Q^{n-1(\nu)}$ の有限な離散矩形 R は有限な整凸集合, $\Delta^{n-1(\nu)}$ はそれ自身有限な整凸集合といえることにも注意しておく.[3]

---

[2]超過需要対応への一般化には最後の節で触れる.

[3]実際 $\Delta^{n-1(\nu)}$ は M 凸集合と呼ばれる集合になり, M 凸集合 $\Rightarrow$ M$^\natural$ 凸集合 $\Rightarrow$ 整凸集合という関係があ

さて, まず $Q^{n-1(\nu)}$ による方法であるが, $Q^{n-1(\nu)}$ は, 非価値尺度財の非負の価格ベクトル $\tilde{q}$ の集合で, $\tilde{q}$ の各成分は0から $1/\nu$ 刻みに選べる. [2] や本節の冒頭に基本的着想といって述べたことはこの方法によっている. その (i) でも簡単に述べたが, $Q^{n-1(\nu)}$ のような価格体系を機能させるにはしかし, 財 n の数量が $1/\nu$ 単位, つまり有理数単位であることを要する. すなわち, $\nu = 1$ でよいというのでない限り, $z\colon P \to \mathbb{Z}^n$ では一般には駄目なのである. これを欠点と見る向きもあるかもしれないが, 反面, z_n の値域に $Q^{1(\nu)}$ を含め, 主体の側に財 n への非飽和性を仮定すれば, ワルラス法則 $q \cdot z(q) = 0$ $(\forall q = (\tilde{q}, 1))$ を成り立たせられるという利点もある. これは重要である. もしこの種の方法の下でワルラス法則がいえないと, 仮にすべての非価値尺度財 $i < n$ について首尾よく $z_i(q^*) = 0$ または $z_i(q^*) \leq 0$ となる $q^* \in Q$ $(q_n^* = 1)$ があっても, n について $z_n(q^*) = 0$ がいえないからである. 価値尺度財の価格は正なので, この場合 $z_n(q^*) < 0$ であっては困る.

次に $\Delta^{n-1(\nu)}$ による方法であるが, この方法はすべての財を平等に扱うので特定の財に可分性を強制することもない. $z\colon P \to \mathbb{Z}^n$ の形の超過需要関数にこだわってみる. この場合, 問題となるのはワルラス法則であろう. $q \in \Delta^{n-1(\nu)}$ として, $q \cdot z(q) = 0$ を $z(q)$ が常に整数の範囲で満たすことは期待できないからである. 一般には $q \cdot z(q) \leq 0$ $(\forall q \in \Delta^{n-1(\nu)})$ の形の弱ワルラス法則しか望めない. もちろん $p \in P$ に戻っても同様である. この点がなぜ困難かを見るために, 仮にワルラス法則が $\Delta^{n-1(\nu)}$ の上で成立するとしてみよう. すると次のような議論が期待できる. まず, $\Delta^{n-1(\nu)}$ の上の z に境界条件 "$q_i = 1/\nu \Rightarrow z_i(q) \geq 0$ $(\forall i)$" を仮定する. そして $\Delta^{n-1(\nu)}$ からいずれかの座標がゼロであるような点 ($\Delta^{n-1(\nu)}$ の縁の点) を除いた集合を C とする. C の各点 q で十分小さな $t(q) > 0$ をとって $\delta_i(q) = t(q) q_i z_i(q)$, $f(q) = q + \delta(q)$ とすれば, C からその凸包 $\mathrm{co}\, C$ への写像 f が定義できる. ここで $z(q)$ またはその符号が連接であればこれまでの議論と同様に f は方向保存となる. そのような場合, [4] の定理の証明と同様にして, f の不動点 $q^* \in C$ の存在が示せる. そして定義より $z(q^*) = \mathbf{0}$ といえる. さて, 弱ワルラスの下で同じ議論が可能かと考えると, $q \cdot z(q) \leq 0$ は上の $\delta(q)$ の成分和がゼロになることを保証せず, したがって上の $f(q)$ を $\mathrm{co}\, C$ の外 (下側) に放り出してしまう可能性がある. すなわち, f は C から $\mathrm{co}\, C$ への写像とならない. では f の値を $\mathrm{co}\, C$ に射影してやればよいかというと, その場合, 方向保存性が射影には無条件には遺伝しない. 要するに, 弱ワルラスでは, 上の $\delta(q)$ のような自然だが単純な価格調整ベクトルの定義ではそれが n 次元的となり, $n-1$ 次元の C や $\Delta^{n-1(\nu)}$ の上の議論に馴染みにくいのである. なおこの点についての逃げ道は本稿の最後で考察する.

