数理解析研究所講究録 1372 巻 2004 年 163-168

2階半線形楕円型方程式系の非負値全域解の非存在について

寺本 智光 ・ 尾道大学経済情報学部

(Tomomitsu Teramoto, Onomichi University)

1. 序・主結果

次の2階半線形楕円型方程式系の非自明な非負値全域解の非存在について考える.

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} \Delta u_1 = P_1(x)u_2^{\alpha_1}, \\ \Delta u_2 = P_2(x)u_3^{\alpha_2}, \\ \quad\vdots \\ \Delta u_m = P_m(x)u_{m+1}^{\alpha_m}, \quad u_{m+1}=u_1, \end{cases} \qquad x\in \mathbf{R}^N,
$$

ここで $N\geq 3,\ m\geq 2,\ \alpha_i>0,\ i=1,2,\cdots,m,$ は定数で $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m>1$ を満たすとする. $P_i(x)\geq 0$ は $\mathbf{R}^N$ で連続とする.

$(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ が (1.1) の全域解とは $u_i\in C^2(\mathbf{R}^N),\ i=1,2,\cdots,m,$ で $\mathbf{R}^N$ で (1.1) を満たすときをいう. $(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ が非負値とは、$u_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m,$ のときをいう.

記号の導入: $\lambda_i\in\mathbf{R},\ i=1,2,\cdots,m,$ に対して Λ_i を次のように定義する:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_i =&\lambda_i-2+(\lambda_{i+1}-2)\alpha_i+(\lambda_{i+2}-2)\alpha_i\alpha_{i+1}+\cdots \\
&+(\lambda_{i+m-2}-2)\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{i+m-3}+(\lambda_{i+m-1}-2)\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{i+m-2}.
\end{aligned}
$$

A を次で定義する:

$$
A=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m.
$$

α_i の条件から $A>1$ となる.

(1.1) の非自明な非負値全域解の非存在については次の結果がある (参考文献 [2,3,5]).

Theorem A. $\alpha_i\geq 1, i=1,2,\ldots,m,$ とする. $P_i,\ i=1,2,\cdots,m,$ が

$$
(1.2)\qquad \liminf_{|x|\to\infty}|x|^{\lambda_i}P_i(x)>0
$$

を満たすとする, ここで λ_i は定数で

$$
(1.3)\qquad \Lambda_{i_0}\leq 0 \quad \text{for some}\quad i_0\in\{1,2,\cdots,m\}
$$

を満たすとする. このとき $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が (1.1) の非負値全域解ならば

$$(u_1, u_2, \ldots, u_m) \equiv (0, 0, \ldots, 0).$$

$\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, m,$ のなかで $\alpha_i < 1$ となるものがあるとき, この Theorem A は適用できない. しかし Theorem A の証明 ([3] 参照) をみると, 解を球対称なものに限ると α_i に対する条件は $A > 1$ だけでよいことがわかる. そうすると球対称でない解についてはどうなるかという問題がある。この問題に対しては次の Liouville 型の定理がある.

Theorem B. P_i, $i = 1, 2, \ldots, m,$ が (1.2),(1.3) をみたすとする. このとき $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ が

$$u_{i_0} = O(\exp|x|^\rho) \quad \text{as } |x| \to \infty \quad \text{for some } \rho > 0$$

を満たす (1.1) の非負値全域解ならば

$$(u_1, u_2, \cdots, u_m) \equiv (0, 0, \cdots, 0).$$

次の Example を考えてみる:

Example. 次の方程式系の非自明な非負値全域解について考える:

$$\Delta u_i = u_{i+1}^{\alpha_i}, \quad x \in \mathbf{R}^N, \tag{1.4}$$

ここで $N \geq 3,\ \alpha_i > 0, \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m > 1$.

$P_i(x) \equiv 1, i = 1, 2, \cdots, m,$ だから $\lambda_i = 0, i = 1, 2, \cdots, m,$ として (1.2),(1.3) を満たしている. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ を (1.4) の非負値全域解とする. このとき Theorems A,B から次のことがわかる:

(i) $\alpha_i \geq 1, i = 1, 2, \cdots, m,$ ならば $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$.