一般論の最後に境界条件について少し述べておく. "財は望ましい" という仮定をあらわす境界条件には, 上記のもの以外に "$q_i = 0 \Rightarrow z_i(q) > 0$ $(\forall i)$", "$q_i = 0 \Rightarrow z_i(q) \geq 0$ $(\forall i)$" などが考えられよう. これらは均衡価格 (もしあれば) を正または非負に制約し, いずれも自由処分均衡を排除する. すなわち, $z(q^*) = \mathbf{0}$ の形に均衡を限定する. 一般に $\Delta^{n-1(\nu)}$ の上, あるいはまた $Q^{n-1(\nu)}$ の上の議論でも, 境界条件は上の $\delta(q)$ のような価格調整ベクトルが "内側を向き", 調整後価格の非負性を保証するものとして貴重である (弱ワルラス下の $\Delta^{n-1(\nu)}$

る. 詳しくは [3] を参照されたい.

上の議論にはそれでも困難があることは既に述べた). しかし調整後価格の非負性を保証する仕組みとしては, $Q^{n-1(\nu)}$ で議論するような場合, 価格調整関数 $f\colon Q^{n-1(\nu)} \to Q^{n-1(\nu)}$ を各 $i<n$ に

$$f_i(q_1,\ldots,q_{n-1}) = \begin{cases} q_i - 1/\nu & z_i(q_1,\ldots,q_{n-1},1) < 0 \text{ かつ } q_i > 0 \text{ のとき,} \\ q_i + 1/\nu & z_i(q_1,\ldots,q_{n-1},1) > 0 \text{ のとき,} \\ q_i & \text{それ以外のとき} \end{cases} \tag{7}$$

と定義して非負性を保つこともできる. この場合 f に不動点があれば $i<n$ につき定義より $z_i(q^*) \leq 0$, そして $z_i(q^*) < 0$ ならば $q_i^* = 0$, ただし $q_n^* = 1$ と, $z_n(q^*) = 0$ を除いて自由処分均衡の条件がすべて揃う. z が連接なら f が方向保存になることもいえる. 形式だけをみれば $z(q^*) = \mathbf{0}$ よりも $z(q^*) \leq \mathbf{0}$ の方が広いので, 境界条件をつけて厳格な均衡を探すよりも, あえてつけずに自由処分均衡を探すほうが, [2] のような簡便論法にとっては気が楽という向きがある.

[2] の命題を仮定とともに示しておく. まず, 超過需要関数 $z\colon \mathbb{Z}_+^{n-1} \times \mathbb{Z}_{++} \to \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Q}$ は

仮定 1 ゼロ次同次, すなわち $z(tp) = z(p)$ $(\forall p, tp \in \mathbb{Z}_+^{n-1} \times \mathbb{Z}_{++},\ t>0)$,

仮定 2 ワルラス法則を満たす, すなわち $p \cdot z(p) = 0$ $(\forall p \in \mathbb{Z}_+^{n-1} \times \mathbb{Z}_{++})$,