(ii) 次を満たすような $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ があれば $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$:

$$u_i(x) = O(\exp|x|^\rho) \quad \text{as} \quad |x| \to \infty \quad \text{for some} \quad \rho > 0. \tag{$*$}$$

この Example に関して次の問題が考えられる.

問題「(1.4) の非負値全域解は $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ だけか, あるいは $(*)$ を満たさない解が存在するのか?」.

この問題に対しては次の結果と予想がある.

(i) $m = 2$ のとき, 非負値全域解は $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ に限る ([1] の Theorem 1.1 と [4] より).

(ii) 予想: $m \geq 3$ のときも 非負値全域解は $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ に限る.

本研究の目的は $\alpha_i \geq 1, i = 1, 2, \cdots, m,$ という条件をつけなくても Theorem A が成立することを示すことである (Theorem 2).

Theorem 1. $P_i,\ i=1,2,\cdots,m$, が (1.2) を満たすとする. このとき $(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ を (1.1) の非負値全域解とすると

$$u_i(x) \le C_i|x|^{\frac{\Lambda_i}{A-1}} \quad \text{at} \quad \infty, \quad i=1,2,\cdots,m, \tag{1.5}$$

ここで $C_i>0,\ i=1,2,\ldots,m$, は定数.

Theorem 2. $P_i,\ i=1,2,\ldots,m$, が (1.2) を満たすとする. さらに

$$\Lambda_i \le 0 \quad \text{for some} \quad i \in \{1,2,\ldots,m\}$$

このとき $(u_1,u_2,\ldots,u_m)$ が (1.1) の非負値全域解ならば

$$(u_1,u_2,\ldots,u_m) \equiv (0,0,\ldots,0).$$

この Theorem 2 から (1.4) の非負値全域解は $\mathbf{u}\equiv\mathbf{0}$ である。

2. 証明の概略

まず定理を証明するための補題を用意する.
記号の導入: $\mathbf{R}^N$ で定義された関数 v に対してその球面平均を $\bar{v}$ とする,

$$\bar{v}(r) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x|=r} v(x)dS,$$

ここで ω_N は単位球の表面積. P_{i*} を次で定義する:

$$P_{i*}(r) = \min_{|x|\le r} P_i(x).$$

P_i の仮定 (1.2) より

$$P_{i*}(r) \ge \frac{\tilde{C}_i}{r^{\lambda_i}}, \quad r \ge r_0, \tag{2.1}$$

をみたす定数 $\tilde{C}_i>0, r_0>0$ が存在する.

Lemma 1. $(u_1,u_2,\ldots,u_m)$ を (1.1) の非負値全域解とする. このとき $\forall\varepsilon\in(0,1)$ に対して u_i の球面平均 $\bar{u}_i$ は

$$\begin{cases} \bar{u}_i'(r) \ge C_i\varepsilon^N r P_{i*}(r)\bar{u}_{i+1}(r(1-\varepsilon))^{\alpha_i}, & r>0, \\ \bar{u}_i'(0)=0, \quad i=1,2,\ldots,m, \end{cases}$$

を満たす, ここで $C_i = C_i(N,\alpha_i)>0$ は定数.

Lemma 1 の証明は [3] の Lemma 4.2 の証明を参照.

Lemma 2 $h, \tau \in \mathbf{R}, d \in (0,1)$, $\varepsilon_0 \in (0, 1/2]$, $y \in C[0,\infty)$, $y(r) > 0$, $r \geq r_0 > 0$ とする. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対し y が

$$y(r) \leq C\varepsilon^{-h} r^\tau y(r(1+\varepsilon))^d, \quad r \geq r_1 \tag{2.2}$$

を満たすとする, ここで $C > 0$, $r_1 \geq r_0$ は定数. このとき y は

$$y(r) \leq \tilde{C} r^{\frac{\tau}{1-d}}, \quad r \geq r_1 \tag{2.3}$$

を満たす, ここで $\tilde{C} > 0$ は定数.

Lemma 2 の証明の概略. $h \leq 0$ のとき, (2.3) は明らか. 従って $h > 0$ とする. $\varepsilon_n = \varepsilon_0/2^n, n \in \mathbf{N}$ とおく. $\forall r \geq r_0$, $\forall n \geq 1$ に対して, $E_n = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\cdots(1+\varepsilon_n), E_0 = 1$ とおくと (2.2) より

$$y(rE_{n-1}) \leq C\varepsilon_n^{-h}(rE_{n-1})^\tau y(rE_n)^d.$$

従って

$$\begin{aligned} y(r) &\leq C\varepsilon_1^{-h} r^\tau y(rE_1)^d \\ &\leq C^{1+d}\varepsilon_1^{-h}\varepsilon_2^{-hd} r^\tau (rE_1)^{\tau d} y(rE_2)^{d^2} \\ &\leq \cdots \\ &\leq C^{1+d+\cdots+d^{n-1}}\varepsilon_1^{-h}\varepsilon_2^{-hd}\cdots\varepsilon_n^{-hd^{n-1}} r^\tau (rE_1)^{\tau d}\cdots(rE_{n-1})^{\tau d^{n-1}} y(rE_n)^{d^n} \\ &= (C\varepsilon_0^{-h} r^\tau)^{1+d+\cdots+d^{n-1}} 2^{h(1+2d+\cdots+nd^{n-1})} M^{\tau(d+d^2+\cdots+d^{n-1})} y(rE_n)^{d^n}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

ここで $M = 1(\tau < 0$ のとき$), M = e(\tau \geq 0$ のとき$)$. $r \geq r_0$ を任意に固定する. $\varepsilon_n = \varepsilon_0/2^n$ だから $n \to \infty$ とすると E_n はある定数 $E > 0$ に収束する. $0 < d < 1$ だから $(rE_n)^{d^n} \to 1 (n \to \infty)$. 従って (2.4) で $n \to \infty$ とすると

$$y(r) \leq (C\varepsilon_0^{-h})^{\frac{1}{1-d}} 2^{\frac{h}{(1-d)^2}} M^{\frac{\tau d}{1-d}} r^{\frac{\tau}{1-d}}, \quad r \geq r_1.$$

従って (2.3) が成立.

Theorem 1 の証明の概略. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ を (1.1) の非負値全域解とする. $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ は明らかに (1.5) を満たすから $\mathbf{u} \not\equiv \mathbf{0}$ とする. $\varepsilon \in (0, 1/2)$ とする. Lemma 1 から u_i の球面平均 $\bar{u}_i$ は

$$\bar{u}_i'(r) \geq C_i \varepsilon^N r P_{i*}(r) \bar{u}_{i+1}(r(1-\varepsilon))^{\alpha_i}, \quad r > 0 \tag{2.5}$$

を満たす. $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ は非負値だから $\bar{u}_i(r) \geq 0$. よって $\bar{u}_i$ は増加となる. $\mathbf{u} \not\equiv \mathbf{0}$ だから $\bar{u}_i(r) > 0, r > r_*$, $i = 1, 2, \ldots, m$, となる $r_* > r_0$ が存在する.

(2.5) を $[(1-\varepsilon)r, r], r \geq r_*$, で積分して

$$\bar{u}_i(r) - \bar{u}_i(r(1-\varepsilon)) \geq C_i \varepsilon^N \int_{r(1-\varepsilon)}^{r} s P_{i*}(s) \bar{u}_{i+1}(s(1-\varepsilon))^{\alpha_i} ds.$$

$\bar{u}_i$ の単調性と (2.1) より

$$\bar{u}_i(r) \geq C_\varepsilon \varepsilon^{N+1} r^{2-\lambda_i} \bar{u}_{i+1}(r(1-\varepsilon)^2)^{\alpha_i}, \quad r \geq r_*, \tag{2.6}$$

ここで $C_\varepsilon > 0$ は定数.