仮定 3 有界,

とする. 財 n を可分としてワルラス法則を仮定 2 に入れた. 既述のように仮定 1 によって $\tilde{z}\colon \mathbb{Q}_+^{n-1} \to \mathbb{Z}^{n-1}$ が

$$\tilde{z}_i(q_1,\ldots,q_{n-1}) = z_i(p_1,\ldots,p_{n-1},p_n),\ q_i = p_i/p_n,\ i<n \tag{8}$$

で定義できる. この $\tilde{z}$ に対して

仮定 4 粗代替性, ここでは (a) 任意の $\tilde{q} \in \mathbb{Q}_+^{n-1}$ と $i \neq j$ に対し $\tilde{q}_j < \tilde{q}'_j \Rightarrow \tilde{z}_i(\tilde{q}) \leq \tilde{z}_i(\tilde{q}\backslash\tilde{q}'_j)$ と,[4] (b) 任意の $\tilde{q} \in \mathbb{Q}_+^{n-1} - \{\mathbf{0}\}$ に対しある $t \geq 1$ があって $\tilde{z}(t\tilde{q}) \leq \mathbf{0}$, そして

仮定 5 連続性, すなわち各 $\tilde{q} \in \mathbb{Q}_+^{n-1}$ において任意の整数 $\varepsilon > 0$ に対して有理数 $\delta > 0$ がとれて $\|\tilde{q}' - \tilde{q}\|_\infty \leq \delta \Rightarrow \|\tilde{z}(\tilde{q}') - \tilde{z}(\tilde{q})\|_\infty \leq \varepsilon$ とできること

を仮定する. そうすると仮定 1, 3, 5 より ν を十分大きくすることで $\tilde{z}$ は $Q^{n-1(\nu)}$ 上の連接関数となり ([2] Lemma 3.1), また $\tilde{z}$ の連接性は既述の仕組みで式 (7) の形の価格調整関数を方向保存にする (同 Lemma 3.2). そして仮定 4 が $Q^{n-1(\nu)}$ の部分集合として有限な離散矩形 R をとり, 価格調整関数 f を中への写像 $f(R) \subset R$ に制限することを可能にする (同 Lemma 3.3).[5] このような概略で次の命題を得る.

---

[4] 記号 $\tilde{q}\backslash\tilde{q}'_j$ は $\tilde{q}$ の該当成分を $\tilde{q}'_j$ で置き換えたものを表わす.

[5] 同所では本稿の R を「連接凸」と述べているが, 実際には有限離散矩形である: 仮定 4(b) より $t \geq 1$ があって $\tilde{z}(t/\nu,\ldots,t/\nu) \leq \mathbf{0}$, この価格を $\hat{q}$ とする. 仮定 4(a) より $q \in Q^{n-1(\nu)}$ なる任意の $q \leq \hat{q}$ に対し $\tilde{z}_i(q\backslash\hat{q}_i) \leq \tilde{z}_i(\hat{q}) \leq 0$, よって $R = [\mathbf{0},\hat{q}]$(有限離散矩形) として $f(R) \subset R$ とできる.

命題 5. 仮定1から5の下でワルラス均衡 (自由処分均衡) が存在する.

証明. 系2により f の不動点 $\tilde{q}^*$ が R のなかにある. 仮定2から $z_n(\tilde{q}^*,1)=0$ も従う. $p^*=(\nu\tilde{q}^*,\nu)$ ($\nu=p_n^*$ は十分大きな値) が所望の自由処分均衡価格である. □

詳しくは [2] を参照されたい. なお, z_n の値域を $\mathbb{Q}$ としているが, 先にも述べたように $p_n=\nu$ なる $p\in P$ ($\tilde{q}\in Q^{n-1(\nu)}$) のとき, ワルラス法則を満たすような $z_n(p)$ は離散集合 $Q^{1(\nu)}$ の元である ($z_n(p)$ は $1/\nu$ の整数倍である). 逆にまた, z_n の値域を離散集合 $Q^{1(\nu)}$ にしても, $p_n=\nu$ なる $p\in P$ ($\tilde{q}\in Q^{n-1(\nu)}$) を価格の集合とすれば主体の側に財 n への非飽和性を仮定してワルラス法則を成り立たせられる. よって, $\tilde{z}$ が $Q^{n-1(\nu)}$ の上で連接になるぐらいに大きな $p_n=\nu$ と小さな $z_n(p)$ の数量単位 $1/\nu$ が予め備わった経済を想定してよいのなら, 事実上 $z\colon \mathbb{Z}_+^{n-1}\times\{\nu\}\to\mathbb{Z}^{n-1}\times Q^{1(\nu)}$ が扱われているわけであり, その意味でこれはすべての財の価格ならびに数量が離散のケースを扱っているものとみなせよう.