注意 (2.6) の定数 C_ε は $C_\varepsilon \to C_i\tilde{C}_i > 0(\varepsilon \to 0)$ となる. 以後, C_ε は $\varepsilon \to 0$ のときある正定数に収束する定数である。

(2.6) より

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i(r) &\geq C_\varepsilon \varepsilon^{N+1} r^{2-\lambda_i} u_{i+1}(r(1-\varepsilon)^2)^{\alpha_i} \\
&\geq C_\varepsilon \varepsilon^{N+1+\alpha_i(N+1)} r^{2-\lambda_i+\alpha_i(2-\lambda_{i+1})} \bar{u}_{i+2}(r(1-\varepsilon)^4)^{\alpha_i\alpha_{i+1}} \\
&\geq \cdots \\
&\geq C_\varepsilon \varepsilon^h r^{-\Lambda_i} \bar{u}_i(r(1-\varepsilon)^{2m})^A,
\end{aligned}$$

ここで, $h = (N+1)(1+\alpha_i+\alpha_i\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_i\cdots\alpha_{i+m-2})$. $r(1-\varepsilon)^{2m}$ を改めて r とおいて

$$\bar{u}_i(r) \leq C_\varepsilon \varepsilon^{-\frac{h}{A}} r^{\frac{\Lambda_i}{A}} \bar{u}_i\left(\frac{r}{(1-\varepsilon)^{2m}}\right)^{\frac{1}{A}}, \quad r \geq r_*.$$

$k > 2m$ を十分大きくとり ε を改めて ε/k とおいて

$$\bar{u}_i(r) \leq C\varepsilon^{-\frac{h}{A}} r^{\frac{\Lambda_i}{A}} \bar{u}_i(r(1+\varepsilon))^{\frac{1}{A}}, \quad r \geq r_*$$

とできる, ここで $C > 0$ は ε に依存しない定数. $1/A < 1$ だから Lemma 2 より

$$\bar{u}_i(r) \leq C r^{\frac{\Lambda_i}{A-1}}, \quad r \geq r_* \tag{2.7}$$

を得る. u_i は sub-harmonic だから

$$u_i(x) \leq C|x|^{\beta_i}$$

を得る. (Theorem 1 の証明終)

Theorem 2 の証明の概略. $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ を (1.1) の非自明な非負値全域解とする. $\Lambda_1 \leq 0$ とする. このとき Theorem 1 から u_1 の球面平均 $\bar{u}_1$ は

$$0 \leq \bar{u}_1(r) \leq C_1 r^{\frac{\Lambda_1}{A-1}}, \quad r \geq r_0 > 0$$

を満たす. $\Lambda_1 \leq 0$ だから u_1 は有界. 一方 $\Lambda_1 \leq 0$ から

$$\lim_{r\to\infty} \bar{u}_1(r) = \infty$$

を示すことができる ([3] の Theorem 4.1 の証明を参照)。これは矛盾. 従って $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \equiv (0, 0, \ldots, 0)$.

参考文献

[1] M-F. Bidaut-Veron and P. Grillot, Singularities in elliptic systems with absorption terms, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 28(1999), 229-271.

[2] T.Teramoto, Existence and nonexistence of positive entire solutions of second order semilinear elliptic systems, Funkcial. Ekvac., 42(1999), 241-260.

[3] T.Teramoto, On nonnegative entire solutions of second order semilinear elliptic systems, Electron. J. Diff. Eq., 2003, No.94(2003), 1-22.

[4] T.Teramoto and H.Usami, A Liouville type theorem for semilinear elliptic systems, Pacific J. Math., 204(2002), 247-255.

[5] S. Yarur, Nonexistence of positive singular solutions for a class of semilinear elliptic systems, Electron. J. Diff. Eq., 1996, No.08(1996), 1-22.