(B) 非協力ゲーム

まずいくつかの定義を述べる. $N=\{1,\dots,n\}$ をプレイヤーの集合, $S^h\subset\mathbb{Z}^{m_h}$ を h の戦略集合, $P^h\colon\prod_{h=1}^n S^h\to\mathbb{Z}$ を h の利得関数と呼んで, $(N,\{S^h\}_{h\in N},\{P^h\}_{h\in N})$ の三つ組を n 人離散非協力ゲームと呼ぶことにする. $S=\prod_{h=1}^n S^h$ を戦略の組の集合と呼ぶ. なお, 各 S^h の次元は m_h(有限) で, S の次元は $m=\sum_{h=1}^n m_h$ とする. $\varphi^h(x)=\{x^{h\prime}\in S^h\colon P^h(x\backslash x^{h\prime})\geq P^h(x\backslash x^{h\prime\prime})\ \forall x^{h\prime\prime}\in S^h\}$ によって定義する $\varphi^h\colon S\to\!\!\!\to S^h$ を h の最適対応と呼ぶ. $\varphi=(\varphi^1,\dots,\varphi^n)\colon S\to\!\!\!\to S$ として $x^*\in\varphi(x^*)$ なる $x^*\in S$ を n 人離散非協力ゲームの均衡点と呼ぶ.

一般に, n 個の有限次元の集合 $M^h(h=1,\dots,n)$ があるとき, 各 M^h に連接性を定義するのと同じやり方で, 直積 $M=\prod_{h=1}^n M^h$ にも連接性が定義できる. 離散凸性, 整凸性, 離散矩形性といった凸性は, 各 M^h が同じ凸性を持つとき, 直積 M に同じ凸性として遺伝する. これまで M から M への対応についてのみ方向保存性を考えてきたが, ここで M からその成分 M^h への対応 $\Gamma^h\colon M\to\!\!\!\to M^h$ の方向保存性を次のように定義してみよう. $x^h\in M^h$, $x=(x^1,\dots,x^h)\in M$ とせよ. $\Gamma^h(x)\subset M^h$ であることを利用して, x に含まれる $x^h\in M^h$ からユークリッドノルムの距離で最短な $\mathrm{co}\,\Gamma^h(x)$ の点を $\pi^h(x)$ とし, $\sigma_i^h(x)=\mathrm{sign}(\pi_i^h(x)-x_i^h)$ とする. いま $x\simeq x'$ なる任意の $x,x'\in M$ に対して

$$\sigma_i^h(x)>0\Rightarrow\sigma_i^h(x')\geq 0\qquad (i=1,\dots,m_h)\tag{9}$$

が成り立つとき, Γ^h を方向保存であるとする. すると, $h=1,\dots,n$ のすべてについて Γ^h がこの意味で方向保存のとき, $\Gamma=(\Gamma^1,\dots,\Gamma^n)\colon M\to\!\!\!\to M$ は元の意味での方向保存対応になることを示せる ([2] Lemma 3.5).

[2] ではまず, これらのことを最適対応に当てはめて次のような観察を行っている (連接凸といっているところを整凸に改めて述べておく). すべてのプレイヤー h の戦略集合 S^h が非

空の有限整凸集合で, 最適対応 φ^h が非空値かつ離散凸値の方向保存対応ならば, n 人離散非協力ゲームには均衡点がある. なぜならば, 既述のように S は有限整凸集合, $\varphi\colon S \to\!\!\to S$ は離散凸値の方向保存対応になるので, 定理 1 から φ の不動点 x^* が存在するといえ, 均衡点となるから.

この "命題" はしかし, 利得関数 P^h がどのような性質を持つときに非空値かつ離散凸値の方向保存最適対応が得られるのか明らかにしていない. さらにいうと, 実は次のような問題がある. 先に直積 M からその成分 M^h への対応の方向保存性を定義したが, 最適対応に対しては, 実はその定義だけでは弱いのである. なぜかというと, 上述の最適対応 $\varphi^h\colon S \to\!\!\to S^h$ の場合, $x^h \in S^h$, $x = (x^{-h}, x^h)$, ただし x^{-h} は h 以外のプレイヤーの戦略の組とすると, $\varphi^h(x)$ は x^{-h} だけに依存し, x^h から独立である. すると, たとえば連接な x^{-h} と $x^{-h\prime}$ のそれぞれに 1 点集合の最適対応が $y^h \simeq y^{h\prime}$, ただし $y^h \neq y^{h\prime}$, と定まるような場合, $x = (x^{-h}, y^{h\prime})$ と $x' = (x^{-h\prime}, y^h)$ をとればそれらは連接なのに, それぞれ y^h と $y^{h\prime}$ を最適対応点に選ぶので $y^{h\prime}$ から見た y^h の方向と y^h から見た $y^{h\prime}$ の方向は逆, すなわち方向保存性を満たさないようにできてしまうのである.

こういった問題について [2] は述べていないが, [2] では S^h が有限な離散矩形, かつ任意の $x \in S$ に対して P^h の S^h 上の最大化元の集合 $\{x^{h\prime} \in S^h\colon P^h(x \backslash x^{h\prime}) \geq P^h(x \backslash x^{h\prime\prime})\ \forall x^{h\prime\prime} \in S^h\}$[6] も離散矩形であるような "離散矩形ゲーム" に制限して, 上記の観察が有意味になる事例を命題として述べている. 要点は, 方向保存よりも強い交叉の条件を入れて, 系 4 に訴えることにある.

命題 6 ([2]). 次の条件がすべての h について満たされるとき, n 人離散非協力ゲームには均衡点が存在する.

(i) S^h は有限離散矩形,

(ii) P^h の S^h 上の最大化元の集合は離散矩形,

(iii) $x^{-h} \simeq x^{-h\prime}$ とせよ. すると $P^h(x^{-h}, x^h) > P^h(x^{-h}, x^{h\prime})$ ならばある $x^{h\prime\prime}$ があって, $P^h(x^{-h}, x^{h\prime\prime}) \geq P^h(x^{-h}, x^h)$ かつ $P^h(x^{-h\prime}, x^{h\prime\prime}) \geq P^h(x^{-h\prime}, x^{h\prime})$ とできる.

条件 (iii) について若干説明を加えておく. $x^{-h} \simeq x^{-h\prime}$ は明確だが, x^h と $x^{h\prime}$ について特に断りがない. 実は x^h はダミーで前提 $P^h(x^{-h}, x^h) > P^h(x^{-h}, x^{h\prime})$ は $x^{h\prime}$ が x^{-h} に対し非最適といっている. そのようなときに $P^h(x^{-h}, x^{h\prime\prime}) \geq P^h(x^{-h}, x^h)$ となる $x^{h\prime\prime}$ がとれるのは明らかであろう. $x^{h\prime\prime}$ として x^{-h} に対する最適点を選べばよい. よってこの条件の本質は, 各 $x^{-h\prime} \simeq x^{-h}$ に対し $P^h(x^{-h\prime}, x^{h\prime\prime}) < P^h(x^{-h\prime}, x^{h\prime})$ とならないような x^{-h} 下の最適点 $x^{h\prime\prime}$ がとれるということ, すなわち, 特に $x^{h\prime}$ が $x^{-h\prime}$ 下の最適点のとき, $x^{-h\prime}$ の下でも最適であり続けるような x^{-h} 下の最適点 $x^{h\prime\prime}$ が存在するということである.

証明. 条件 (i) より戦略の組の集合 S は有限な離散矩形である. 条件 (ii) より h の最適対応 φ^h は離散矩形値であり, その n-組 φ も離散矩形値である. よって $x \simeq x'$ なる任意の

[6] [2] では上方等位集合としているが, より直截的には最大化元の集合が離散矩形であればよい.

$x, x' \in S$ について $\varphi^h(x) \cap \varphi^h(x') \neq \emptyset$ を示せば, 系 4 より $x^* \in \varphi(x^*)$ なる x^* の存在がいえる. $x \simeq x'$, $y^h \in \varphi^h(x)$, $y^{h'} \in \varphi^h(x')$ とせよ. $P^h(x^{-h}, y^h) \leq P^h(x^{-h}, y^{h'})$ ならば直ちに $y^{h'} \in \varphi^h(x)$ なので $\varphi(x) \cap \varphi(x') \neq \emptyset$ といえる. $P^h(x^{-h}, y^h) > P^h(x^{-h}, y^{h'})$ とせよ. すると条件 (iii) より $y^{h''} \in \varphi^h(x)$ で $P^h(x^{-h'}, y^{h''}) \geq P^h(x^{-h'}, y^{h'})$ となるものが存在し, $y^{h''} \in \varphi^h(x')$ となる. よってこの場合も $\varphi^h(x) \cap \varphi^h(x') \neq \emptyset$ である. □

この命題は利得関数を使って条件を記述しているものの, 要するに, 交叉的な離散矩形値の最適対応を形式的に引き出しているにすぎない. もっとも, 交叉の条件を満たす特殊な事例として, 支配戦略 (dominant strategy) が存在する事例をあげることができ, その下での均衡点の存在はよく知られている. その意味では, この命題は支配戦略均衡の一般化ともみなせよう.[7]

非協力ゲームの文脈で離散不動点定理とその系を応用しようとする場合, パラメータの僅かな変化に対して最適対応がどのように変化するかということの研究が, いまのところ一番欠けているように思われる. 一般均衡の文脈でも, 同じことが需要対応の変化の問題としていえよう. 連続の世界では Berge の最大値定理が強力な武器としてあるが, 離散の世界にもその類似物を探せれば, いくらか事態は改善されるのではと思われる.

4 結びにかえて

最後に応用 (A) に関連していくつか述べておく. 有限個のすべての財が不可分の, 有限人の主体からなる交換経済を考える.

まず主体のレベルで既知と思われることを一つ指摘しておくが, 各主体 h が弱ワルラス法則と顕示選好の弱公理を満たす個別超過需要対応 $\zeta^h\colon P \to \mathbb{Z}^n$ を有しているとき, これはゼロ次同次となる.[8] 同性質は加法的なので, 市場超過需要対応 $\zeta = \sum_h \zeta^h$ もまたゼロ次同次となる. したがって, 先の $\Delta^{n-1(\nu)}$ を用意できて, ζ をその上に制限して議論可能である. ζ が弱ワルラス法則を受け継ぐことは明らかであろう.

さて写像でなく対応の ζ を考えたとき, ζ^h から受け継ぐなどして ζ に望む性質には他に何があるか. 対応の連接性は未だ定義していないが,[9] 何らかの意味で q の僅かな変化には $\zeta(q)$ の僅かな変化がともなうという連続性に似た性質を望みたい. しかしすでに写像の段階で連接性はその和に遺伝しないことが容易にわかる. その意味で連続写像のアナロジーとして連接写像をとらえることにも限界があるといえる. 一ついえるのは, 交叉性は遺伝するという点である. すなわち, すべての ζ^h が交叉的ならば, ζ も交叉的といえる.

---

[7] この点は [2] のレフェリーによって指摘された.

[8] ζ^h の弱ワルラス法則は $p \cdot z \leq 0$ $(\forall z \in \zeta^h(p))$ とする. ζ^h の弱公理を $p \cdot z' \leq 0 \wedge p' \cdot z \leq 0 \Rightarrow z \in \zeta^h(p')$ $(\forall z \in \zeta^h(p), z' \in \zeta^h(p'), p, p' \in P)$ と定義して $p' = tp$ とすると, 弱ワルラスから $p' \cdot z' \leq 0$, よって $p \cdot z' \leq 0$ $(\forall z' \in \zeta^h(p'))$, 同じく $p \cdot z \leq 0$ より $p' \cdot z \leq 0$ $(\forall z \in \zeta^h(p))$. 弱公理はそこで $z \in \zeta^h(p')$ $(\forall z \in \zeta^h(p))$ を導く; $\zeta^h(p) \subset \zeta^h(p')$. 定義のプライムを入れ替えて $\zeta^h(p') \subset \zeta^h(p)$ もいえるので $\zeta^h(tp) = \zeta^h(p)$ (ゼロ次同次).

[9] [2] ではグラフの連接性によってそれを定義しているが, この定義は再考すべきもののように思われる.

ζ の離散凸値性もまた望まれる性質に思われる．先に不動点問題を考える際の対応の離散凸値性の意義について述べたが，やはり同じように，$\mathrm{co}\,\zeta(q)$ が均衡を含むにもかかわらず $\zeta(q)$ が含まないというのは困った状況に思える．しかし残念ながら $\zeta^h(q)$ が離散凸でも $\zeta(q)$ が離散凸とは限らない．$\zeta^h(q)$ を整凸に強めても同様である．いまのところ和の離散凸性を保証するのは [3] の $\mathrm{M}^\natural$ 凸性が最も広いクラスのようである．もっとも，$\mathrm{M}^\natural$ 凸性はそれ自身のクラスのなかで和が閉じているのだが，ここではそこまでは必要とせず，離散凸性の範囲で閉じていれば十分にも思われる．

しかし，ζ の離散凸値性は実は不要なのかもしれない．なぜならば不動点の議論で均衡の存在を考えるとき，舞台は P や $\Delta^{n-1(\nu)}$ などの価格の空間であって財の空間ではない．もちろん裏では財空間のゼロもしくは非正の元を探す問題なのだが，本稿の議論でおそらく一番重要と思われる価格調整関数の方向保存性を，うまく財空間の状況に対応させつつ確保してやれるならば，$\zeta(q)$ の形は不問にできる可能性もある．たとえば，各 $\zeta(q)$ から $z(q) \in \zeta(q)$ を一つずつ選出して $z(q)$ の符号関数 $\sigma(q)$ を連接にできて，これをうまく価格調整の方向 $\delta(q)$ にするような $\Delta^{n-1(\nu)}$ からそれ自身（もしくはその凸包）への価格調整関数 f を定義できるなら，f の不動点 q^* の存在がいえてかつ $z(q^*) = \mathbf{0}$ となろう．[10] この筋では僅かな q の変化には僅かな $\zeta(q)$ の変化がともなうという性質が重要であろう．交叉性ではまだ弱い．

上記の観察を一種の market equilibrium lemma としてまとめておく．主体レベルからこの補題の状況，特に条件 (iii)（ベクトルの不等式 $a \lneq b$ はすべての i について $a_i \leq b_i$ だが $a = b$ ではないの意）に到達できるかどうかは，未知である．

補題 7. $q, q' \in \Delta^{n-1(\nu)}$ とする．超過需要対応 $\zeta\colon \Delta^{n-1(\nu)} \to\!\!\to \mathbb{Z}^n$ が，(i) 弱ワルラス法則 $q \cdot z \leq 0$ $(\forall z \in \zeta(q))$，(ii) 境界条件 $q_i = 0 \Rightarrow z_i > 0$ $(\forall i, z \in \zeta(q))$ を満たし，(iii) 各 q において $z(q) \lneq \mathbf{0}$ ではない $z(q) \in \zeta(q)$ で，かつ $\sigma_i(q) = \mathrm{sign}\, z_i(q)$ として $q \simeq q'$ のとき $\sigma_i(q) > 0 \Rightarrow \sigma_i(q') \geq 0$ となるような選出 $z\colon \Delta^{n-1(\nu)} \to \mathbb{Z}^n$ を許すとき，$z(q^*) = \mathbf{0}$ となる均衡価格 $q^* \in \Delta^{n-1(\nu)}$ が存在する．

証明. 条件 (iii) で $z(q) \lneq \mathbf{0}$ ではない $z(q)$ とは，$z(q) = \mathbf{0}$ か，さもなくばある i について $z_i(q) > 0$ となる $z(q)$ のことである．条件 (i) は逆に任意の q に対しどの $z \in \zeta(q)$ も $z \gneq \mathbf{0}$ ではないこと，すなわち $z = \mathbf{0}$ か，さもなくばある j について $z_j < 0$ となることを含意する．$\mathbf{0} \in \zeta(q)$ なる q があれば証明は終わる．そこでそのような q がないと仮定して矛盾を導く．選出の条件からどの q にも $\sigma_i(q) > 0$ なる i と $\sigma_j(q) < 0$ なる j があって $\sigma(q) \neq \mathbf{0}$，しかも σ は連接である．そのような i の個数を n^+，j の個数を n^- として，$k = 1, \ldots, n$ に対し

$$\delta_k(q) = \begin{cases} +1/(\nu n^+) & \sigma_k(q) > 0 \text{ のとき,} \\ -1/(\nu n^-) & \sigma_k(q) < 0 \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \tag{10}$$

[10] 対応の像の方向の定義にユークリッドノルムの距離での最短点 $\pi(x) \in \mathrm{co}\,\Gamma(x)$ を用いることも，実際それが一意な $\mathrm{co}\,\Gamma(x)$ の点を与えるからという理由以外には特に積極的な理由はない．[2] の最後にも同様の趣旨のことが述べてあるが，$\Gamma(x)$ に方向保存の選出があればよいのである．なお [1] は [2] の方向保存の定義をそのような選出を使った形に一般化している．

とすれば, $|\delta_k(q)| \leq 1/\nu$, $\sum_k \delta_k(q) = 0$, そして条件 (ii) より $f\colon \Delta^{n-1(\nu)} \to \mathrm{co}\,\Delta^{n-1(\nu)}$ を $f(q) = q + \delta(q)$ で定義できる. $\Delta^{n-1(\nu)}$ は整凸で f は方向保存なので [4] の定理の証明と同様にして f の不動点 $q \in \Delta^{n-1(\nu)}$ の存在を示せるが, $f(q) = q$ は $\sigma(q) = \mathbf{0}$ を含意し矛盾である. □

上の補題は $q \cdot z(q) = 0$ を要求していないことに注意しておく.

謝辞

本集会, 短期共同「ゲーム理論, 数理経済学への離散凸解析の応用」で報告を聞いて頂いたすべての方にお礼申し上げます. 特に, 報告の機会を与えてくださった和光純氏, そして [4] の共同研究を通じて様々な面でお世話を頂いた室田一雄氏と田村明久氏に感謝いたします.

参考文献

[1] Danilov, V. I. and Koshevoy, G. A., 2004, Existence theorem of zero point in a discrete case, preprint.

[2] Iimura, T., 2003, A discrete fixed point theorem and its applications, Journal of Mathematical Economics 39, 725–742.

[3] Murota, K., 2003, Discrete Convex Analysis (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia).

[4] 飯村卓也, 室田一雄, 田村明久, 2004, 整凸集合上の離散不動点定理について, 本講究録.